2026

CANPOINT®

全品高考复习方案

数学 RJA 作业手册

参考答案

扫码获取详解详析

第一单元　预备知识

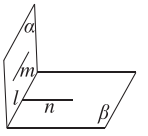
第1讲　集合

1. C　[解析] 由题意可得 $A\cap B=\{0,1\}$. 故选 C.
2. D　[解析] 全集 $U=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$，所以 $\complement_U A=[-2,-1)\cup\{2\}$. 故选 D.
3. B　[解析] $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-4x<0\}=\{1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}$. 故选 B.
4. D　[解析] $A=\{y\mid y=e^x,x<0\}=(0,1)$，$B=\{y\mid y=\ln x\}=\mathbf{R}$，故 $A\cup B=\mathbf{R}$. 故选 D.
5. C　[解析] 由 $y=\dfrac{12}{x+3}\in\mathbf{N}$ 且 $x\in\mathbf{N}$ 可知，$x+3$ 的值可以是 3,4,6,12，则 x 的值可以是 0,1,3,9，即 $A=\{0,1,3,9\}$，故集合 A 的真子集个数为 $2^4-1=15$. 故选 C.
6. B　[解析] 由不等式 $x^2-x-6>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>3$，所以 $B=\{x\mid x<-2$ 或 $x>3\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$. 由 $A=\{x\mid x>2\}$，可得 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x\leqslant 2\}$，则图中阴影部分所表示的集合为 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid x\leqslant 2\}\cap\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$. 故选 B.
7. 2　[解析] 由 $A=\{1,3,a^2\}$，得 $a^2\neq 1$，即 $a\neq\pm 1$，此时 $a+2\neq 1$，$a+2\neq 3$，由 $B\subseteq A$，得 $a^2=a+2$，而 $a\neq -1$，所以 $a=2$.
8. D　[解析] 由集合 $M=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，得 $M\cap N$ 中 k 前面的系数应为 2,3 的最小公倍数，故排除 A,B. 对于 C，当 $k=1$ 时，$x=7$，而令 $3k-1=7$，可得 k 不为整数，故 $N=\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$ 中不包含 7，可得 $M\cap N$ 中不包含 7，故 C 错误. 故选 D.
9. B　[解析] 由 $2^x>8$，得 $x>3$，故 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid x>3\}$. 由 $x^2-7x-8<0$，得 $-1<x<8$，故 $B=\{x\mid -1<x<8\}$，则 $A\cap B=\{4,5,6,7\}$，故 $A\cap B$ 的真子集个数为 $2^4-1=15$. 故选 B.
10. AC　[解析] 当 $a=1$ 时，由 $(a,b)\in\{(x,y)\mid y=x+1\}$ 得 $b=2$，满足 $b\in\{1,2,3\}$，所以 $2^{a^b}=2^1=2$；当 $a=2$ 时，由 $(a,b)\in\{(x,y)\mid y=x+1\}$ 得 $b=3$，满足 $b\in\{1,2,3\}$，所以 $2^{a^b}=2^8=256$；当 $a=3$ 时，由 $(a,b)\in\{(x,y)\mid y=x+1\}$ 得 $b=4$，不满足 $b\in\{1,2,3\}$. 故 $2^{a^b}=2$ 或 256. 故选 AC.
11. BCD　[解析] 对于 A，由题意知，$A=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，故 A 错误；对于 B，$A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$，故 B 正确；对于 C，$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，故 C 正确；对于 D，因为 $\mathbf{N}^*\cap B=\{1\}$，所以 $\mathbf{N}^*\cap B$ 的子集为 $\varnothing$，$\{1\}$，共 2 个，故 D 正确. 故选 BCD.
12. ABD　[解析] 设 $A=\{x\mid x$ 是参加“100 米”的同学$\}$，$B=\{x\mid x$ 是参加“400 米”的同学$\}$，$C=\{x\mid x$ 是参加“1500 米”的同学$\}$，则 $\mathrm{card}(A)=8$，$\mathrm{card}(B)=7$，$\mathrm{card}(C)=5$，且 $\mathrm{card}(A\cap B)=4$，$\mathrm{card}(A\cap C)=3$，$\mathrm{card}(B\cap C)=3$，则 $\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=12-[(8+7+5)-(4+3+3)]=2$，所以三项比赛都参加的有 2 人，只参加“100 米”的有 3 人，只参加“400 米”的有 2 人，只参加“1500 米”的有 1 人. 故选 ABD.
13. 1 或 2　[解析] 因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$. 当 $a=0$ 时，$B=\{0,-1\}$，不满足 $B\subseteq A$；当 $a=1$ 时，$B=\{1,0\}$，满足 $B\subseteq A$；当 $a=2$ 时，$B=\{2,3\}$，满足 $B\subseteq A$；当 $a=3$ 时，$B=\{3,8\}$，不满足 $B\subseteq A$. 故实数 a 的值为 1 或 2.
14. 7　[解析] 集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid -1<x<5\}=\{0,1,2,3,4\}$，所以满足 $A\subseteq C\subsetneq B$ 的集合 C 中必有元素 2,3，所以求满足 $A\subseteq C\subsetneq B$ 的集合 C 的个数即求集合 $\{0,1,4\}$ 的真子集个数，所以满足 $A\subseteq C\subsetneq B$ 的集合 C 的个数为 $2^3-1=7$.
15. D　[解析] 不妨设 $I=\{1,2,3,4\}$，则 $I=\{2,3,4\}\cup\{1\}=\{1,3,4\}\cup\{2\}=\{1,2,4\}\cup\{3\}=\{1,2,3\}\cup\{4\}=\{1,2\}\cup\{3,4\}=\{1,3\}\cup\{2,4\}=\{1,4\}\cup\{2,3\}$，故 I 的 2 划分有 7 个；$I=\{1,2\}\cup\{3\}\cup\{4\}=\{1,3\}\cup\{2\}\cup\{4\}=\{1,4\}\cup\{2\}\cup\{3\}=\{2,3\}\cup\{1\}\cup\{4\}=\{2,4\}\cup\{1\}\cup\{3\}=\{3,4\}\cup\{1\}\cup\{2\}$，故 I 的 3 划分有 6 个，$I=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}$，故 I 的 4 划分有 1 个. 综上，I 的划分共有 $7+6+1=14$(个). 故选 D.

第2讲　常用逻辑用语

1. D　[解析] 存在量词命题的否定是全称量词命题，所以“$\exists x\in\mathbf{R},x^2-4x+6<0$”的否定为“$\forall x\in\mathbf{R},x^2-4x+6\geqslant 0$”，故选 D.
2. B　[解析] 由 $a^2=b^2$ 可得 $a=\pm b$，由 $a^2+b^2=2ab$ 可得 $a=b$，$\therefore$“$a^2=b^2$”是“$a^2+b^2=2ab$”的必要不充分条件.
3. C　[解析] 由题得 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\lambda\mu=8$，故“$\lambda\mu=8$”是“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”的充要条件. 故选 C.
4. A　[解析] 由指数、对数函数的图象知，命题 $p:\forall x\in(0,+\infty),e^x>\ln x$ 是真命题，$\neg p:\exists x\in(0,+\infty),e^x\leqslant\ln x$. 故选 A.
5. B　[解析] 设 $p:x+y>0$ 的一个充分不必要条件为 q，则 q 能推出 p，但 p 不能推出 q. 对于 A，“$x+y>-1$”不能推出“$x+y>0$”，故 A 错误；对于 B，“$x>y>0$”能推出“$x+y>0$”，且“$x+y>0$”不能推出“$x>y>0$”，故 B 正确；对于 C，“$xy>0$”不能推出“$x+y>0$”，故 C 错误；对于 D，“$x^2-y^2>0$”不能推出“$x+y>0$”，故 D 错误. 故选 B.
6. BD　[解析] 对于 A，“$\forall x\in\mathbf{R},x^2-3x+5>0$”是全称量词命题，A 错误；对于 B，“$\exists x\in\mathbf{R},x^2-3x+\sqrt{2}<0$”是存在量词命题，且 $1^2-3\times 1+\sqrt{2}<0$，B 正确；对于 C，只有质数 2 的平方为偶数，即不存在两个质数的平方是偶数，C 错误；对于 D，该命题是存在量词命题，内角为 30°，60°，90° 的直角三角形的三个内角成等差数列，D 正确. 故选 BD.
7. (1)$\dfrac{1}{2}$　(2)$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　[解析] (1) 由已知可得 $A=B$，则 $x=2$ 是方程 $bx=1$ 的解，且 $b>0$，故 $b=\dfrac{1}{2}$.

(2)$\because$“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分不必要条件，$\therefore A\subsetneq B$. 当 $b<0$ 时，$B=\{x\mid bx>1\}=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{b}\right\}$，不符合题意；当 $b=0$ 时，$B=\varnothing$，不符合题意；当 $b>0$ 时，$B=\{x\mid bx>1\}=\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{b}\right\}$，由 $A\subsetneq B$，得 $\dfrac{1}{b}<2$，即 $b>\dfrac{1}{2}$，故 b 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.
8. A　[解析] 当 $m\in(0,6)$ 时，曲线 $C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，故充分性成立；当 $m<0$ 时，曲线 $C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线，故“曲线 C 的焦点在 x 轴上”推不出“$m\in(0,6)$”，故必要性不成立. 所以“$m\in(0,6)$”是“曲线 C 的焦点在 x 轴上”的充分不必要条件. 故选 A.
9. A　[解析] 如图，设 $\alpha\cap\beta=l$，$n\perp l$，$m\parallel l$，则 $n\perp\alpha$，又 $m\subset\alpha$，所以 $m\perp n$，此时 $m\parallel\beta$；若 $m\perp\beta$，则由 $n\subset\beta$，得 $m\perp n$. 所以“$m\perp n$”是“$m\perp\beta$”的必要不充分条件，故选 A.



10. C　[解析] 在 $\triangle ABC$ 中，由 A,B,C 成等差数列，得 $2B=A+C$，又 $A+B+C=\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. 由 $\sin A,\sin B,\sin C$ 成等比数列，得 $\sin^2 B=\sin A\sin C$，由正弦定理得 $b^2=ac$，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $ac=a^2+c^2-ac$，解得 $a=c$，因此 $\triangle ABC$ 是正三角形. 若 $\triangle ABC$ 是正三角形，则 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$，$\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此 A,B,C 成等差数列且 $\sin A,\sin B,\sin C$ 成等比数列. 所以“内角 A,B,C 成等差数列且 $\sin A,\sin B,\sin C$ 成等比数列”是“$\triangle ABC$ 是正三角形”的充要条件. 故选 C.
11. AD　[解析] 对于 A，因为 $a>0,b>0$，所以 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow a>b$，选项 A 正确；对于 B，$a=1<2=b$ 满足 $|a-2|>|b-2|$，选项 B 错误；对于 C，$a^2b+b>a+ab^2\Leftrightarrow(ab-1)(a-b)>0$，当 $ab<1$ 时，$a<b$，选项 C 错误；对于 D，$\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)\Leftrightarrow a^2>b^2\Leftrightarrow(a+b)(a-b)>0$，因为 $a>0,b>0$，所以 $a>b$，选项 D 正确. 故选 AD.
12. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　[解析] 由 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{4}\geqslant-\dfrac{1}{6}$，解得 $x\in\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$，由 $2x<a$，解得 $x\in\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right)$. 由题意知 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)\cap\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right)\neq\varnothing$，所以 $\dfrac{a}{2}>\dfrac{1}{4}$，即 $a>\dfrac{1}{2}$，故实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.
13. $(-\infty,1]$　[解析] 因为 $\neg p$ 是假命题，所以 p 是真命题，所以 $m=-4^x+2^{x+1}$，$x\in\mathbf{R}$ 有解. 令 $y=-4^x+2^{x+1}=-(2^x)^2+2\times 2^x$，由 $2^x>0$ 及二次函数的性质可知 $y\leqslant 1$，故 $m\leqslant 1$.
14. BD　[解析] 对于 A，当 $x\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)=x$，当 $x\notin\mathbf{Z}$ 时，$f(x)\in\mathbf{Z}$，而 $x-1\notin\mathbf{Z}$，因此 $f(x)\neq x-1$，A 错误；对于 B，$\forall x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{Z}$，令 $f(x)=m$，则 $m\leqslant x<m+1$，$m+n\leqslant x+n<m+n+1$，因此 $f(x+n)=m+n=f(x)+n$，B 正确；对于 C，取 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=2$，又 $0<\lg 2<1$，则 $f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=-1$，$f(\lg 2)=$

$0, f\left[\lg\left(\frac{1}{2}\times 2\right)\right]=f(0)=0$，显然 $f\left(\lg\frac{1}{2}\right)+f(\lg 2)\neq f\left[\lg\left(\frac{1}{2}\times 2\right)\right]$，C 错误；对于 D，当 $1\leqslant n\leqslant 9, n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(\lg n)=0$，当 $10\leqslant n\leqslant 99, n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(\lg n)=1$，而 $f(\lg 100)=2$，因此 $f(\lg 1)+f(\lg 2)+f(\lg 3)+\cdots+f(\lg 99)+f(\lg 100)=92$，D 正确. 故选 BD.

15. $(3,+\infty)$ ［解析］因为 $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}$，所以 $f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}>0$，则函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(2)=3$，即 $f(x)\in(3,+\infty)$. 因为存在 $x\in(2,+\infty)$，使得 $f(x)<m$ 成立，所以 $m>3$，即实数 m 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

第 3 讲　等式与不等式

1. D ［解析］$\because P-Q=a^2+3a+2-(a+1)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geqslant 0$，$\therefore P\geqslant Q$. 故选 D.

2. D ［解析］对于 A 选项，令 $a=-1, b=1$，满足 $ab\neq 0$ 且 $a<b$，但 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故 A 错误；对于 B 选项，令 $a=-1, b=-2$，满足 $a>b$，但 $a^2<b^2$，故 B 错误；对于 C 选项，令 $a=-1, b=-2, c=3, d=1$，满足 $a>b, c>d$，但 $ac<bd$，故 C 错误；对于 D 选项，由 $a>b$ 及不等式的性质可得 $a+c>b+c$，故 D 正确. 故选 D.

3. B ［解析］由题知 $x>0, y>0$，因为 $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}<1$，所以 $x<y$.

4. D ［解析］当 $a=-1, b=-1$ 时，$a+b=-2$，所以 A 错误. 当 $a<0, b>0$ 时，$a<b$，所以 B 错误. 当 $a=2, b=1$ 时，$\ln(a-b)=0$，所以 C 错误. 若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$，则 $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$，所以 D 正确. 故选 D.

5. C ［解析］当 $ab<0$ 时，$\begin{cases}a>0,\\ b<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ b>0,\end{cases}$ 则 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$，即充分性成立；当 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$ 时，$\frac{|b|}{|a|}=-\frac{b}{a}>0$，则 $ab<0$，即必要性成立. 所以“$ab<0$”是“$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$”的充要条件. 故选 C.

6. 1　2(答案不唯一) ［解析］因为“若 m 为正数，则 $\frac{b+m}{a+m}<\frac{b}{a}$”是真命题，所以 $\frac{b}{a}-\frac{b+m}{a+m}=\frac{(b-a)m}{a(a+m)}>0$，因为 a, b, m 均为正数，所以 $0<a<b$，不妨取 $a=1$，$b=2$(答案不唯一).

7. $[0,6]$ ［解析］因为 $x>0, y>0$，所以 $\frac{x}{y}>0$，又 $-1\leqslant\lg\frac{x}{y}\leqslant 2$，$1\leqslant\lg x\leqslant 4$，所以 $\lg\frac{x^2}{y}=\lg\left(\frac{x}{y}\cdot x\right)=\lg\frac{x}{y}+\lg x\in[0,6]$，所以 $\lg\frac{x^2}{y}$ 的取值范围是 $[0,6]$.

8. C ［解析］由 $-1<t<0$，得 $\frac{1}{t}\in(-\infty,-1)$，故 $a=t-\frac{1}{t}>0$. 由对勾函数的性质可得 $b=t+\frac{1}{t}<-(1+1)=-2$，$c=t(2+t)<0$，且 $c=t(2+t)=t^2+2t=(t+1)^2-1>-1$. 综上所述，$b<c<a$. 故选 C.

9. B ［解析］根据题意得，$M=\frac{a+b+c}{3}$，$N=\frac{a+b}{2}$，$P=\frac{N+c}{2}=\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}=\frac{a+b+2c}{4}$. 对于 A，$N-P=\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2c}{4}=\frac{a+b-2c}{4}$，$\because a>b>c$，$\therefore a-c>0, b-c>0$，$\therefore a+b-2c>0$，$\therefore N-P=\frac{a+b-2c}{4}>0$，$\therefore N>P$，故 A 错误. 对于 B，$M-P=\frac{a+b+c}{3}-\frac{a+b+2c}{4}=\frac{a+b-2c}{12}$，$\because a>b>c$，$\therefore a-c>0, b-c>0$，$\therefore a+b-2c>0$，$\therefore M-P=\frac{a+b-2c}{12}>0$，$\therefore M>P$，故 B 正确. 对于 C，$M-N=\frac{a+b+c}{3}-\frac{a+b}{2}=\frac{-a-b+2c}{6}$，$\because a>b>c$，$\therefore c-a<0, c-b<0$，$\therefore 2c-a-b<0$，$\therefore M-N=\frac{-a-b+2c}{6}<0$，$\therefore M<N$，故 C 错误. 对于 D，$\because M>P, N>P$，$\therefore M+N>2P$，故 D 错误. 故选 B.

10. B ［解析］对于①，由 $b\geqslant\frac{4}{b}>0$ 得 $b^2\geqslant 4$，所以 $b\geqslant 2$，故①正确；对于②，$b=2, a=1$，显然满足条件，故②错误；对于③，由 $2a\geqslant\frac{4}{b}>0$ 得 $ab\geqslant 2$，故③正确；对于④，$a^2+b^2\geqslant b^2+b-1$，由于 $f(b)=b^2+b-1$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，故 a^2+b^2 的最小值为 $f(2)=5$，故④错误. 故正确的结论有 2 个.

11. ABD ［解析］因为 $c<0<b<a$，所以 $ac<bc$，所以 $ac+b<bc+a$，故 A 正确；因为 $c<0<b<a$，所以 $b^3<a^3, c^3<0$，所以 $b^3+c^3<a^3$，故 B 正确；因为 $c<0<b<a$，所以不妨令 $a=3, b=2, c=-1$，得 $\frac{a+c}{b+c}=2$，$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$，此时 $\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$，故 C 错误；因为 $c<0<b<a$，所以 $\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$，所以 $\frac{1}{\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{b}}$，所以 $\frac{c}{\sqrt{a}}>\frac{c}{\sqrt{b}}$，故 D 正确. 故选 ABD.

12. ABD ［解析］对于 A，由 $a+b=2$，得 $a-1=1-b$，因此 $|a-1|=|b-1|$，故 A 正确；对于 B，由 $a+b=2$，得 $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}=4$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号，故 B 正确；对于 C，取 $a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}$，满足 $a+b=2$，但 $\lg a=\lg\frac{3}{2}<\lg 2=\lg\frac{1}{b}$，故 C 错误；对于 D，由 $a+b=2$，得 $a=2-b$，$0<b<2$，则 $b-\frac{4}{a^2}+1=b-\frac{4}{(b-2)^2}+1=\frac{b(b^2-4b+4)+(b^2-4b+4)-4}{(b-2)^2}=\frac{b^2(b-3)}{(b-2)^2}<0$，即 $b-\frac{4}{a^2}<-1$，故 D 正确. 故选 ABD.

13. $>$ ［解析］由题意得 $\begin{cases}4A+5B<400,\\ 6A+3B>450,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-4A-5B>-400,\\ 6A+3B>450,\end{cases}$ 所以 $A-B>25>0$，则 $A>B$.

14. $[15,19]$ ［解析］因为 $x+y=4-z$，$2x-y=5-z$，所以 $x=3-\frac{2z}{3}$，$y=1-\frac{z}{3}$，由 $x, y, z\geqslant 0$ 得 $\begin{cases}3-\frac{2z}{3}\geqslant 0,\\ 1-\frac{z}{3}\geqslant 0,\\ z\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant z\leqslant 3$，故 $M=4x+3y+5z=4\left(3-\frac{2z}{3}\right)+3\left(1-\frac{z}{3}\right)+5z=\frac{4z}{3}+15\in[15,19]$.

15. BCD ［解析］对于 A，由 $0<a<b<1$，得 $\frac{b}{a}-\frac{b-1}{a-1}=\frac{a-b}{a(a-1)}>0$，故 $\frac{b}{a}>\frac{b-1}{a-1}$，所以 A 错误；对于 B，由 $0<a<b<1$，得 $a+b-ab=a+b(1-a)>0$，故 $a+b>ab$，所以 B 正确；对于 C，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，因为 $0<a<b<1$，所以 $f(a)<f(b)$，所以 $\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$，即 $b\ln a<a\ln b$，即 $\ln a^b<\ln b^a$，所以 $a^b<b^a$，所以 C 正确；对于 D，函数 $g(x)=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $0<a<b<1$，所以 $g(a)<g(b)$，即 $2^a-\log_{\frac{1}{2}}a<2^b-\log_{\frac{1}{2}}b$，所以 $2^a-2^b<\log_{\frac{1}{2}}a-\log_{\frac{1}{2}}b$，所以 D 正确. 故选 BCD.

第 4 讲　基本不等式

1. D ［解析］$\because x>0$，$\therefore x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时取等号，$\therefore x+\frac{4}{x}$ 的最小值为 4. 故选 D.

2. B ［解析］取 $a=1, b=4$，计算可得 $\sqrt{ab}=2$，$\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}$，所以 $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$，故选 B.

3. B ［解析］因为 $2^m+2^n=2^{m+n}\geqslant 2\sqrt{2^m\cdot 2^n}=2\sqrt{2^{m+n}}$，当且仅当 $m=n=1$ 时取等号，所以 $2^{m+n}\geqslant 4$，即 $m+n\geqslant 2$，则 $m+n+1+2^{m+n}\geqslant 2+1+2^2=7$. 故选 B.

4. D ［解析］因为 $3m+2n-1=0$，所以 $3m+2n=1$，所以 $\frac{3}{m}+\frac{2}{n}=\left(\frac{3}{m}+\frac{2}{n}\right)\times 1=\left(\frac{3}{m}+\frac{2}{n}\right)(3m+2n)=9+\frac{6n}{m}+\frac{6m}{n}+4\geqslant 13+2\sqrt{\frac{6n}{m}\times\frac{6m}{n}}=13+12=25$，当且仅当 $\frac{6n}{m}=\frac{6m}{n}$，即 $m=n=\frac{1}{5}$ 时取等号，所以 $\frac{3}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为 25. 故选 D.

5. D ［解析］当 $x>1$ 时，$x-1>0$，故 $x+\frac{1}{x-1}=(x-1)+\frac{1}{x-1}+1\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3$，当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时等号成立. 因为不等式 $x+\frac{1}{x-1}\geqslant a$ 恒成立，所以 $a\leqslant\left(x+\frac{1}{x-1}\right)_{\min}$，故 $a\leqslant 3$，故选 D.

6. $\frac{1}{2}$ ［解析］因为正实数 x, y 满足 $x^2+4y^2-2xy=1$，所以 $1+2xy=x^2+4y^2\geqslant 4xy$，当且仅当 $x=2y$，即 $y=\frac{1}{2}, x=1$

时取等号，所以 $xy\leqslant\frac{1}{2}$，即 xy 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

7. $\frac{1}{12}$ ［解析］因为 $0<x<\frac{1}{3}$，所以 $1-3x>0$，所以 $x(1-3x)=\frac{1}{3}\cdot 3x(1-3x)\leqslant\frac{1}{3}\times\left[\frac{3x+(1-3x)}{2}\right]^2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，当且仅当 $x=\frac{1}{6}$ 时，等号成立，故 $x(1-3x)$ 的最大值是 $\frac{1}{12}$.

8. A ［解析］因为 $3y(1-x)=x+8$，所以 $3y=\frac{x+8}{1-x}$，所以 $x-3y=x-\frac{x+8}{1-x}=x+\frac{x+8}{x-1}=\frac{x^2+8}{x-1}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+9}{x-1}=(x-1)+\frac{9}{x-1}+2$，因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，所以 $x-3y=(x-1)+\frac{9}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{9}{x-1}}+2=8$，当且仅当 $x-1=\frac{9}{x-1}$，即 $x=4$ 时取等号，所以 $x-3y$ 的最小值是 8. 故选 A.

9. C ［解析］设矩形场地的长为 x 米，则宽为 $\frac{10\,000}{x}$ 米，$W=(x+4)\left(\frac{10\,000}{x}+4\right)=4x+\frac{40\,000}{x}+10\,016\geqslant 2\sqrt{4x\cdot\frac{40\,000}{x}}+10\,016=10\,816$，当且仅当 $4x=\frac{40\,000}{x}$，即 $x=100$ 时，等号成立，所以估算平整完这块矩形场地所需的最少费用为 $1\times 10\,816=10\,816$(元). 故选 C.

10. AB ［解析］对于 A，$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant 2$，当且仅当 $x=-1$ 时取等号，故 A 正确；对于 B，在 $y=|\sin x|+\frac{1}{|\sin x|}$ 中，$|\sin x|>0$，所以 $y=|\sin x|+\frac{1}{|\sin x|}\geqslant 2\sqrt{|\sin x|\cdot\frac{1}{|\sin x|}}=2$，当且仅当 $|\sin x|^2=1$ 时，等号成立，故 B 正确；对于 C，$2^x>0$，$2^{1-x}>0$，故 $y=2^x+2^{1-x}=2^x+\frac{2}{2^x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot\frac{2}{2^x}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $(2^x)^2=2$，即 $x=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 C 错误；对于 D，$x>0$，$\ln x\in\mathbf{R}$，只有当 $\ln x>0$ 时，才有 $y=\ln x+\frac{1}{\ln x}\geqslant 2\sqrt{\ln x\times\frac{1}{\ln x}}=2$，当且仅当 $(\ln x)^2=1$，即 $x=e$ 时等号成立，故 D 错误. 故选 AB.

11. BD ［解析］方法一：由 $x^2+y^2-xy=1$，得 $(x+y)^2-1=3xy\leqslant 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，当且仅当 $x=y=\pm 1$ 时取等号，所以 $(x+y)^2\leqslant 4$，即 $-2\leqslant x+y\leqslant 2$，故 A 错误，B 正确；因为 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant x^2+y^2-1\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $\frac{2}{3}\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，故 C 错误，D 正确. 故选 BD.

方法二：由 $x^2+y^2-xy=1$ 得 $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=1$，令 $\begin{cases}x-\frac{y}{2}=\cos\theta,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta,\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta,\end{cases}$ 故 $x+y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[-2,2]$，故 A 错误，B 正确；$x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\theta-\frac{1}{3}\cos 2\theta+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{4}{3}\in\left[\frac{2}{3},2\right]$，故 C 错误，D 正确. 故选 BD.

12. ［1，2］ ［解析］由题可知 $a+b=\frac{6ab}{2ab+1}=3-\frac{3}{2ab+1}$，因为 a，b 都是正数，所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{4}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号），所以 $a+b=3-\frac{3}{2ab+1}\leqslant 3-\frac{3}{2\cdot\frac{(a+b)^2}{4}+1}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号），化简可得 $(a+b)^2-3(a+b)+2\leqslant 0$，解得 $1\leqslant a+b\leqslant 2$.

13. 2 ［解析］① 当 $\frac{1}{a}\geqslant b$ 时，$M=\max\left\{\frac{1}{a},b,a+\frac{3}{b}\right\}=\max\left\{\frac{1}{a},a+\frac{3}{b}\right\}$，而 $a+\frac{3}{b}+\frac{1}{a}\geqslant 4a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{4a\cdot\frac{1}{a}}=4$（当且仅当 $a=\frac{1}{2}$ 时取等号），可得 $\frac{1}{a}$，$a+\frac{3}{b}$ 中至少有一个不小于 2，则 M 的最小值为 2；② 当 $\frac{1}{a}<b$ 时，$M=\max\left\{\frac{1}{a},b,a+\frac{3}{b}\right\}=\max\left\{b,a+\frac{3}{b}\right\}$，而 $b+a+\frac{3}{b}>b+\frac{4}{b}\geqslant 2\sqrt{b\cdot\frac{4}{b}}=4$（当且仅当 $b=2$ 时取等号），可得 b，$a+\frac{3}{b}$ 中至少有一个大于 2，则 M 大于 2. 综上，M 的最小值为 2.

14. 6 ［解析］设矩形空地的长为 x m，则宽为 $\frac{32}{x}$ m，依题意可得，试验区的总面积 $S=(x-0.5\times 4)\left(\frac{32}{x}-0.5\times 2\right)=34-x-\frac{64}{x}\leqslant 34-2\sqrt{x\cdot\frac{64}{x}}=18$，当且仅当 $x=\frac{64}{x}$，即 $x=8$ 时等号成立，所以每块试验区的面积的最大值为 $\frac{18}{3}=6(\text{m}^2)$.

15. AC ［解析］对于 A，因为 $x^2+y^2\geqslant 2xy$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，所以 $\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\frac{xy}{2xy}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；对于 B，因为 $\frac{x+y}{2}\leqslant\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，而 $x+y=4$，所以 $2\leqslant\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$，解得 $x^2+y^2\geqslant 8$，则 x^2+y^2 的最小值为 8，故 B 错误；对于 C，因为 $\frac{2}{x}+y=1$，所以 $x+\frac{1}{y}=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{2}{x}+y\right)=2+xy+\frac{2}{xy}+1=xy+\frac{2}{xy}+3$，由基本不等式得 $xy+\frac{2}{xy}+3\geqslant 2\sqrt{xy\times\frac{2}{xy}}+3=2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $xy=\frac{2}{xy}$，即 $x=2+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}-1$ 时取等号，故 C 正确；对于 D，因为 $x^2+y^2=x-y$，所以 $\frac{x^2+y^2}{x-y}=1$，则 $\frac{x+y+1}{x+2y}=\frac{x+y+\frac{x^2+y^2}{x-y}}{x+2y}=\frac{x^2-y^2+x^2+y^2}{(x+2y)(x-y)}=\frac{2x^2}{(x+2y)(x-y)}=\frac{2x^2}{x^2+xy-2y^2}=\frac{2}{1+\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2}$，因为 $x^2+y^2=x-y>0$，所以 $y<x$，令 $t=\frac{y}{x}\in(0,1)$，$f(t)=\frac{2}{1+t-2t^2}$，$g(t)=1+t-2t^2$，由二次函数的性质得，当 $t=\frac{1}{4}$ 时，$g(t)=1+t-2t^2$ 取得最大值，最大值为 $g\left(\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{16}=\frac{9}{8}$，又当 $t\in(0,1)$ 时，$g(t)>0$，所以 $f(t)$ 的最小值为 $\frac{2}{\frac{9}{8}}=\frac{16}{9}$，即 $\frac{x+y+1}{x+2y}$ 的最小值为 $\frac{16}{9}$，故 D 错误. 故选 AC.

16. $2\sqrt{2}$ 2 ［解析］由题得 $4=a+4b\geqslant 2\sqrt{a\cdot 4b}=4\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=4b=2$ 时取等号，因此 $0<ab\leqslant 1$. $\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{a+4b+4\sqrt{ab}}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}}$，令 $x=ab\in(0,1]$，易知函数 $y=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，当 $x=1$ 时，$y_{\min}=\sqrt{2}$，所以当 $ab=1$，即 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$.

第 5 讲　一元二次方程、不等式

1. C ［解析］由 $(2-x)(2x-3)>0$ 得 $(x-2)(2x-3)<0$，解得 $\frac{3}{2}<x<2$，所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{2}<x<2\right\}$. 故选 C.

2. B ［解析］由题得 $a<0$ 且 $x_1=-\frac{1}{2}$ 和 $x_2=\frac{1}{3}$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+1=0$ 的两个根，所以 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{1}{a}$，即 $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{a}=-\frac{1}{6}$，解得 $a=-6$，$b=-1$. 故选 B.

3. C ［解析］因为 $0<t<1$，所以 $\frac{1}{t}>t$，故关于 x 的不等式 $(t-x)\left(x-\frac{1}{t}\right)>0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,t<x<\frac{1}{t}\right\}$. 故选 C.

4. C ［解析］由 $(x^2-2x-3)(x^2+4x+4)<0$，得 $(x-3)(x+1)(x+2)^2<0$，当 $x=-2$ 时，不等式显然不成立，当 $x\neq -2$ 时，$(x+2)^2>0$，所以原不等式即为 $(x-3)(x+1)<0$，解得 $-1<x<3$，故原不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<3\}$. 故选 C.

5. BCD ［解析］由题知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下，则 $a<0$，

故A错误；由题知一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根为-2和3，由根与系数的关系得$\begin{cases}-2+3=-\dfrac{b}{a},\\-2\times3=\dfrac{c}{a},\end{cases}$故$b=-a>0$，$c=-6a>0$，即$bc>0$，故B正确；$a+b=a-a=0$，故C正确；$a-b+c=a-(-a)+(-6a)=-4a>0$，故D正确．故选BCD.

6. $\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right)\cup[1,+\infty)$ ［解析］当$m^2-1=0$时，解得$m=1$或$m=-1$．若$m=1$，则不等式恒成立，满足题意；若$m=-1$，则不等式化为$-2x+1>0$，其解集不是$\mathbf{R}$，不满足题意．当$m\neq\pm1$时，由题得$\begin{cases}m^2-1>0,\\(m-1)^2-4(m^2-1)<0,\end{cases}$解得$m<-\dfrac{5}{3}$或$m>1$．综上，实数$m$的取值范围为$\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right)\cup[1,+\infty)$.

7. (15,20) ［解析］由题意得$[30-2(x-15)]\cdot x>400$，即$x^2-30x+200<0$，解得$10<x<20$，又因为$x>15$，所以$15<x<20$，即每盏台灯的售价x的取值范围是(15,20).

8. A ［解析］令$f(x)=x^2-2ax+1$，∵关于x的方程$x^2-2ax+1=0$的两根分别在(0,1)与(1,3)内，∴$\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)<0,\\f(3)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}1>0,\\2-2a<0,\\10-6a>0,\end{cases}$解得$1<a<\dfrac{5}{3}$．故选A.

9. D ［解析］关于x的不等式$x^2-ax+2>0$在区间[1,5]上有解，即$ax<2+x^2$对$x\in[1,5]$有解，即$a<\dfrac{2}{x}+x$对$x\in[1,5]$有解，所以当$x\in[1,5]$时，$a<\left(\dfrac{2}{x}+x\right)_{\max}$．设函数$f(x)=\dfrac{2}{x}+x$，$x\in[1,5]$，因为函数$f(x)$在区间$[1,\sqrt{2}]$上单调递减，在区间$[\sqrt{2},5]$上单调递增，且$f(1)=3$，$f(5)=\dfrac{27}{5}$，所以当$x=5$时，函数$f(x)$取得最大值，最大值为$\dfrac{27}{5}$，所以$a$的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{27}{5}\right)$．故选D.

10. C ［解析］当$m\in(0,+\infty)$时，$\dfrac{m^2+1}{m}=m+\dfrac{1}{m}\geqslant2$，当且仅当$m=1$时取等号，所以$[x]^2+[x]\leqslant2$，即$([x]+2)([x]-1)\leqslant0$，解得$-2\leqslant[x]\leqslant1$，所以$-2\leqslant x<2$，故选C.

11. AB ［解析］由题意可得$a<0$，$a(x-1)(x+3)-2=a(x-x_1)(x-x_2)$，即$ax^2+2ax-3a-2=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$，所以$\begin{cases}2a=-a(x_1+x_2),\\-3a-2=ax_1x_2,\end{cases}$则$x_1+x_2+2=0$，$x_1x_2+3=-\dfrac{2}{a}>0$，故A正确，D错误；令$a(x-1)(x+3)=0$，则其根为$x_3=-3$，$x_4=1$，结合二次函数的性质可得$-3<x_1<x_2<1$，$x_2-x_1<1-(-3)=4$，即$|x_1-x_2|<4$，故B正确，C错误．故选AB.

12. $(-\infty,4)\cup[8,+\infty)$ ［解析］因为关于x的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(-2,4)$，所以$a<0$，且关于x的方程$ax^2+bx+c=0$的两根为-2和4，所以$-\dfrac{b}{a}=-2+4=2$，$\dfrac{c}{a}=-2\times4=-8$，即$b=-2a$，$c=-8a$，则关于$x$的不等式$\dfrac{ax+c}{bx-c}\leqslant0$可化为$\dfrac{ax-8a}{-2ax+8a}\leqslant0$，即$\dfrac{x-8}{-2x+8}\leqslant0$，即$\dfrac{x-8}{4-x}\leqslant0$，解得$x<4$或$x\geqslant8$，故关于$x$的不等式$\dfrac{ax+c}{bx-c}\leqslant0$的解集为$(-\infty,4)\cup[8,+\infty)$.

13. (1,3) ［解析］由$(x-b)^2>(ax)^2$，得$(a^2-1)x^2+2bx-b^2<0$，即$[(a+1)x-b]\cdot[(a-1)x+b]<0$，∵不等式的解集中的整数恰有3个，∴$a>1$，∴不等式的解为$\dfrac{-b}{a-1}<x<\dfrac{b}{a+1}$，又$0<\dfrac{b}{a+1}<1$，∴解集中的整数是$-2,-1,0$，∴$-3\leqslant-\dfrac{b}{a-1}<-2$，∴$2<\dfrac{b}{a-1}\leqslant3$，∴$2a-2<b\leqslant3a-3$，又$b<1+a$，∴$2a-2<1+a$，∴$a<3$．综上，$a$的取值范围是(1,3).

14. 解：(1)当$a=1$，$b=6$时，$f(x)=x^2+4x+3$，令$f(x)=0$，得$x^2+4x+3=0$，解得$x_1=-1$，$x_2=-3$，所以函数$f(x)$的零点是-1和-3.

(2)因为不等式$ax^2+(b-2)x+3>0$的解集为$\{x|-1<x<1\}$，所以-1，1是关于x的方程$ax^2+(b-2)x+3=0$的两个实根，且$a<0$，

则$\begin{cases}-1+1=-\dfrac{b-2}{a},\\(-1)\times1=\dfrac{3}{a},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=2.\end{cases}$

15. 解：(1)当$a=-5$时，不等式$f(x)\leqslant-4$即为$4^x-5\cdot2^x+4\leqslant0$，

所以$(2^x-1)(2^x-4)\leqslant0$，则有$1\leqslant2^x\leqslant4$，则$0\leqslant x\leqslant2$，故不等式$f(x)\leqslant-4$的解集为$\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$.

(2)令$t=2^x$，$x\in[-2,2]$，则$t\in\left[\dfrac{1}{4},4\right]$，$g(t)=t^2+at$，其图象开口向上，对称轴方程为$t=-\dfrac{a}{2}$.

①当$-\dfrac{a}{2}<\dfrac{1}{4}$，即$a>-\dfrac{1}{2}$时，$g(t)$在$\left[\dfrac{1}{4},4\right]$上的最小值为$g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{16}+\dfrac{a}{4}=-1$，解得$a=-\dfrac{17}{4}$，不符合题意；

②当$\dfrac{1}{4}\leqslant-\dfrac{a}{2}\leqslant4$，即$-8\leqslant a\leqslant-\dfrac{1}{2}$时，$g(t)$在$\left[\dfrac{1}{4},4\right]$上的最小值为$g\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}=-1$，可得$a=-2$；

③当$-\dfrac{a}{2}>4$，即$a<-8$时，$g(t)$在$\left[\dfrac{1}{4},4\right]$上的最小值为$g(4)=16+4a=-1$，解得$a=-\dfrac{17}{4}$，不符合题意．

综上所述，a的值为-2.

16. D ［解析］∵$ax^3+bx^2+cx+d=0$($a\neq0$且$d\neq0$)有三个根x_1，x_2，x_3，∴$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$，即$a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2](x-x_3)=0$，即$ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-ax_1x_2x_3=0$，∴$-a(x_1+x_2+x_3)=b$，$a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=c$，$-ax_1x_2x_3=d$，即$x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}$，$x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$，∴$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=\dfrac{\dfrac{c}{a}}{-\dfrac{d}{a}}=-\dfrac{c}{d}$．故选D.

17. D ［解析］因为函数$f(x)=x^2-bx+c(b>0,c>0)$的两个零点分别为x_1，x_2，所以x_1，x_2是方程$x^2-bx+c=0$的两个不相等的实数根，则$x_1+x_2=b>0$，$x_1x_2=c>0$，所以$x_1>0$，$x_2>0$，不妨设$x_1<x_2$．因为x_1，x_2，-2三个数适当调整顺序后可构成等差数列，也可构成等比数列，所以-2，x_1，x_2或x_2，x_1，-2构成等差数列，x_1，-2，x_2或x_2，-2，x_1构成等比数列，所以$\begin{cases}-2+x_2=2x_1,\\x_1x_2=(-2)^2,\end{cases}$可得$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=4,\end{cases}$所以$b=1+4=5$，$c=1\times4=4$，不等式$\dfrac{x-b}{x-c}\leqslant0$即为$\dfrac{x-5}{x-4}\leqslant0$，等价于$\begin{cases}(x-5)(x-4)\leqslant0,\\x-4\neq0,\end{cases}$

解得$4<x\leqslant5$，因此，不等式的解集为(4,5]．故选D.

第二单元　函数

第6讲　函数的概念及其表示

1. A ［解析］∵函数$f(x)=\begin{cases}3x,x\geqslant0,\\f(x+3),x<0,\end{cases}$∴$f(-4)=f(-4+3)=f(-1)=f(-1+3)=f(2)=3\times2=6$．故选A.

2. C ［解析］根据函数的定义知，对于定义域内的任意自变量x，只能有唯一的y与之对应．选项A,B,D中，每一个x都有唯一的y与之对应，满足函数的定义，可以作为函数图象；选项C中，当$x>0$时，一个x有两个y与之对应，不满足函数的定义，不可以作为函数图象．故选C.

3. D ［解析］对于A，$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$g(x)$的定义域为$\{x|x\neq-1\}$，两函数的定义域不相同，故这两个函数不是同一个函数，所以A错误；对于B，$f(x)$，$g(x)$的定义域都为$\mathbf{R}$，$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，与$g(x)$的对应关系不同，故这两个函数不是同一个函数，所以B错误；对于C，$f(x)$，$g(x)$的定义域都为$\{x|x\leqslant0\}$，$f(x)=\sqrt{-x^3}=|x|\sqrt{-x}=-x\sqrt{-x}$，与$g(x)$的对应关系不同，故这两个函数不是同一个函数，所以C错误；对于D，因为$f(x)$，$g(s)$的定义域都为$\mathbf{R}$，且对应关系相同，故这两个函数是同一个函数，所以D正确．故选D.

4. B ［解析］令$t=1-x$，则$x=1-t$，又$x\neq0$，所以$t\neq1$，则$f(t)=\dfrac{1-(1-t)^2}{(1-t)^2}=\dfrac{1}{(t-1)^2}-1(t\neq1)$，所以$f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq1)$．故选B.

5. C ［解析］当$a=0$时，$f(x)=\sqrt{x+1}$，其值域为$[0,+\infty)$，满足题意；当$a\neq0$时，若$f(x)=\sqrt{ax^2+x+1}$的值域为$[0,+\infty)$，则$\begin{cases}a>0,\\\Delta=1^2-4a\geqslant0,\end{cases}$解得$0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$．综上，实数$a$的取值范围为$\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$．故选C.

6. $[-3,2]$ ［解析］令$x+a=t$，因为$x\in\mathbf{R}$，所以$t\in\mathbf{R}$，$y=f(x+a)=f(t)$，所以$y=f(t)$与$y=f(x)$为同一个函数，因此$y=f(t)$的值域为$[-3,2]$，即函数$y=f(x+a)$的值域为$[-3,2]$.

7. 1 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ ［解析］由题意可知$f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=f(1)=$

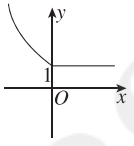
1. 当$|2x|<1$，即$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$时，$|x|<\frac{1}{2}<1$，由$f(x)<f(2x)$，可得$1<1$，不符合题意；当$\begin{cases}|2x|\geqslant 1,\\|x|<1,\end{cases}$即$x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right)$时，由$f(x)<f(2x)$，可得$1<(2x)^2$，解得$x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{1}{2}$，所以$x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$；当$|x|\geqslant 1$，即$x\geqslant 1$或$x\leqslant -1$时，$|2x|=2|x|\geqslant 2>1$，由$f(x)<f(2x)$，可得$x^2<(2x)^2=4x^2$，符合题意. 综上所述，不等式$f(x)<f(2x)$的解集是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

8. C ［解析］由题意可知函数$y=f(x+1)$的定义域为$[-2,3]$，即$-2\leqslant x\leqslant 3$，故$-1\leqslant x+1\leqslant 4$，则$y=f(x)$的定义域为$[-1,4]$. 要使$y=\frac{f(2x+1)}{\sqrt{x-1}}$有意义，则$\begin{cases}-1\leqslant 2x+1\leqslant 4,\\x-1>0,\end{cases}$解得$1<x\leqslant\frac{3}{2}$，所以$y=\frac{f(2x+1)}{\sqrt{x-1}}$的定义域为$\left(1,\frac{3}{2}\right]$. 故选C.

9. C ［解析］当$0<a<1$时，$a+1>1$，由$f(a)=f(a+1)$得$\sqrt{a}=2(a+1-1)=2a$，可得$a=\frac{1}{4}$，此时$f\left(\frac{1}{a}\right)=f(4)=2\times(4-1)=6$；当$a\geqslant 1$时，$a+1\geqslant 2$，由$f(a)=f(a+1)$得$2(a-1)=2(a+1-1)$，此时方程无解. 综上可知，$f\left(\frac{1}{a}\right)=6$，故选C.

10. D ［解析］设$t=e^{x-1}$，$t>0$，则$x=\ln t+1$，$\therefore f(t)=2\ln t+1$，$t>0$. 由$f(a)+f(b)=0$，得$2\ln a+1+2\ln b+1=0$，即$\ln(ab)=-1$，$\therefore ab=\frac{1}{e}$. 故选D.

11. D ［解析］$f(x)$的图象如图所示. 当$\begin{cases}x+1\leqslant 0,\\2x\leqslant 0,\end{cases}$即$x\leqslant -1$时，若满足$f(x+1)<f(2x)$，则$x+1>2x$，即$x<1$，此时$x\leqslant -1$；当$\begin{cases}x+1>0,\\2x<0,\end{cases}$即$-1<x<0$时，$f(x+1)<f(2x)$恒成立. 综上，$x$的取值范围是$(-\infty,0)$. 故选D.



12. AD ［解析］对于A，令$t=x^2(t\geqslant 0)$，则$f(t)=|\pm\sqrt{t}|=\sqrt{t}$，满足函数定义；对于B，令$t=x^2(t\geqslant 0)$，则$f(t)=\pm\sqrt{t}$，设$t=4$，则$f(4)=\pm 2$，一个自变量对应两个函数值，不满足函数定义；对于C，设$t=\cos x$，当$t=\frac{1}{2}$时，x可以取$\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}$等无数多个值，不满足函数定义；对于D，令$t=e^x(t>0)$，则$x=\ln t$，$f(t)=\ln t$，满足函数定义. 故选AD.

13. $y=2^x-3$，$x\in[1,2]$（答案不唯一） ［解析］由$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\2-x\geqslant 0,\end{cases}$解得$1\leqslant x\leqslant 2$，所以函数$f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}$的定义域为$[1,2]$，由题意可知$f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}$的值域为$[-1,1]$. 与$f(x)$的定义域、值域都相同的函数可以为$y=2^x-3$，$x\in[1,2]$.

14. $\{-1,\sqrt{2}\}$ ［解析］由题知，$y=\log_2|x|$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$. 当$x>0$时，原方程可化为$2\log_2 x+0=1$，即$\log_2 x=\frac{1}{2}$，则$x=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；当$x<0$时，原方程可化为$0+2\times 2^x=1$，即$2^{x+1}=1=2^0$，则$x+1=0$，解得$x=-1$. 故所求集合为$\{-1,\sqrt{2}\}$.

15. AB ［解析］设当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)$的取值范围为N，则$N\subseteq M$. 当$a=\frac{1}{4}$时，$f(x)=f\left(\frac{3x}{4x^2+1}\right)$，令$t(x)=\frac{3x}{4x^2+1}$，当$x\in(1,+\infty)$时，$t(x)=\frac{3}{4x+\frac{1}{x}}\in\left(0,\frac{3}{5}\right)\subseteq[0,1]$，满足条件；当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=f\left(\frac{3x}{2x^2+1}\right)$，令$m(x)=\frac{3x}{2x^2+1}$，当$x\in(1,+\infty)$时，$m(x)=\frac{3}{2x+\frac{1}{x}}\in(0,1)\subseteq[0,1]$，满足条件；当$a=\frac{3}{4}$时，$f(x)=f\left(\frac{9x}{4x^2+3}\right)$，令$n(x)=\frac{9x}{4x^2+3}$，当$x\in(1,+\infty)$时，$n(x)\in\left(0,\frac{9}{7}\right)\not\subseteq[0,1]$，不满足条件；当$a=1$时，$f(x)=f\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)$，令$g(x)=\frac{3x}{x^2+1}$，当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)\in\left(0,\frac{3}{2}\right)\not\subseteq[0,1]$，不满足条件. 故选AB.

第7讲　函数的单调性

1. C ［解析］对于A，因为$u=\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递增，$y=-u$在$\mathbf{R}$上单调递减，所以$f(x)=-\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递减，故A错误；对于B，因为$u=2^x$在$(0,+\infty)$上单调递增，$y=\frac{1}{u}$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以$f(x)=\frac{1}{2^x}$在$(0,+\infty)$上单调递减，故B错误；对于C，因为$u=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减，$y=-u$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以$f(x)=-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，故C正确；对于D，因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\left|\frac{1}{2}-1\right|}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$f(1)=3^{|1-1|}=3^0=1$，$f(2)=3^{|2-1|}=3$，所以$f(x)=3^{|x-1|}$在$(0,+\infty)$上不单调，故D错误. 故选C.

2. D ［解析］因为$f(x)=|x-1|+|x-2|=\begin{cases}3-2x,x<1,\\1,1\leqslant x<2,\\2x-3,x\geqslant 2,\end{cases}$所以$f(x)$的单调递增区间为$[2,+\infty)$，故选D.

3. B ［解析］由题知函数$y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上是减函数，则有$\begin{cases}-1<2a-1<1,\\-1<1-a<1,\\2a-1>1-a,\end{cases}$解得$\frac{2}{3}<a<1$，故选B.

4. D ［解析］因为函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-5,x\leqslant 1,\\\frac{a}{x},x>1\end{cases}$是$\mathbf{R}$上的增函数，所以$\begin{cases}-\frac{a}{2}\geqslant 1,\\a<0,\\-1-a-5\leqslant a,\end{cases}$解得$-3\leqslant a\leqslant -2$. 故选D.

5. D ［解析］当$0<a<1$时，函数$y=a^x-1$单调递减，$a-1<0$，故$f(x)=\frac{a-1}{a^x-1}+b(a>0,a\neq 1)$单调递减；当$a>1$时，函数$y=a^x-1$单调递增，$a-1>0$，故$f(x)=\frac{a-1}{a^x-1}+b(a>0,a\neq 1)$单调递减. 所以函数$f(x)$的单调性与$a$无关，且与$b$无关. 故选D.

6. x　x^3（答案不唯一） ［解析］设$f(x)=x$，$g(x)=x^3$，两个函数的定义域均为$\mathbf{R}$，且均为增函数，$f(x)\cdot g(x)=x^4$不是增函数，符合题意.

7. $\left(-\infty,\frac{7}{2}\right]$ ［解析］令$u=x^2-ax+3$，因为函数$y=\log_{\frac{1}{2}}u$在$(0,+\infty)$上为减函数，函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+3)$在$(2,3)$上单调递减，所以函数$u=x^2-ax+3$在$(2,3)$上单调递增，所以$\frac{a}{2}\leqslant 2$，解得$a\leqslant 4$，且$u>0$对任意$x\in(2,3)$恒成立，则$4-2a+3=7-2a\geqslant 0$，解得$a\leqslant\frac{7}{2}$，所以$a$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{7}{2}\right]$.

8. D ［解析］对于A选项，若$f(x)=x$，则$y=\frac{1}{|f(x)|}=\frac{1}{|x|}$，在$\mathbf{R}$上不是减函数，故A错误；对于B选项，若$f(x)=x$，则$y=|f(x)|=|x|$，在$\mathbf{R}$上不是增函数，故B错误；对于C选项，若$f(x)=x$，则$y=-\frac{1}{f(x)}=-\frac{1}{x}$，在$\mathbf{R}$上不是增函数，故C错误；对于D选项，函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数，则对于任意的$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，设$x_1<x_2$，必有$f(x_1)<f(x_2)$，即$f(x_1)-f(x_2)<0$，对于$y=-f(x)$，则有$[-f(x_1)]-[-f(x_2)]=-[f(x_1)-f(x_2)]>0$，则$y=-f(x)$在$\mathbf{R}$上为减函数，故D正确. 故选D.

9. D ［解析］函数$f(x)=e^x+4x+1$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(x)$是增函数，因为$\ln 4>\ln 3>1$，所以$f(\ln 4)>f(\ln 3)>f(1)$，即$a>b>c$. 故选D.

10. C ［解析］函数$y=\log_3 x$在$(0,+\infty)$上单调递增，则由$\log_3(3a+2)>\log_3(4a+1)$，得$3a+2>4a+1$，所以$0<a<1$. 由$a^x-a^y<x-y$，得$a^x-x<a^y-y$，构造函数$h(t)=a^t-t$，因为$0<a<1$，所以$y=a^t$是$\mathbf{R}$上的减函数，又$y=t$在$\mathbf{R}$上为增函数，所以$h(t)$在$\mathbf{R}$上单调递减，所以$x>y$，即$x-y>0$. 故选C.

11. BCD ［解析］对于A，B，当$a=1$时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3}$，因为$y=x^2-4x+3$在$(2,+\infty)$上单调递增，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在$\mathbf{R}$上单调递减，所以由复合函数的单调性可得，函数$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3}$在$(2,+\infty)$上单调递减，故A错误，B正确. 对于C，显然当$a=0$时，$f(x)$没有最大值；当$a\neq 0$时，若$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{ax^2-4x+3}$有最大值2，则函数$y=ax^2-4x+3=a\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+3-\frac{4}{a}$有最小值$-1$，所以$\begin{cases}a>0,\\3-\frac{4}{a}=-1,\end{cases}$解得$a=1$，故C正确. 对于D，若函数$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{ax^2-4x+3}$在$(-\infty,2)$上单调递增，则$y=ax^2-4x+3$在$(-\infty,2)$上单调递减. 当$a=0$时，显然成立；当$a\neq 0$时，由二次函数的性质可得$\begin{cases}a>0,\\\frac{2}{a}\geqslant 2,\end{cases}$解得$0<a\leqslant 1$，所以$a$的取值范围为$[0,1]$，故D正确. 故选BCD.

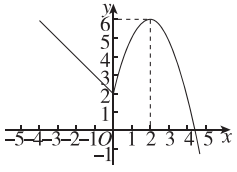
12. $f(x)=\lg x$（答案不唯一） ［解析］由

当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，总有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，得函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增；由当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，总有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 成立，得函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是凸函数. 故 $f(x)$ 的解析式可以是 $f(x)=\lg x$.

13. 10 ［解析］因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，所以存在唯一的 $t\in\mathbf{R}$，使得 $f(t)=10$，则 $f(x)-2^x-2x=t$，即 $f(x)=2^x+2x+t$，令 $x=t$，则 $f(t)=2^t+3t=10$. 因为函数 $y=2^t+3t$ 为增函数，且 $2^2+3\times2=10$，所以 $t=2$，则 $f(x)=2^x+2x+2$. 易知 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 $f(2)=10$.

14. 解：(1) 因为 $\begin{cases}f(1)=5,\\f(2)=6,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-1+b+c=5,\\-4+2b+c=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=4,\\c=2,\end{cases}$ 所以 $f(x)=\begin{cases}2-x,x<0,\\-x^2+4x+2,x\geqslant0.\end{cases}$

(2) 由(1)知 $f(x)=\begin{cases}2-x,x<0,\\-(x-2)^2+6,x\geqslant0,\end{cases}$ 画出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示.



由图可知，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0)$，$[2,+\infty)$，单调递增区间是 $[0,2)$.

15. 解：(1) 证明：任取 $x_1>x_2$，令 $x=x_2-x_1$，$y=x_1$，则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)-2$，而 $x_2-x_1<0$，

$\therefore f(x_2-x_1)-2<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$，$\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(2) 由题意，原不等式可转化为 $f[(\log_a x)^2]+f(\log_a x-3)\geqslant3$，

即 $f[(\log_a x)^2+\log_a x-3]\geqslant1$.

当 $x=y=0$ 时，$f(0)-2=f(0)-f(0)=0$，即 $f(0)=2$，当 $x=-1$，$y=1$ 时，$f(-1)+f(1)=2+f(0)=4$，

又 $f(1)=3$，$\therefore f(-1)=1$，

$\therefore f[(\log_a x)^2+\log_a x-3]\geqslant f(-1)$，

$\therefore (\log_a x)^2+\log_a x-3\geqslant-1$，

$\therefore (\log_a x)^2+\log_a x-2\geqslant0$，解得 $\log_a x\geqslant1$ 或 $\log_a x\leqslant-2$.

当 $0<a<1$ 时，可得 $0<x\leqslant a$ 或 $x\geqslant\frac{1}{a^2}$；当 $a>1$ 时，可得 $x\geqslant a$ 或 $0<x\leqslant\frac{1}{a^2}$. 故当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $(0,a]\cup\left[\frac{1}{a^2},+\infty\right)$；当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left(0,\frac{1}{a^2}\right]\cup[a,+\infty)$.

16. B ［解析］由 $(x_2-x_1)\cdot\left[f(x_2)-f(x_1)+2\ln\frac{x_1}{x_2}\right]<0$，可得 $(x_2-x_1)\cdot\{f(x_2)-2\ln x_2-[f(x_1)-2\ln x_1]\}<0$，令 $g(x)=f(x)-2\ln x$，可得 $(x_2-x_1)\cdot[g(x_2)-g(x_1)]<0$，即对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，都有 $(x_2-x_1)\cdot[g(x_2)-g(x_1)]<0$，所以函数 $g(x)=f(x)-2\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. $f(x-2022)>2\ln(2x-4044)$ 等价于 $f(x-2022)>2\ln(x-2022)+2\ln2$，即 $f(x-2022)-2\ln(x-2022)>2\ln2$，可得 $g(x-2022)>2\ln2$，又 $f(2)=4\ln2$，所以 $g(2)=f(2)-2\ln2=2\ln2$，所以 $g(x-2022)>2\ln2$ 等价于 $g(x-2022)>g(2)$，因此可得 $0<x-2022<2$，解得 $2022<x<2024$，则 x 的取值范围是 $(2022,2024)$. 故选 B.

17. BCD ［解析］对于 A，因为 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2=2\sqrt{6}-1>0$，所以 $2^{\frac12}+3^{\frac12}>6^{\frac12}$，则 $f\left(\frac12\right)=\log_6(2^{\frac12}+3^{\frac12})>\log_6 6^{\frac12}=\frac12$. 由 $2^{\frac12}+3^{\frac12}>6^{\frac12}$ 得 $6^{\frac12}-2^{\frac12}<3^{\frac12}$，则 $g\left(\frac12\right)=\log_3(6^{\frac12}-2^{\frac12})<\log_3 3^{\frac12}=\frac12$，所以 $f\left(\frac12\right)>\frac12>g\left(\frac12\right)$，即 $f\left(\frac12\right)>g\left(\frac12\right)$，所以 A 不正确. 对于 B，令 $h(x)=2^x+3^x-6^x=6^x\left[\left(\frac13\right)^x+\left(\frac12\right)^x-1\right]$，因为函数 $\varphi(x)=\left(\frac13\right)^x+\left(\frac12\right)^x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，$\varphi(0)=1>0$，$\varphi(1)=-\frac16<0$，所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，当 $x<x_0$ 时，$\varphi(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$\varphi(x)<0$，又 $6^x>0$，所以当 $x<x_0$ 时，$h(x)>0$，即 $2^x+3^x-6^x>0$，当 $x>x_0$ 时，$h(x)<0$，即 $2^x+3^x-6^x<0$. 因为 $h(x_0)=0$，即 $2^{x_0}+3^{x_0}-6^{x_0}=0$，所以 $f(x_0)=\log_6(2^{x_0}+3^{x_0})=\log_6 6^{x_0}=x_0$，$g(x_0)=\log_3(6^{x_0}-2^{x_0})=\log_3 3^{x_0}=x_0$，所以 $f(x_0)=g(x_0)=x_0$，当 $t=x_0$ 时，$f(t)=g(t)=t$，所以 B 正确. 对于 C，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$2^x+3^x-6^x<0$，即 $2^x+3^x<6^x$，所以 $f(x)=\log_6(2^x+3^x)<\log_6 6^x=x$，由 $2^x+3^x-6^x<0$ 得 $6^x-2^x>3^x$，所以 $g(x)=\log_3(6^x-2^x)>\log_3 3^x=x$，所以当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f(x)<x<g(x)$，即 $f(x)<g(x)$，又 $x_0\in(0,1)$，所以对任意的 $x\in(1,+\infty)$，都有 $f(x)<g(x)$，所以 C 正确. 对于 D，因为 $f(x)=\log_6(2^x+3^x)$，所以 $6^{f(x)}=2^x+3^x$ ①. 因为 $g(x)=\log_3(6^x-2^x)$，所以 $3^{g(x)}=6^x-2^x$ ②. ①+② 得 $6^{f(x)}+3^{g(x)}=3^x+6^x$，即 $6^{f(x)}-6^x=3^x-3^{g(x)}$. 当 $x=x_0$ 时，$f(x_0)=g(x_0)=x_0$，满足 $|x-f(x)|=|g(x)-x|$；当 $0<x<x_0$ 时，结合上述分析可得 $f(x)>x>g(x)$，因为 $6^{f(x)}-6^x=3^x-3^{g(x)}$，所以 $6^x[6^{f(x)-x}-1]=3^{g(x)}[3^{x-g(x)}-1]$ ③，易知 $6^{f(x)-x}-1>0$，$3^{x-g(x)}-1>0$，又 $3^{g(x)}=6^x-2^x$，所以 $6^x>3^{g(x)}$，结合③式得 $6^{f(x)-x}-1<3^{x-g(x)}-1$，即 $6^{f(x)-x}<3^{x-g(x)}$，所以 $0<f(x)-x<x-g(x)$，满足 $|x-f(x)|<|g(x)-x|$；当 $x>x_0$ 时，$f(x)<x<g(x)$，由 $6^{f(x)}-6^x=3^x-3^{g(x)}$，得 $6^{f(x)}[1-6^{x-f(x)}]=3^x[1-3^{g(x)-x}]$，即 $6^{f(x)}[6^{x-f(x)}-1]=3^x[3^{g(x)-x}-1]$，同理可得 $0<x-f(x)<g(x)-x$，满足 $|x-f(x)|<|g(x)-x|$. 所以 D 正确. 故选 BCD.

增分微练 1　函数的值域与最值

1. B ［解析］$y=2^x$ 的值域为 $(0,+\infty)$，故 A 错误；$y=x^{\frac12}=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，值域也是 $[0,+\infty)$，故 B 正确；$y=\tan x$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$，故 C 错误；$y=\cos x$ 的值域为 $[-1,1]$，故 D 错误. 故选 B.

2. B ［解析］因为 $g(x)=\frac{2x-1}{x}=2+\frac{-1}{x}$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac12,2\right]$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac12\right)=2+\frac{-1}{\frac12}=0$. 故选 B.

3. B ［解析］当 $x\in[-1,0]$ 时，函数 $y=x^2$ 单调递减，$y\in[0,1]$；当 $x\in(0,1]$ 时，函数 $y=\frac1x$ 单调递减，$y\geqslant1$. 综上所述，$y\geqslant0$，所以 $f(x)$ 的最小值为 0，无最大值. 故选 B.

4. D ［解析］易知 $f(x)=\frac{2x}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}$，所以 $f(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上单调递减，所以 $M=f(3)=2+\frac{4}{3-2}=6$，$m=f(4)=2+\frac{4}{4-2}=4$，所以 $\frac{m^2}{M}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$. 故选 D.

5. D ［解析］令 $t=x^2-2x$，则 $y=\left(\frac12\right)^t$，$\because t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant-1$，$\therefore y=\left(\frac12\right)^t\in(0,2]$，$\therefore$ 函数 $y=\left(\frac12\right)^{x^2-2x}$ 的值域为 $(0,2]$. 故选 D.

6. $\frac52$ ［解析］$y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，令 $\sqrt{x^2+4}=t(t\geqslant2)$，则 $y=t+\frac1t$，$\because y=t+\frac1t$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 当 $t=2$，即 $x=0$ 时，$y_{\min}=\frac52$.

7. 3 ［解析］$\because y=\left(\frac13\right)^x$ 和 $y=-\log_2(x+2)$ 在区间 $[-1,1]$ 上都单调递减，$\therefore f(x)=\left(\frac13\right)^x-\log_2(x+2)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 $f(-1)=3$.

8. B ［解析］令 $f(x)=t$，则 $t\in\left[\frac12,3\right]$，函数 $F(x)$ 化为 $y=t+\frac1t$. 当 $t\in\left[\frac12,1\right)$ 时，$y=t+\frac1t$ 单调递减，当 $t\in[1,3]$ 时，$y=t+\frac1t$ 单调递增，又当 $t=\frac12$ 时，$y=\frac52$，当 $t=1$ 时，$y=2$，当 $t=3$ 时，$y=\frac{10}{3}$，所以函数 $F(x)$ 的值域为 $\left[2,\frac{10}{3}\right]$. 故选 B.

9. D ［解析］由 $\begin{cases}x-1\geqslant0,\\x-3\geqslant0,\end{cases}$ 得 $x\geqslant3$，$\therefore$ 函数 $y=\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}$ 的定义域为 $[3,+\infty)$，$y=\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}=\frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}}$ 在定义域 $[3,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore$ 当 $x=3$ 时函数取得最大值 $\sqrt2$，且 $\sqrt{x-1}>\sqrt{x-3}$，即 $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}>0$，$\therefore$ 该函数的值域为 $(0,\sqrt2]$，故 A 错误；$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})^2}{2}\leqslant(\sqrt{x})^2+(\sqrt{4-x})^2=4$，则 $\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\leqslant2\sqrt2$，当且仅当 $\sqrt{x}=\sqrt{4-x}$，即 $x=2$ 时等号成立，故 B 错误；由 $x^2-2x-3>0$，得 $x>3$ 或 $x<-1$，$\therefore y=\lg(x^2-2x-3)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，根据复合函数的单调性可知 $y=\lg(x^2-2x-3)$ 的单调递增区间为 $(3,+\infty)$，故 C 错误；$y=\frac{\sin x}{2-\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x-2}$，$\frac{\sin x}{\cos x-2}$ 可

以理解为以原点 O 为圆心，半径为 1 的圆 O 上的动点 $P(\cos x,\sin x)$ 与定点 $A(2,0)$ 所构成直线 PA 的斜率，直线 PA 与圆 O 相切时，$\dfrac{\sin x}{\cos x-2}$ 取到最值，易知，当直线 PA 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\dfrac{\sin x}{\cos x-2}$ 最大，最大为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴函数 $y=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ 的最小值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确. 故选 D.

10. A ［解析］当 $x=0$ 时，$f(0)=a^2$，因为 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，所以 $a\leqslant 0$，且 $a^2\leqslant x+\dfrac{1}{x}+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 又 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\times\dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，所以 $a^2\leqslant 2+a$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$. 综上，a 的取值范围为 $[-1,0]$. 故选 A.

11. BC ［解析］对于 A，$f(x)=\dfrac{3+x}{4-x}=\dfrac{-(4-x)+7}{4-x}=-1+\dfrac{7}{4-x}$，由于 $\dfrac{7}{4-x}\neq 0$，所以 $f(x)\neq -1$，$|f(x)|\in[0,+\infty)$，故 $f(x)=\dfrac{3+x}{4-x}$ 不是“有界函数”；对于 B，令 $s=4-x^2$，$s\geqslant 0$，则 $y=\sqrt{s}$，因为 $s=4-x^2$ 在 $x=0$ 处取得最大值 4，所以 $s\in[0,4]$，即 $y=\sqrt{s}\in[0,2]$，则 $|f(x)|\leqslant 2$，故 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 是“有界函数”；对于 C，令 $y=2x^2-4x+3$ $(y\neq 0)$，当 $x=-\dfrac{-4}{2\times 2}=1$ 时，函数 $y=2x^2-4x+3(y\neq 0)$ 取得最小值 $2\times 1^2-4\times 1+3=1$，即 $2x^2-4x+3\geqslant 1$，所以 $0<\dfrac{5}{2x^2-4x+3}\leqslant 5$，所以 $|f(x)|\leqslant 5$，故函数 $f(x)=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$ 是“有界函数”；对于 D，令 $t=\sqrt{4-x}$，$t\geqslant 0$，则 $x=4-t^2$，即 $y=-t^2+t+4$，$t\geqslant 0$，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，$y_{\max}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{17}{4}$，无最小值，即 $f(x)\leqslant\dfrac{17}{4}$，则 $|f(x)|\in[0,+\infty)$，故 $f(x)=x+\sqrt{4-x}$ 不是“有界函数”. 故选 BC.

12. $[1,3\sqrt{2}+4]$ ［解析］由 $9-x^2\geqslant 0$，得 $-3\leqslant x\leqslant 3$. 令 $x=3\cos\theta$，$\theta\in[0,\pi]$，则 $y=3\cos\theta+4+3\sin\theta=3\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+4$. 因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$，所以 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以 $1\leqslant y\leqslant 3\sqrt{2}+4$，所以函数 $y=x+4+\sqrt{9-x^2}$ 的值域为 $[1,3\sqrt{2}+4]$.

13. $\left[\dfrac{7}{9},\dfrac{7}{8}\right]$ ［解析］∵ $\dfrac{3}{8}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{4}{9}$，∴ $\dfrac{1}{3}\leqslant\sqrt{1-2f(x)}\leqslant\dfrac{1}{2}$. 令 $t=\sqrt{1-2f(x)}$，则 $f(x)=\dfrac{1}{2}(1-t^2)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$，则 $y=\dfrac{1}{2}(1-t^2)+t$，即 $y=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+1\left(\dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$，∴当 $t=\dfrac{1}{3}$ 时，y 取得最小值 $\dfrac{7}{9}$，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，y 取得最大值 $\dfrac{7}{8}$，∴$g(x)$ 的值域为 $\left[\dfrac{7}{9},\dfrac{7}{8}\right]$.

14. $3+2\sqrt{2}$ ［解析］因为实数 a,b 满足 $\lg a+\lg b=\lg(a+2b)$，所以 $a>0,b>0$，且 $ab=a+2b$. 令 $u=a+b$，则 $u>0$，所以 $a=u-b$，代入 $ab=a+2b$，得 $(u-b)b=u-b+2b$，所以关于 b 的一元二次方程 $b^2-(u-1)b+u=0$ 有正根，只需 $u-1>0$ 且 $\Delta=(u-1)^2-4u\geqslant 0$，可得 $u\geqslant 3+2\sqrt{2}$，即 $a+b$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$（此时 $\Delta=0$，解得 $a=2+\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$）.

15. -2（答案不唯一） ［解析］函数 $f(x)=m+\sqrt{x+2}$ 的定义域为 $[-2,+\infty)$，显然 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增，依题意，$b>a\geqslant -2$，$\begin{cases}f(a)=a,\\ f(b)=b,\end{cases}$ 因此方程 $f(x)=x$，即 $x-\sqrt{x+2}-m=0$ 在 $[-2,+\infty)$ 上有两个不等实根，令 $\sqrt{x+2}=t\geqslant 0$，则方程 $t^2-t-m-2=0$ 有两个不等的非负实根 t_1,t_2，则 $\begin{cases}\Delta=1+4(m+2)>0,\\ t_1+t_2=1>0,\\ t_1t_2=-m-2\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{9}{4}<m\leqslant -2$，所以符合条件的 m 的值可以为 -2.

第 8 讲　函数的奇偶性、对称性

1. A ［解析］对于 A 选项，$y=3x$ 为奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 A 正确；对于 B 选项，$y=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递减，故 B 错误；对于 C 选项，$y=2x^2$ 是偶函数，故 C 错误；对于 D 选项，$y=-\dfrac{1}{3}x$ 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故 D 错误. 故选 A.

2. B ［解析］因为 $f(x)=ax^2+bx$ 是定义在 $[a-1,2a]$ 上的偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，且 $a-1=-2a$，所以 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=0$，所以 $a+b=\dfrac{1}{3}$. 故选 B.

3. B ［解析］取 $f(x)=x(x-1)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(0)=0$，但 $f(1)=0$，$f(-1)=2$，即 $f(-1)\neq -f(1)$，所以函数 $f(x)$ 不是奇函数，故充分性不成立；若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=-f(-0)$，即 $f(0)=0$，故必要性成立. 所以“$f(0)=0$”是“函数 $f(x)$ 为奇函数”的必要不充分条件. 故选 B.

4. A ［解析］因为函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，故 $f(x)=f(-x)=3^{-x}-x+1=\dfrac{1}{3^x}-x+1$. 故选 A.

5. B ［解析］因为 $f(ax-1)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(ax-1)=f[a(4-x)-1]$，又 $f(1)=f(5)$，所以 $\begin{cases}ax-1=1,\\ -ax+4a-1=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ax-1=5,\\ -ax+4a-1=1,\end{cases}$ 解得 $a=2$. 故选 B.

6. D ［解析］方法一：因为 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，所以 $f(x)-f(-x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}-\dfrac{(-x)e^{-x}}{e^{-ax}-1}=\dfrac{x[e^x-e^{(a-1)x}]}{e^{ax}-1}=0$，又因为 x 不恒为 0，所以 $e^x-e^{(a-1)x}=0$，即 $e^x=e^{(a-1)x}$，则 $x=(a-1)x$，即 $1=a-1$，解得 $a=2$. 故选 D.

方法二：因为 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，所以 $f(1)=f(-1)$，即 $\dfrac{e}{e^a-1}=-\dfrac{e^{-1}}{e^{-a}-1}$，解得 $a=2$，经检验符合题意. 故选 D.

方法三：由题设，可知 $f(x)=x\cdot\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$，且 $y=x$ 为奇函数，则 $g(x)=\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$ 为奇函数，由 $g(x)+g(-x)=0$，解得 $a=2$. 故选 D.

7. $(1,1)$ ［解析］因为函数 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(x+1)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，函数 $y=f(x+1)$ 的图象向右平移一个单位得到函数 $y=f(x)$ 的图象，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，函数 $y=f(x)$ 的图象向上平移一个单位得到函数 $y=f(x)+1$ 的图象，所以函数 $y=f(x)+1$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称.

8. B ［解析］$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}+\dfrac{x}{x^2+1}=1+\dfrac{x}{x^2+1}$，令 $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，则其定义域为 $\mathbf{R}$，又 $g(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}=-g(x)$，所以 $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 为奇函数，则 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$，所以 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=g(x)_{\max}+1+g(x)_{\min}+1=2$，则 $M+N=2$. 故选 B.

9. D ［解析］当 $\lambda=1$ 时，$f(x)=a^x+a^{-x}$，当 $a>1$ 或 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 不正确；当 $\lambda=-1$ 时，$f(x)=a^x-a^{-x}$，当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，故 B 不正确；当 $\lambda=1$ 时，$f(x)=a^x+a^{-x}$，$f(-x)=a^x+a^{-x}=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数，故 C 不正确；当 $\lambda=1$ 时，$f(x)=a^x+a^{-x}$，$f(-x)=a^x+a^{-x}=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数，故 D 正确. 故选 D.

10. B ［解析］由题意知，$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，当 $x>0$ 时，$-x<0$，$g(x)=f(x)$，则 $g(-x)=f[-(-x)]=f(x)=g(x)$，当 $x=0$ 时，$g(0)=f(0)=g(-0)$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，$g(x)=f(-x)$，则 $g(-x)=f(-x)=g(x)$，故 $g(x)$ 为偶函数，又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，∴$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，∵$g(4-m)>g(m)$，∴$g(|4-m|)>g(|m|)$，即 $|4-m|<|m|$，解得 $m>2$. 故选 B.

11. C ［解析］令 $g(x)=\log_2(2^x+2^{-x})$，其定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $g(-x)=\log_2(2^{-x}+2^x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数，由题易知 $f(x)$ 也为偶函数. 因为两个函数图象的交点个数为奇数，所以 $f(0)=g(0)=\log_2(2^0+2^{-0})=1$. 故选 C.

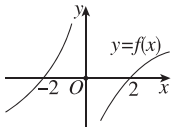
12. ACD ［解析］对于 A，由题得 $2f(-x)+f(x^2-1)=1$，所以 $f(-x)=f(x)=\dfrac{1-f(x^2-1)}{2}$，故 A 正确；对于 B，令 $x=1$，则 $2f(1)+f(0)=1$，令 $x=0$，则 $2f(0)+f(1)=1$，解得 $f(0)=f(1)=\dfrac{1}{3}$，令 $x=\sqrt{2}$，则 $2f(\sqrt{2})+f(1)=1$，则 $f(\sqrt{2})=\dfrac{1}{3}$，故 B 错误；对于 C，由 A 知，$f(-x)=f(x)$，所以 $f(-1)=f(1)=\dfrac{1}{3}$，故 C 正确；对于 D，令 $x=x^2-1$，则 $x^2-x-1=0$，解得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，令 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，则 $2f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=1$，所以 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$，因为 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，$f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=f(\sqrt{2})=\dfrac{1}{3}$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 上不单调，故 D 正确. 故选 ACD.

13. AD ［解析］因为 $f(x+2)$ 为奇函数，所以 $f(x+2)=-f(-x+2)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，故 B 错误，D 正确. 因为 $f(2x+1)$ 为偶函数，所以 $f(2x+1)=f(-2x+1)$，所以函

数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故 A 正确，C 错误. 故选 AD.

14. $-\frac{1}{2}$ ［解析］设点 $P(x,y)$ 在函数 $y=f(1-x)$ 的图象上，点 P 关于直线 $x=m$ 的对称点为 $Q(x',y')$，则 $\begin{cases}x+x'=2m,\\y=y',\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=2m-x',\\y=y',\end{cases}$ 则 $y'=f(1-2m+x')$，即 $y=f(1-2m+x)$ 的图象与 $y=f(1-x)$ 的图象关于直线 $x=m$ 对称，则 $1-2m=2$，解得 $m=-\frac{1}{2}$.

15. $(-2,0)\cup(0,2)$ ［解析］因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)$，则 $\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=\frac{f(x)}{x}<0$，即 x 和 $f(x)$ 异号，故 $\begin{cases}x>0,\\f(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)>0.\end{cases}$ 由 $f(-2)=0$，可得 $f(2)=0$，因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增，画出函数 $f(x)$ 的大致图象如图. 由图可得原不等式的解集为 $(-2,0)\cup(0,2)$.



16. B ［解析］因为函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，即 $f(x)$ 为奇函数. 令 $g(x)=xf(x)$，因为对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，都有 $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}>0$ $(x_1\neq x_2)$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 因为 $f(1)=4$，所以 $g(1)=4$，当 $x>0$ 时，$f(x)>\frac{4}{x}$ 化为 $xf(x)>4$，即 $g(x)>g(1)$，所以 $x>1$；当 $x<0$ 时，$f(x)>\frac{4}{x}$ 化为 $xf(x)<4$，因为 $g(x)=xf(x)$ 为偶函数，$g(-1)=g(1)=4$，所以 $xf(x)<4$ 化为 $g(x)<g(-1)$，所以 $-1<x<0$. 综上所述，不等式 $f(x)>\frac{4}{x}$ 的解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$. 故选 B.

17. AD ［解析］对于 A，当 $n=1$ 时，$f_1(x)=\frac{1+x}{1-x}$，所以 $f_1(a)+f_1(b)=\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}=\frac{2-2ab}{(1-a)(1-b)}=0$，所以 $ab=1$ 且 $a\neq1,b\neq1$，故 A 正确；对于 B，当 $n=2$ 时，$f_2(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$，所以 $f_2(a)+f_2(b)=\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2}=\frac{2-2(ab)^2}{(1-a^2)(1-b^2)}=0$，解得 $ab=\pm1$ 且 $a\neq\pm1,b\neq\pm1$，故 B 错误；对于 C，当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$f_n(-x)=\frac{1+(-x)^n}{1-(-x)^n}=\frac{1-x^n}{1+x^n}\neq f_n(x)$，故 C 错误；对于 D，$f'_n(x)=\frac{2nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'_n(x)=\frac{2nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}>0$，所以 $f_n(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 D 正确. 故选 AD.

第 9 讲　函数的四性质的应用

1. D ［解析］对于 A 选项，由二次函数的性质可知 $y=x^2$ 不是周期函数，A 错误. 对于 B 选项，由指数函数的性质可知 $y=2^x$ 不是周期函数，B 错误. 对于 C 选项，由一次函数的性质可知 $y=x\cos x$ 不是周期函数，C 错误. 对于 D 选项，由正弦函数的性质可知 $y=\sin x$ 是周期函数，D 正确. 故选 D.

2. D ［解析］$\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 3 的函数，当 $x\in[-2,1)$ 时，$f(x)=\begin{cases}4x^2-2,-2\leqslant x\leqslant0,\\x,0<x<1,\end{cases}$ $\therefore f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2=-1$. 故选 D.

3. C ［解析］当 $x\in[-2,-1]$ 时，$x+4\in[2,3]$，因为 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，所以 $f(x)=f(x+4)=x+4=3+(x+1)$；当 $x\in[-1,0]$ 时，$2-x\in[2,3]$，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)=f(2-x)=2-x=3-(x+1)$. 综上，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=3-|x+1|$，故选 C.

4. D ［解析］由题得 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 6 的函数，所以 $f(2023)=f(337\times6+1)=f(1)=f(-2+3)=-f(-2)=-\left[2^{-2}+\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 D.

5. ABD ［解析］因为 $y=f(x-1)$ 为奇函数，所以 $y=f(x-1)$ 的图象关于原点对称，故 D 正确；$f(x-1)+f(-x-1)=0$，故 B 正确，C 错误；由 $f(x-1)+f(-x-1)=0$ 可知函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，故 A 正确. 故选 ABD.

6. 4 ［解析］由 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，得 $f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，所以 $f(2025)=f(4\times506+1)=f(1)=4$.

7. 7 ［解析］因为 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=2-f\left(\frac{1}{2}-x\right)$，所以当 $x=\frac{3}{8}$ 时，$f\left(\frac{7}{8}\right)+f\left(\frac{1}{8}\right)=2$，当 $x=\frac{2}{8}$ 时，$f\left(\frac{6}{8}\right)+f\left(\frac{2}{8}\right)=2$，即 $f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)=2$，当 $x=\frac{1}{8}$ 时，$f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)=2$，当 $x=0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$，即 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$\therefore f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)=7$.

8. A ［解析］由题意可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(1+x)+f(1-x)=f(x)$，所以 $f(1-x)+f(1+x)=f(-x)$，可得 $f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数. 由 $f(1+x)+f(1-x)=f(x)$ 可得 $f(2+x)+f(-x)=f(x+1)$，即 $f(2+x)+f(x)=f(x+1)$，整理得 $f(2+x)+f(1-x)=0$，可得 $f(3+x)+f(-x)=f(3+x)+f(x)=0$，则 $f(6+x)+f(3+x)=0$，可得 $f(6+x)=f(x)$，所以 6 为 $f(x)$ 的周期. 由 $f(1+x)+f(1-x)=f(x)$，$f(0)=2$，令 $x=0$，可得 $f(1)+f(1)=f(0)=2$，可得 $f(1)=1$，令 $x=1$，可得 $f(2)+f(0)=f(1)=1$，可得 $f(2)=-1$，所以 $f(20)+f(24)=f(2)+f(0)=-1+2=1$. 故选 A.

9. A ［解析］对于 A，由题意知 $x\in(0,1)$，若 $x=\frac{m}{n}$ 是有理数，且 $m,n(m<n)$ 是互质的正整数，则 $n-m,n$ 也是互质的正整数，所以 $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}=f\left(\frac{n-m}{n}\right)=f\left(1-\frac{m}{n}\right)$，若 x 为无理数，则 $1-x$ 也为无理数，所以 $f(x)=f(1-x)=1$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，故 A 正确；对于 B，$f\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=1$，$f\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=1$，显然 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 对称，故 B 错误；对于 C，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不单调递增，故 C 错误；对于 D，若 x 为有理数 $\frac{m}{n}(m,n(m<n)$ 是互质的正整数），则 $f(x)=\frac{1}{n}$，显然当 $n\to+\infty$ 时，$f(x)\to0$，函数 $f(x)$ 无最小值，故 D 错误. 故选 A.

10. AC ［解析］因为 $y=f(x-1)$ 为奇函数，所以 $f(-x-1)=-f(x-1)$，又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x-1)=-f(x+1)=-f(x-1)$，所以 $f(x+1)=f(x-1)$，所以 $f(x+2)=f[(x+1)+1]=f[(x+1)-1]=f(x)$，故 A 正确；因为 $y=f(x-1)$ 为奇函数，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，故 B 错误，C 正确；假设 $y=f(x+2)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则 $f(x+2)=f(2-x)=f(x)$，由 $f(x)=f(x+2)$，可得 $f(2-x)=f(-x)$，所以 $f(x)=f(-x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，与已知条件矛盾，故 D 错误. 故选 AC.

11. AD ［解析］由函数 $f(x)$ 为奇函数，且定义域为 $\mathbf{R}$，得 $f(0)=0$，A 选项正确；因为 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(x+1)=f(1-x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，B 选项错误；因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)$，所以由 $f(x)=f(2-x)$ 可得 $-f(-x)=f(2-x)$，则 $-f(x)=f(2+x)$，所以 $-f(x+2)=f(x+4)$，可得 $f(x)=f(4+x)$，函数 $f(x)$ 的一个周期为 4，C 选项错误，D 选项正确. 故选 AD.

12. BD ［解析］$f(x)=e^{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$. 对于 B，$f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=e^{\sqrt{2}\sin x}+e^{-\sqrt{2}\sin x}=f\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故 B 正确. 对于 C，$f(x+\pi)=e^{\sqrt{2}\sin\left(\pi+x-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-\sqrt{2}\sin\left(\pi+x-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=f(x)$，所以 π 为函数 $f(x)$ 的一个周期，故 C 错误. 对于 D，令 $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，$g(t)=e^t+e^{-t}$，易知 $g(t)$ 为偶函数，则只需考虑 $t\in[0,\sqrt{2}]$ 时 $g(t)$ 的最值. $g'(t)=e^t-e^{-t}$，当 $t>0$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，则当 $t\in[0,\sqrt{2}]$ 时，$2=g(0)\leqslant g(t)\leqslant g(\sqrt{2})=e^{\sqrt{2}}+e^{-\sqrt{2}}$，故 D 正确. 对于 A，因为 $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=e^{-\sqrt{2}\cos x}+e^{\sqrt{2}\cos x}=f\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称，由上分析知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，因为 $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，且当 $x\in$

$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},0]$，函数$g(t)=e^{t}+e^{-t}$在$[-\sqrt{2},0]$上单调递减，所以$f(x)=e^{\sin x-\cos x}+e^{\cos x-\sin x}$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递减，由对称性、周期性可得，若函数$f(x)$的图象有对称中心，则点$(0,f(0))$为其一个对称中心，而$f(0)=e^{-1}+e$，$f(x)+f(-x)=e^{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{\sqrt{2}\sin\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{\sqrt{2}\cos\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)}\neq 2f(0)$，故$f(x)$的图象没有对称中心，故A错误．故选BD．

13. 6 ［解析］因为$y=g(x+1)$是偶函数，$g(x+1)=xf(x+1)$，其中$y=x$为奇函数，所以$y=f(x+1)$必为奇函数，则有$f(1-x)=-f(1+x)$，可得$f(-x)=-f(x+2)$，又因为$f(-x)=f(x)$，所以$f(x+2)=-f(x)$，则$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数$y=f(x)$的周期为4．由$y=g(x+1)$是偶函数，可得$g(-x+1)=g(x+1)$，所以$g(-x)=g(x+2)$，所以$g(-0.5)=g(2.5)=1.5f(2.5)=1.5f(-2.5)=1.5f(-2.5+4\times2)=1.5f(5.5)=6$．

14. $(-1,0)\cup(2,+\infty)$ ［解析］函数$y=f(x)$的图象可由$y=f(x+1)$的图象向右平移1个单位长度得到，因为$y=f(x+1)$是偶函数，即其图象关于y轴对称，所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，又$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)$在$(-\infty,1]$上单调递减，又$f(0)=0$，所以$f(2)=0$．当$x+1>0$，即$x>-1$时，由$(x+1)f(x)>0$得$f(x)>0$，可得$-1<x<0$或$x>2$；当$x+1<0$，即$x<-1$时，由$(x+1)f(x)>0$得$f(x)<0$，无解．综上，不等式$(x+1)f(x)>0$的解集为$(-1,0)\cup(2,+\infty)$．

15. 解：(1)证明：因为$f(x+2)=-f(x)$，所以$f(x+4)=f(x+2+2)=-f(x+2)=f(x)$，
所以$f(x)$是以4为周期的周期函数．
(2)函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，当$x\in[-2,0]$时，$-x\in[0,2]$，所以$f(x)=-f(-x)=-[2(-x)-(-x)^2]=x^2+2x$．当$x\in[2,4]$时，$x-4\in[-2,0]$，所以$f(x)=f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)=x^2-6x+8$．
(3)易得$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$，$f(3)=-1$，因为函数$f(x)$的周期为4，所以$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)=506\times[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]+f(2024)+f(2025)=f(0)+f(1)=1$．

16. 解：(1)证明：根据题意，$f(x)=\frac{2}{1+2^{1-x}}$，令$g(x)=f(x+1)-1=\frac{2}{1+2^{-x}}-1$，显然函数$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，关于原点对称，
因为$g(x)+g(-x)=\left(\frac{2}{1+2^{-x}}-1\right)+\left(\frac{2}{1+2^{x}}-1\right)=\frac{2^{x+1}}{2^x+1}+\frac{2}{1+2^x}-2=0$，
所以函数$g(x)=\frac{2}{1+2^{-x}}-1$是奇函数，即$y=f(x+1)-1$为奇函数，
则函数$f(x)$的图象关于点$(1,1)$对称．
(2)根据题意，$f(x)=\frac{2}{1+2^{1-x}}$，函数$y=1+2^{1-x}$在$\mathbf{R}$上为减函数，且$y=1+2^{1-x}>0$恒成立，
则$f(x)=\frac{2}{1+2^{1-x}}$是$\mathbf{R}$上的增函数．
由(1)知函数$f(x)$的图象关于点$(1,1)$对称，故有$f(x)+f(2-x)=2$，即$2-f(x)=f(2-x)$，所以$2-f(5-2a)=f[2-(5-2a)]=f(2a-3)$，
因为$f(-a^2)+f(5-2a)>2$，
所以$f(-a^2)>f(2a-3)$．
因为$f(x)=\frac{2}{1+2^{1-x}}$是$\mathbf{R}$上的增函数，所以$-a^2>2a-3$，即$a^2+2a-3<0$，解得$-3<a<1$，所以实数a的取值范围为$(-3,1)$．

17. B ［解析］由题可知函数$g(x)$的图象可由$f(x)$的图象向左平移一个单位长度得到，则$f(x)$的图象与两坐标轴围成的图形的面积即为$g(x)$的图象与直线$x=-1$，$y=0$所围成的图形的面积．$g(x)=\log_3\frac{2-x}{x+2}-x+2$，由$\frac{2-x}{x+2}>0$得$(x-2)(x+2)<0$，解得$-2<x<2$，所以$g(x)$的定义域为$(-2,2)$，$g(-x)=\log_3\frac{2+x}{-x+2}+x+2$，则有$g(x)+g(-x)=4$，所以函数$g(x)$的图象关于点$(0,2)$对称，又$g(-1)=4$，$g(1)=0$，且点$(-1,4)$与点$(1,0)$也关于点$(0,2)$对称，$g(x)=\log_3\frac{-(x+2)+4}{x+2}-x+2=\log_3\left(-1+\frac{4}{x+2}\right)-x+2$，所以由复合函数的单调性可得函数$g(x)$在区间$(-1,1)$上单调递减．根据对称性可知$g(x)$的图象与直线$x=-1$，$y=0$所围成的图形的面积是$\frac{1}{2}\times2\times4=4$，即$f(x)$的图象与两坐标轴围成的图形的面积为4．故选B．

增分微练2　抽象函数

1. A ［解析］对于A，若$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，则$f(x_1x_2)=(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}$，$f(x_1)f(x_2)=x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}=(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}$，$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$，A正确；对于B，若$f(x)=\ln x$，则$f(x_1x_2)=\ln(x_1x_2)=\ln x_1+\ln x_2=f(x_1)+f(x_2)$，B不正确；对于C，若$f(x)=2x^2$，则$f(x_1x_2)=2x_1^2x_2^2\neq f(x_1)f(x_2)=4x_1^2x_2^2$，C不正确；对于D，若$f(x)=-x^3$，则$f(x_1x_2)=-x_1^3x_2^3\neq f(x_1)f(x_2)=x_1^3x_2^3$，D不正确．故选A．

2. D ［解析］因为$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=1+x$，所以令$x=2$，可得$f(2)+f(-1)=3$，令$x=\frac{1}{2}$，可得$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=\frac{3}{2}$，两式相加可得$f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(2)=\frac{9}{2}$，令$x=-1$，可得$f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，则$2f(2)=\frac{9}{2}$，即$f(2)=\frac{9}{4}$．故选D．

3. C ［解析］∵$f(x+2)f(x)=1$，∴$f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，∴$f(x+4)=\frac{1}{f(x+2)}=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=f(x)$，即$f(x+4)=f(x)$，∴函数$f(x)$的周期是4．∵$f(0)\in(1,2)$，∴$f(2026)=f(506\times4+2)=f(2)=\frac{1}{f(0)}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$．故选C．

4. D ［解析］∵对任意$x_1,x_2\in\mathbf{R}$都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+a$，∴令$x_1=x_2=0$，得$f(0)=f(0)+f(0)+a$，∴$f(0)=-a$，令$x_1=x$，$x_2=-x$，得$f(0)=f(x)+f(-x)+a$，∴$f(x)+a=-f(-x)-a=-[f(-x)+a]$，则$y=f(x)+a$为奇函数．故选D．

5. AC ［解析］令$y=0$，则$f(0)f(x)=f(0)+|x|$，令$x=y=0$，则$[f(0)]^2=f(0)$，解得$f(0)=0$或$f(0)=1$，若$f(0)=0$，则$|x|=0$，不恒成立，不合题意，故$f(0)=1$，A选项正确；$f(0)=1$，则$f(x)=1+|x|$，则$f(1)=2$，B选项错误；函数$f(x)=1+|x|$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=1+|-x|=1+|x|=f(x)$，$f(x)$为偶函数，C选项正确，D选项错误．故选AC．

6. ABD ［解析］令$x=0$，$y=\frac{1}{2}$，则$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，∵$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$，∴$f(0)=-1$．令$x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，则$f(0)+f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，∴$f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，∴$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，A正确；令$y=-\frac{1}{2}$，则$f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，即$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$，∴$f\left(x+1-\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)=-2x-2$，即$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x-2$，易知函数$y=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是奇函数，函数$y=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$，B正确，C错误，D正确．故选ABD．

7. 2 ［解析］由$f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，得$f(x+2)=f[(x+1)+1]=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$，则$f(x+4)=f[(x+2)+2]=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，所以$f(x)$是周期为4的函数，所以$f(15)=f(4\times3+3)=f(3)=2$．

8. D ［解析］因为$f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=2f(x)$，所以$f(xy)-f(x)=f(x)-f\left(\frac{x}{y}\right)$，所以$f(2^k)-f(2^{k-1})=f(2^{k-1})-f(2^{k-2})=\cdots=f(2)-f(1)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$，所以$f(2^k)=f(2^k)-f(2^{k-1})+f(2^{k-1})-f(2^{k-2})+\cdots+f(2)-f(1)+f(1)=\frac{k}{2}$，所以$\sum_{k=1}^{n}f(2^k)=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{4}n(n+1)$．故选D．

9. ACD ［解析］由题意得$e^x-f(x)-g(x)=-y+f(y)-2g(y)$恒成立，所以存在常数$a$，使得$e^x-f(x)-g(x)=a$且$-y+f(y)-2g(y)=a$．令$y=x$，得$\begin{cases}e^x-f(x)-g(x)=a,\\-x+f(x)-2g(x)=a,\end{cases}$解得$\begin{cases}f(x)=\frac{2e^x+x-a}{3},\\g(x)=\frac{e^x-x-2a}{3},\end{cases}$经检验，符合题意．
由$f(x)=\frac{2e^x+x-a}{3}$，易知$f(x)$是增函数，显然$f(-x)\neq-f(x)$，即$f(x)$不是奇函数，A正确，B错误．因为$g'(x)=\frac{e^x-1}{3}$，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)$的最小值为$g(0)$，C正确．$2f(x)-g(x)=$

$\frac{2(2e^x+x-a)-(e^x-x-2a)}{3}=e^x+x$，易知 $y=2f(x)-g(x)$ 为增函数，D 正确. 故选 ACD.

10. BC ［解析］令 $x=y=0$，$z=1$，则 $f[f(0)]=f(0)f(1)$，令 $x=y=z=0$，则 $f[f(0)]=f(0)f(0)$，$\therefore f(0)f(0)=f(0)f(1)$，$\therefore f(0)=0$ 或 $f(1)=f(0)$. 令 $x=1$，$y=z=0$，则 $f[f(1)]=1+f(0)f(0)$，若 $f(1)=f(0)$，则 $f[f(0)]=1+f(0)f(0)\neq f(0)f(0)$，矛盾，$\therefore f(0)=0$，则 $f(1)\neq f(0)=0$，A 选项错误. 令 $y=z=0$，则 $f[f(x)]=x+f(0)f(0)=x$，B 选项正确. 令 $x=0$，则 $f[f(0)+yz]=0+f(y)f(z)$，即 $f(yz)=f(y)f(z)$，$\therefore f(xy)=f(x)f(y)$，C 选项正确. 令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)f(1)$，得 $f(1)=1$，令 $z=1$，则 $f[f(x)+y]=x+f(y)f(1)=x+f(y)=f[f(x)]+f(y)$，即 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，D 选项错误. 故选 BC.

11. 1925 ［解析］因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)+10xy$，所以 $f(x+y)-5(x+y)^2=f(x)-5x^2+f(y)-5y^2$. 设 $g(x)=f(x)-5x^2$，那么 $g(x+y)=g(x)+g(y)$，因此 $g(n)=g(n-1)+g(1)=g(n-2)+g(1)+g(1)=g(n-2)+2g(1)=\cdots=g(1)+(n-1)g(1)=ng(1)=n[f(1)-5]$，因此 $f(n)=5n^2+[f(1)-5]n\geqslant 5n$，取 $n=1$，得到 $f(1)\geqslant 5$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{10}f(i)=5\sum\limits_{i=1}^{10}i^2+[f(1)-5]\sum\limits_{i=1}^{10}i\geqslant 5\sum\limits_{i=1}^{10}i^2=1925$.

12. 解：(1) 方法一：由题知 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，令 $x=1$，$y=0$，可得 $2f(1)=f(1)f(0)$，
因为 $f(1)=1$，所以 $f(0)=2$.
由 $f(0)=2$，得 $A=2$. 由 $f(1)=1$，得 $2\cos\omega=1$，解得 $\cos\omega=\frac{1}{2}$，因为 $0<\omega<\pi$，所以 $\omega=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$，则 $f(x+y)+f(x-y)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}y\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{3}y\right)=4\cos\frac{\pi}{3}x\cos\frac{\pi}{3}y=f(x)f(y)$，
所以 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$，
即 $A=2$，$\omega=\frac{\pi}{3}$.
方法二：因为 $f(x)=A\cos\omega x(0<\omega<\pi)$，所以 $f(x+y)+f(x-y)=A\cos\omega(x+y)+A\cos\omega(x-y)=A(\cos\omega x\cos\omega y-\sin\omega x\sin\omega y)+A(\cos\omega x\cos\omega y+\sin\omega x\sin\omega y)=2A\cos\omega x\cos\omega y$，$f(x)f(y)=A^2\cos\omega x\cos\omega y$，又 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，所以 $2A=A^2$，解得 $A=0$ 或 $A=2$. 当 $A=0$ 时，$f(1)=0$，与 $f(1)=1$ 矛盾，不符合题意，所以 $A=2$.
由 $f(1)=2\cos\omega=1$，且 $0<\omega<\pi$，得 $\omega=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$，即 $A=2$，$\omega=\frac{\pi}{3}$.
(2) 证明：由 (1) 得 $f(0)=2$，令 $x=0$，可得 $f(y)+f(-y)=2f(y)$，即 $f(y)=f(-y)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数.
(3) 证明：令 $y=1$，得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)=f(x)$，则有 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$，两式相加得 $f(x+2)=-f(x-1)$，所以 $f(x-1)=-f(x-4)$，可得 $f(x+2)=f(x-4)$，则 $f(x)=f(x+6)$，
所以函数 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数.

第 10 讲　二次函数与幂函数

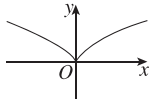
1. C ［解析］依题意可得 $4=(\sqrt{2})^{\alpha}$，则 $(\sqrt{2})^4=(\sqrt{2})^{\alpha}$，解得 $\alpha=4$. 故选 C.

2. A ［解析］因为二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标为 -5 和 3，所以 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{-5+3}{2}=-1$，又 $a>0$，所以 $f(x)$ 的图象开口向上，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1]$，故选 A.

3. D ［解析］因为 $b=0.3^{-0.2}=\left(\frac{10}{3}\right)^{0.2}$，幂函数 $y=x^{0.2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\frac{10}{3}>3$，所以 $\left(\frac{10}{3}\right)^{0.2}>3^{0.2}>3^0=1$，所以 $b>a>1$. 因为对数函数 $y=\log_{0.2}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $c=\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2=1$，故 $b>a>1>c$. 故选 D.

4. A ［解析］函数 $f(x)=2x^2-mx+1$ 的图象的对称轴方程是 $x=\frac{m}{4}$，因为函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\frac{m}{4}\leqslant -1$，解得 $m\leqslant -4$. 因为 $f(1)=3-m$，所以 $3-m\geqslant 7$，所以 $f(1)$ 的取值范围是 $[7,+\infty)$. 故选 A.

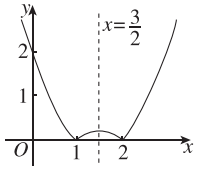
5. BCD ［解析］设幂函数 $f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$，因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(8,4)$，所以 $8^{\alpha}=4$，即 $2^{3\alpha}=2^2$，可得 $3\alpha=2$，解得 $\alpha=\frac{2}{3}$，所以 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，即 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.



由 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}=f(x)$，可知函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 B 正确；分析函数解析式可知，当 $x>0$ 时，随着 x 的增大，x^2 也增大，$\sqrt[3]{x^2}$ 也增大，所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增，又 $f(x)$ 为偶函数，所以当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递减，所以 A 错误；当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调递增，又 $f(1)=1$，所以当 $x>1$ 时，$f(x)>1$，所以 C 正确；作出函数 $f(x)$ 的图象如图，$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 为点 $(x_1,f(x_1))$ 与点 $(x_2,f(x_2))$ 连线中点的纵坐标，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 时的函数值，观察图象可知选项 D 正确. 故选 BCD.

6. $\frac{2}{3}$（答案不唯一） ［解析］$f(x)=x^{\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，要使 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减，只需 $f(x)$ 为偶函数，不妨取 $\alpha=\frac{2}{3}$，此时 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}=f(x)$，故 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 为偶函数，满足在区间 $(-1,0)$ 上单调递减.

7. $(-\infty,1)$ 和 $\left(\frac{3}{2},2\right)$ ［解析］当 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^2-3x+2$，其图象的对称轴方程为 $x=\frac{3}{2}$；当 $1<x<2$ 时，$f(x)=-x^2+3x-2$，其图象的对称轴方程为 $x=\frac{3}{2}$. 作出 $f(x)$ 的图象，如图所示，由图可知，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1)$ 和 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.



8. B ［解析］由图象可看出 $y=x^{\frac{m}{n}}$ 为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x>0$ 时，随着 x 的增加，y 增加得越来越慢，故 $\frac{m}{n}\in(0,1)$ 且 m 为偶数，又 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 且互质，所以 n 是奇数. 故选 B.

9. D ［解析］由题意，令 $ax^2+4x+c=2x$，则方程 $ax^2+2x+c=0$ 有两个相等的实数根，为 1，所以 $\begin{cases}\Delta=4-4ac=0,\\ a+2+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ c=-1,\end{cases}$ 所以 $f(x)=-x^2+4x-1-2=-(x-2)^2+1$. 令 $f(x)=-3$，得 $x=0$ 或 $x=4$；令 $f(x)=1$，得 $x=2$. 由题意可得 $2\leqslant m\leqslant 4$. 故选 D.

10. B ［解析］因为函数 $f(x)$ 对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 由 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2+m-3}$ 是幂函数，可得 $m^2-m-1=1$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$. 当 $m=2$ 时，$f(x)=x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不满足题意；当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^{-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，满足题意，故 $f(x)=x^{-3}$，且 $f(x)$ 为奇函数. 因为 $a<0<b$，$|a|<|b|$，所以 $0<-a<b$，所以 $f(-a)>f(b)$，所以 $-f(a)>f(b)$，所以 $f(a)+f(b)<0$. 故选 B.

11. B ［解析］当 $a>2$，$x>2$ 时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=\begin{cases}x^2-ax-2a^2, & x\geqslant a,\\ -x^2+ax-2a^2, & 2<x<a,\end{cases}$ 当 $2<x<a$ 时，$f(x)=-x^2+ax-2a^2$，此时 $\Delta=a^2-4\times 2a^2=-7a^2<0$，所以 $f(x)<0$，不满足当 $x>2$ 时，$f(x)>0$，故 $a>2$ 不符合题意；当 $0<a\leqslant 2$，$x>2$ 时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=x^2-ax-2a^2=(x-2a)(x+a)$，由 $f(x)>0$，可得 $x>2a$，由于 $x>2$ 时，$f(x)>0$，故 $2a\leqslant 2$，可得 $0<a\leqslant 1$；当 $a=0$，$x>2$ 时，$f(x)=x^2>0$，符合题意；当 $a<0$，$x>2$ 时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=x^2-ax-2a^2=(x-2a)(x+a)$，由 $f(x)>0$，可得 $x>-a$，由于 $x>2$ 时，$f(x)>0$，故 $-a\leqslant 2$，可得 $-2\leqslant a<0$. 综上，a 的取值范围是 $[-2,1]$. 故选 B.

12. x^2-2x（答案不唯一） ［解析］令 $f(x)=x^2-2x$，则其图象的对称轴为直线 $x=1$，满足①$f(1-x)=f(1+x)$；令 $f(x)=x^2-2x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$，满足②$f(x)$ 有两个零点；$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$，当 $x=1$，$f(x)_{\min}=-1$，满足③$f(x)$ 有最小值.

13. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty)$ ［解析］由题意知，$a>0$ 且 $a\neq 1$，令 $g(x)=ax^2-4x+9$，则 $g(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}$. ①当 $a>1$ 时，由复合函数的单调性可知，$g(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，且 $g(x)>0$ 对任意 $x\in[1,3]$ 恒成立，则 $\begin{cases}a>1,\\ \frac{2}{a}\leqslant 1,\\ g(1)=a+5>0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 2$. ②当 $0<a<1$ 时，由复合函数的单调性可知，$g(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减，且 $g(x)>0$ 对任意 $x\in[1,3]$ 恒成立，则 $\begin{cases}0<a<1,\\ \frac{2}{a}\geqslant 3,\\ g(3)=9a-3>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{2}{3}$. 综上所述，$a\geqslant 2$ 或 $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{2}{3}$，故实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty)$.

14. 解：(1) 因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2,\sqrt{2})$，所以 $2^{\frac{1}{m^2+m}}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，
所以 $m^2+m=2$，解得 $m=1$ 或 $m=-2$，
又 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 $m=1$.
(2) 由 (1) 知 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，故 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的增函数，故由 $f(2-a)>$

$f(a-1)$，得 $\begin{cases}2-a\geqslant 0,\\ a-1\geqslant 0,\\ 2-a>a-1,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$，所以满足条件 $f(2-a)>f(a-1)$ 的实数 a 的取值范围为 $\left[1,\frac{3}{2}\right)$.

15. 解：(1) 依题意得 $a+b+2=1$，即 $b=-1-a$，由对任意 $x\in\mathbf{R}$，$y>0$ 恒成立，得 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-8a<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\ (-a-1)^2-8a<0,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}a>0,\\ a^2-6a+1<0,\end{cases}$ 解得 $3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}$，所以实数 a 的取值范围是 $(3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2})$.

(2) 由 (1) 知，$b=-1-a$，由 $y>0$，得 $ax^2-(1+a)x+2>0$，即 $(x^2-x)a-x+2>0$. 依题意得，$(x^2-x)a-x+2>0$ 对任意 $a\in[-2,-1]$ 恒成立，

令 $g(a)=(x^2-x)a-x+2$，

则 $\begin{cases}g(-2)=-2x^2+x+2>0,\\ g(-1)=-x^2+2>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$，所以实数 x 的取值范围是 $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

(3) 由对任意 $x\in\mathbf{R}$，$y\geqslant 0$ 恒成立，得 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-8a\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $a\geqslant\frac{b^2}{8}$，因此 $\frac{a+2}{b}\geqslant\frac{\frac{b^2}{8}+2}{b}=\frac{b}{8}+\frac{2}{b}$，显然 $\frac{b}{8}+\frac{2}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{8}\cdot\frac{2}{b}}=1$，当且仅当 $\frac{b}{8}=\frac{2}{b}$，即 $b=4$ 时取等号，由 $a=\frac{b^2}{8}$ 且 $b=4$，得 $a=2$，所以当 $a=2$，$b=4$ 时，$\frac{a+2}{b}$ 取得最小值 1.

16. AB [解析] 不等式 $f(x+t)\leqslant 3x$ 等价于 $(x+t)^2+2(x+t)-3x\leqslant 0$，等价于 $x^2+(2t-1)x+t^2+2t\leqslant 0$. 令 $g(x)=x^2+(2t-1)x+t^2+2t$，$x\in[1,m]$，依题意得，存在实数 t，使得 $g(x)\leqslant 0$ 在 $[1,m]$ 上恒成立，

由二次函数的图象与性质知 $\begin{cases}g(1)\leqslant 0,\\ g(m)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-4\leqslant t\leqslant 0,\\ t^2+2(m+1)t+m^2-m\leqslant 0.\end{cases}$

令 $h(t)=t^2+2(m+1)t+m^2-m$，于是存在实数 $t\in[-4,0]$，使得 $h(t)\leqslant 0$ 成立，而 $m>1$，则当 $-m-1\leqslant -4$，即 $m\geqslant 3$ 时，函数 $h(t)$ 在 $[-4,0]$ 上单调递增，所以 $h(-4)=m^2-9m+8\leqslant 0$，可得 $3\leqslant m\leqslant 8$；当 $-4<-m-1<-2$，即 $1<m<3$ 时，$h(-m-1)=-1-3m\leqslant 0$，可得 $1<m<3$. 综上，m 的取值范围是 $1<m\leqslant 8$，选项 A，B 符合题意，选项 C，D 不符合题意. 故选 AB.

17. $(-\infty,0]\cup[8,+\infty)$ [解析] 记 $g(x)=x^2-bx+b^2$ 在 $[1,3]$ 上的最大值为 $M(b)$，最小值为 $m(b)$，则 $[M(b)+c][m(b)+c]=-16$，$\because 16=[M(b)+c][-m(b)-c]\leqslant\frac{[M(b)-m(b)]^2}{4}$（当且仅当 $M(b)+c=-m(b)-c$，即 $M(b)+m(b)+2c=0$ 时取等号），$\therefore M(b)-m(b)\geqslant 8$. ① 当 $\frac{b}{2}\leqslant 1$，即 $b\leqslant 2$ 时，$M(b)=g(3)$，$m(b)=g(1)$，$\therefore M(b)-m(b)=8-2b\geqslant 8$，解得 $b\leqslant 0$；② 当 $\frac{b}{2}\geqslant 3$，即 $b\geqslant 6$ 时，$M(b)=g(1)$，$m(b)=g(3)$，$\therefore M(b)-m(b)=2b-8\geqslant 8$，解得 $b\geqslant 8$；③ 当 $1<\frac{b}{2}<3$，即 $2<b<6$ 时，$M(b)=\max\{g(1),g(3)\}$，$m(b)=g\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{3}{4}b^2$，$g(1)-g\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{(b-2)^2}{4}\in(0,4)$，$g(3)-g\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{(b-6)^2}{4}\in(0,4)$，均不符合题意. 综上可知，$b\leqslant 0$ 或 $b\geqslant 8$，即 b 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup[8,+\infty)$.

第 11 讲　指数与指数函数

1. B [解析] $\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{27}\right)^{\sqrt{7}+3}=\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{3^3}\right)^{\sqrt{7}+3}=(3^{\sqrt{7}-3})^{\sqrt{7}+3}=3^{(\sqrt{7}-3)\times(\sqrt{7}+3)}=3^{-2}=\frac{1}{9}$. 故选 B.

2. A [解析] $\because$ 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}a-3\right)\cdot a^x$ 是指数函数，$\therefore\frac{1}{2}a-3=1$ 且 $a>0$，$a\neq 1$，解得 $a=8$，$\therefore f(x)=8^x$，$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=8^{\frac{1}{3}}=2$. 故选 A.

3. D [解析] 因为 $a=\log_4 2=\frac{1}{2}$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^e<\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，$c=\pi^{\frac{1}{2}}>\pi^0=1$，所以 $c>a>b$. 故选 D.

4. A [解析] 解不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$ 得 $a<b$，由 $a<b$ 可推出 $a<b+1$；由 $a<b+1$ 不能推出 $a<b$，例如当 $a=3$，$b=3$ 时，$a<b+1$，但 $a=b$. 所以“$\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$”是“$a<b+1$”的充分不必要条件. 故选 A.

5. C [解析] 由指数函数的单调性可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $x_1<x_2$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，故 A 中说法正确；因为 $2^{x_2}>2^{x_1}>0$，所以 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2}>\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，故 B 中说法正确；令 $x_1=1$，$x_2=2$，则 $f(x_1x_2)=2^{x_1x_2}=4$，$f(x_1)+f(x_2)=2^{x_1}+2^{x_2}=6$，此时 $f(x_1x_2)\neq f(x_1)+f(x_2)$，故 C 中说法错误；$f(x_1+x_2)=2^{x_1+x_2}$，$f(x_1)f(x_2)=2^{x_1}\cdot 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}=f(x_1+x_2)$，故 D 中说法正确. 故选 C.

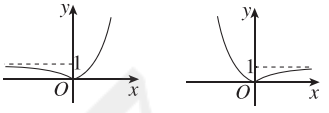
6. 2 [解析] 因为函数 $y=a^x(a>1)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增，所以根据题意得 $a^2-a=2$，解得 $a=2$ 或 $a=-1$（舍去）.

7. e [解析] 由 $f(\ln 2)f(\ln 4)=8$，可得 $a^{\ln 2}\cdot a^{\ln 4}=8$，即 $a^{\ln 2+\ln 4}=a^{3\ln 2}=8$，即 $(a^{\ln 2})^3=2^3$，$\because a>0$，且 $a\neq 1$，$\therefore a^{\ln 2}=2$，两边取自然对数得 $\ln 2\cdot\ln a=\ln 2$，解得 $a=$e.

8. B [解析] 因为 $y=4.2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $-0.3<0<0.3$，所以 $0<4.2^{-0.3}<4.2^0<4.2^{0.3}$，即 $0<4.2^{-0.3}<1<4.2^{0.3}$，即 $0<a<1<b$. 因为 $y=\log_{4.2}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $0<0.2<1$，所以 $\log_{4.2}0.2<\log_{4.2}1=0$，即 $c<0$. 综上可得，$b>a>c$，故选 B.

9. B [解析] 由题意得当 $x=9$ 时，$P=50\%$，则 $\frac{e^{-0.9+9k}}{1+e^{-0.9+9k}}=\frac{1}{2}$，得 $e^{-0.9+9k}=1$，所以 $9k-0.9=0$，解得 $k=0.1$，因此 $P(x)=\frac{e^{-0.9+0.1x}}{1+e^{-0.9+0.1x}}$. 当 $P=40\%$ 时，由 $\frac{e^{-0.9+0.1x}}{1+e^{-0.9+0.1x}}=\frac{2}{5}$，得 $3e^{-0.9+0.1x}=2$，所以 $e^{-0.9+0.1x}=\frac{2}{3}$，所以 $-0.9+0.1x=\ln\frac{2}{3}=\ln 2-\ln 3\approx 0.7-1.1=-0.4$，解得 $x\approx 5$，所以当银行希望实际还款比例为 40% 时，贷款人的年收入约为 5 万元，故选 B.

10. ABC [解析] 当 $a>1$ 时，函数 $y=|a^x-1|$ 的大致图象如图①所示，若直线 $y=\frac{a}{2}$ 与函数 $y=|a^x-1|$ 的图象有两个公共点，则 $0<\frac{a}{2}<1$，即 $0<a<2$，所以 $1<a<2$；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=|a^x-1|$ 的大致图象如图②所示，若直线 $y=\frac{a}{2}$ 与函数 $y=|a^x-1|$ 的图象有两个公共点，则 $0<\frac{a}{2}<1$，即 $0<a<2$，所以 $0<a<1$. 综上可知，a 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,2)$，因此结合选项，a 的值可以是 $\frac{3}{8}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{2}$，不可以是 3. 故选 ABC.



11. BD [解析] 由 $f(x)+g(x)=2^x$ 得 $f(-x)+g(-x)=2^{-x}$，因为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为奇函数和偶函数，所以 $-f(x)+g(x)=2^{-x}$，因此 $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$，$g(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$. 对于 A，$f(x)-g(x)=-2^{-x}$，故 A 错误；对于 B，因为函数 $y=2^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，$y=2^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，故 B 正确；对于 C，因为 $f(x)-g(x)=-2^{-x}<0$，所以 $f(x)=g(x)$ 无解，故 C 错误；对于 D，$g(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\geqslant\frac{2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}}{2}=1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，故 D 正确. 故选 BD.

12. 1 [解析] 原不等式可化为 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x}\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{2ax+30}$，因为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上为减函数，所以 $x^2+x\geqslant 2ax+30$，即 $x^2+(1-2a)x-30\geqslant 0$，又原不等式的解集为 $(-\infty,-5]\cup[6,+\infty)$，所以关于 x 的方程 $x^2+(1-2a)x-30=0$ 的两根为 -5，6，所以 $\begin{cases}-5+6=2a-1,\\ -5\times 6=-30,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

13. $[1,+\infty)$ [解析] 若 $a\leqslant 0$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$2^x-a>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，不符合题意，所以 $a>0$. 由 $2^x-a\neq 0$ 可得 $x\neq\log_2 a$，因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 1\}$，所以 $\log_2 a=1$，解得 $a=2$，所以 $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-2}+\frac{1}{2}\right)$，则 $f(a)=f(2)=2\times\left(\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2}\right)=2$. 由 $a^x\geqslant f(a)$ 可得 $2^x\geqslant 2$，解得 $x\geqslant 1$，因此不等式 $a^x\geqslant f(a)$ 的解集为 $[1,+\infty)$.

14. 解：(1) 由函数 $f(x)=b\cdot a^x$ 的图象经过点 $A(1,10)$，$B(2,50)$，

得 $\begin{cases}b\cdot a=10,\\ b\cdot a^2=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=5,\\ b=2.\end{cases}$

(2) 由 (1) 得 $a=5$，$b=2$，因为函数 $y=b^x=2^x$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增，函数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减，所以 $g(x)=b^x-\left(\frac{1}{a}\right)^x=2^x-\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为

$g(2)=2^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{99}{25}$.

因为关于 x 的不等式 $b^x-\left(\frac{1}{a}\right)^x\geqslant m+3$ 在 $[-2,2]$ 上有解，

所以 $m+3\leqslant\frac{99}{25}$，解得 $m\leqslant\frac{24}{25}$，

即 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{24}{25}\right]$.

15. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq0\}$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{2}{4^x-1}+1$，因为 $4^x>1$，所以 $\frac{2}{4^x-1}>0$，所以 $f(x)>1$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=\frac{2}{4^x-1}-1$，因为 $0<4^x<1$，所以 $\frac{2}{4^x-1}<-2$，所以 $f(x)<-3$. 综上可得，函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

(2) 因为 $x>0$，所以 $2^x-2^{-x}>0$，$f(x)=\frac{2}{4^x-1}+1$，则 $f(x)<2^x-2^{-x}+\frac{a+4}{2^x-2^{-x}}$ 即为 $\frac{2}{4^x-1}+1<2^x-2^{-x}+\frac{a+4}{2^x-2^{-x}}$，两边同时乘 2^x-2^{-x} 得 $2\times2^{-x}+2^x-2^{-x}<(2^x-2^{-x})^2+a+4$，即 $4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})+2+a>0$，即 $(2^x+2^{-x})^2-(2^x+2^{-x})+a=\left(2^x+2^{-x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+a>0$，即 $a>-\left(2^x+2^{-x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 恒成立.

令 $t=2^x+2^{-x}>2$，$g(t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，由二次函数的性质可知 $g(t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $t>2$ 时，$g(t)<g(2)=-2$，所以 $a\geqslant-2$，

所以实数 a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$.

16. BC [解析] 对于 A，当 $a=b$ 时，函数 $f(x)=ae^{-x}+ae^x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(-x)=ae^x+ae^{-x}=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数，故 A 错误. 对于 B，令 $a>0$，$b<0$，则函数 $y=ae^x$ 在其定义域上为增函数，函数 $y=\frac{b}{e^x}$ 在其定义域上也为增函数，故函数 $f(x)=ae^x+\frac{b}{e^x}$ 在其定义域上为增函数；令 $a<0$，$b>0$，则函数 $y=ae^x$ 在其定义域上为减函数，函数 $y=\frac{b}{e^x}$ 在其定义域上也为减函数，故函数 $f(x)=ae^x+\frac{b}{e^x}$ 在其定义域上为减函数. 综上，如果 $ab<0$，那么 $f(x)$ 为单调函数，故 B 正确. 对于 C，当 $a>0$，$b>0$ 时，函数 $f(x)=ae^x+be^{-x}\geqslant2\sqrt{ae^x\cdot be^{-x}}=2\sqrt{ab}>0$，当且仅当 $e^{2x}=\frac{b}{a}$ 时等号成立；当 $a<0$，$b<0$ 时，函数 $f(x)=-(-ae^x-be^{-x})\leqslant-2\sqrt{(-ae^x)\cdot(-be^{-x})}=-2\sqrt{ab}<0$，当且仅当 $e^{2x}=\frac{b}{a}$ 时等号成立. 综上，如果 $ab>0$，那么函数 $f(x)$ 没有零点，故 C 正确. 对于 D，当 $ab=1$ 时，$b=\frac{1}{a}$，所以当 $a<0$，$b<0$ 时，函数 $f(x)=-\left(-ae^x-\frac{1}{a}e^{-x}\right)\leqslant-2\sqrt{(-ae^x)\cdot\left(-\frac{1}{a}e^{-x}\right)}=-2$，当且仅当 $e^{2x}=\frac{1}{a^2}$ 时等号成立；当 $a>0$，$b>0$ 时，函数 $f(x)=ae^x+\frac{1}{a}e^{-x}\geqslant2\sqrt{ae^x\cdot\frac{1}{a}e^{-x}}=2$，当且仅当 $e^{2x}=\frac{1}{a^2}$ 时等号成立. 综上，如果 $ab=1$，那么函数 $f(x)$ 没有最小值. 故 D 错误. 故选 BC.

17. $\frac{25}{12}$ [解析] 由 $f(1)=a-\frac{1}{a}=\frac{8}{3}$，且 $a>0$，解得 $a=3$，则 $f(x)=3^x-3^{-x}$，则 $g(x)=3^{2x}+3^{-2x}-2m(3^x-3^{-x})=(3^x-3^{-x})^2-2m(3^x-3^{-x})+2$，令 $t=3^x-3^{-x}(x\geqslant1)$，因为 $t=3^x-3^{-x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t\geqslant\frac{8}{3}$. 依题意知函数 $h(t)=t^2-2mt+2$ 在区间 $\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$ 上的最小值为 -2，函数 $h(t)=t^2-2mt+2$ 的图象的对称轴为直线 $t=m$. 当 $m>\frac{8}{3}$ 时，$h(t)$ 在区间 $\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$ 上的最小值为 $h(m)=-m^2+2$，由 $-m^2+2=-2$，解得 $m=\pm2$，不符合题意；当 $m\leqslant\frac{8}{3}$ 时，函数 $h(t)$ 在区间 $\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$ 上的最小值为 $h\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{82}{9}-\frac{16}{3}m$，由 $\frac{82}{9}-\frac{16}{3}m=-2$，解得 $m=\frac{25}{12}$，符合题意. 故实数 m 的值为 $\frac{25}{12}$.

第 12 讲　对数与对数函数

1. A [解析] 由 $8=5^b$，得 $b=\log_58$，所以 $ab=\log_25\cdot\log_58=3\log_25\cdot\log_52=3$.

2. A [解析] 函数 $f(x)=\log_a|x|+1$ $(0<a<1)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq0\}$，$f(-x)=\log_a|-x|+1=\log_a|x|+1=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数. 当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_ax+1$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减且 $f(x)$ 的图象过点 $(1,1)$. 故选 A.

3. C [解析] 因为 $a=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\log_32$，所以 $0<a<1$，又 $b=\ln\frac{1}{2}=-\ln2<0$，$c=e^{\frac{1}{2}}>e^0=1$，所以 $c>a>b$. 故选 C.

4. D [解析] 当 $x=0$ 时，$y=\log_a\frac{1}{a}=-1$，则当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{a}\right)$ 的图象经过第二、三、四象限，当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{a}\right)$ 的图象经过第一、三、四象限，所以函数 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{a}\right)$ 的图象一定经过第三、四象限. 故选 D.

5. B [解析] 由题得 $2\log_2(3x-1)>\log_2(3x+5)$，即 $\log_2(3x-1)^2>\log_2(3x+5)$，因为函数 $y=\log_2x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}(3x-1)^2>3x+5,\\3x-1>0,\\3x+5>0,\end{cases}$ 解得 $x>\frac{4}{3}$. 故选 B.

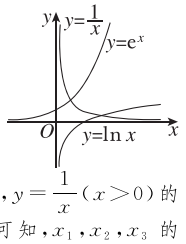
6. 7 [解析] $3^{1+\log_32}+\lg5+\log_32\times\log_49\times\lg2=3\times3^{\log_32}+\lg5+\log_32\times\log_{2^2}3^2\times\lg2=3\times2+\lg5+\log_32\times\log_23\times\lg2=6+(\lg5+\lg2)=6+1=7$.

7. $\left(\frac{1}{8},+\infty\right)$ $\left[0,\frac{1}{8}\right]$ [解析] 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $ax^2+x+2>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，∴ $\begin{cases}a>0,\\\Delta=1-8a<0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{8}$，∴ a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{8},+\infty\right)$. 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则 $a=0$ 或 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=1-8a\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $a=0$ 或 $0<a\leqslant\frac{1}{8}$，即 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{8}$，∴ a 的取值范围为 $\left[0,\frac{1}{8}\right]$.

8. C [解析] 由题意得 $b=\log_35$，$c=\log_58$，则 $a=\frac{3}{2}=\log_33^{\frac{3}{2}}=\log_3\sqrt{27}>\log_35=b$，即 $a>b$，$a=\frac{3}{2}=\log_55^{\frac{3}{2}}=\log_5\sqrt{125}>\log_58$，即 $a>c$. 因为 $\frac{b}{c}=\frac{\lg5}{\lg3}\times\frac{\lg5}{\lg8}=\frac{(\lg5)^2}{\lg3\times\lg8}>\frac{(\lg5)^2}{\left(\frac{\lg3+\lg8}{2}\right)^2}=\frac{4(\lg5)^2}{(\lg24)^2}=\frac{(\lg25)^2}{(\lg24)^2}>1$，且 $b>0$，$c>0$，所以 $b>c$，故 $a>b>c$. 故选 C.

9. D [解析] 依题意得 $\begin{cases}5.0=5+\lg V_2,\\4.5=5+\lg V_1,\end{cases}$ 两式相减得 $0.5=\lg V_2-\lg V_1=\lg\frac{V_2}{V_1}$，解得 $\frac{V_2}{V_1}=10^{0.5}=\sqrt{10}$，易知 $\sqrt{10}\in(3,3.5)$. 故选 D.

10. B [解析] 因为 $x_3\cdot e^{x_1}=x_3\cdot\ln x_2=1$，所以 $e^{x_1}=\ln x_2=\frac{1}{x_3}$，由 $e^{x_1}>0$，得 $x_2>1$，$x_3>0$，作出函数 $y=e^x$，$y=\ln x$，$y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图象如图所示. 由图可知，x_1，x_2，x_3 的大小关系可能为 $x_3>x_2>x_1$，$x_3=x_2>x_1$，$x_2>x_3>x_1$，$x_2>x_1=x_3$，$x_2>x_1>x_3$，故 $x_3>x_1>x_2$ 不可能成立. 故选 B.



11. BD [解析] 对于 A，因为 $\log_ab>1$，所以 $\log_ab>\log_aa$. 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_ax$ 为减函数，可得 $0<b<a<1$；当 $a>1$ 时，$y=\log_ax$ 为增函数，可得 $1<a<b$. 故选项 A 错误. 对于 B，由 A 中分析得 $(a-1)(b-1)>0$，即 $ab+1>a+b$，故选项 B 正确. 对于 C，当 $a=2$，$b=3$ 时，$a-\frac{1}{a}<b-\frac{1}{b}$，故选项 C 错误. 对于 D，$y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以由 A 中分析得 $a+\frac{1}{a}<b+\frac{1}{b}$，故选项 D 正确. 故选 BD.

12. AC [解析] $f(x)=\lg\frac{x^2+1}{|x|}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，且满足 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，其图象关于 y 轴对称，故 A 正确；当 $x>0$ 时，$f(x)=\lg\frac{x^2+1}{|x|}=\lg\left(x+\frac{1}{x}\right)$，由 $y=x+\frac{1}{x}$ 的性质可知其在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以由复合函数的单调性可知，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$

上单调递增，故 B 不正确；当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=\lg 2$，又 $f(x)$ 是偶函数，所以函数 $f(x)$ 的最小值是 $\lg 2$，故 C 正确；由函数的定义可得，函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=2$ 不可能有四个交点，故 D 不正确. 故选 AC.

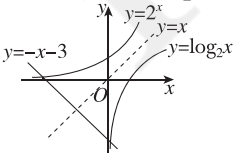
13. $(4,+\infty)$　4　［解析］由函数 $f(x)=2\log_2 x-\log_2(x-4)$ 有意义，得 $\begin{cases}x>0,\\x-4>0,\end{cases}$ 解得 $x>4$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(4,+\infty)$. $f(x)=2\log_2 x-\log_2(x-4)=\log_2\frac{x^2}{x-4}$，$x>4$，令 $t=x-4>0$，$g(t)=\frac{(t+4)^2}{t}=t+\frac{16}{t}+8$，$t>0$，因为 $t+\frac{16}{t}+8\geqslant 2\sqrt{t\times\frac{16}{t}}+8=16$，当且仅当 $t=\frac{16}{t}$，即 $t=4$ 时取等号，所以 $g(t)\geqslant 16$，所以 $f(x)\geqslant\log_2 16=4$，所以函数 $f(x)$ 的最小值为 4.

14. $(1,4)$　［解析］因为 $(\sqrt{a})^a<a^{\sqrt{a}}$，所以 $\ln(\sqrt{a})^a<\ln a^{\sqrt{a}}$，所以 $\frac{a}{2}\ln a<\sqrt{a}\ln a$. 当 $a>1$ 时，不等式化简为 $\frac{a}{2}<\sqrt{a}$，可得 $1<a<4$；当 $a=1$ 时，不等式显然不成立；当 $0<a<1$ 时，不等式化简为 $\frac{a}{2}>\sqrt{a}$，没有符合题意的解. 综上所述，a 的取值范围是 $(1,4)$.

15. 解：(1) 由题得 $f(x)=(2\log_4 x-2)\left(\log_4 x-\frac{1}{2}\right)$，令 $t=\log_4 x$，因为 $x\in[2,4]$，所以 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以 $y=(2t-2)\left(t-\frac{1}{2}\right)=2t^2-3t+1=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$，又 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以 $y\in\left[-\frac{1}{8},0\right]$，所以该函数的取值范围为 $\left[-\frac{1}{8},0\right]$.

(2) 由(1)及 $f(x)\geqslant m\log_4 x$ 对任意 $x\in[4,16]$ 恒成立，可得 $2t^2-3t+1\geqslant mt$ 对任意 $t\in[1,2]$ 恒成立，所以 $m\leqslant 2t+\frac{1}{t}-3$ 对任意 $t\in[1,2]$ 恒成立. 由对勾函数的单调性可知，$g(t)=2t+\frac{1}{t}-3$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，所以 $m\leqslant g(1)=0$，故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

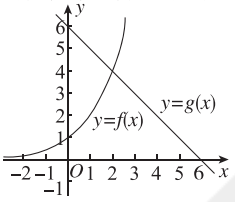
16. B　［解析］由 $2^x+x+3=0$ 得 $2^x=-x-3$，由 $\log_2 x+x+3=0$ 得 $\log_2 x=-x-3$，作出函数 $y=2^x$，$y=\log_2 x$，$y=-x-3$ 的图象如图所示. 由题知，$y=2^x$ 与 $y=-x-3$ 的图象交点的横坐标为 p，$y=\log_2 x$ 与 $y=-x-3$ 的图象交点的横坐标为 q，因为 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，直线 $y=-x-3$ 与直线 $y=x$ 垂直，而 $y=-x-3$ 的图象与直线 $y=x$ 的交点为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$，所以 $\frac{p+q}{2}=-\frac{3}{2}$. 因为函数 $f(x)=(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$ 的图象的对称轴为直线 $x=-\frac{p+q}{2}=\frac{3}{2}$，且二次函数 $f(x)$ 的图象开口向上，所以 $f(0)=f(3)>f(2)$. 故选 B.



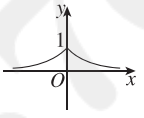
17. BC　［解析］易知点 A，B 和原点 O 在同一条直线上，则点 A，D 和原点 O 不在同一条直线上，故 A 错误；设 $A(x_1,\log_8 x_1)$，$B(x_2,\log_8 x_2)$，则 $C(x_1,\log_2 x_1)$，$D(x_2,\log_2 x_2)$，因为点 A，B 和原点 O 在同一条直线上，所以 $\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$，化简得 $\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{\log_2 x_2}{x_2}$，所以点 C，D 和原点 O 在同一条直线上，故 B 正确；当 BC 平行于 x 轴时，$\log_8 x_2=\log_2 x_1$，化简得 $x_2=x_1^3$，结合 $\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$，可得 $x_1=\sqrt{3}$，故 C 正确；当 BC 平行于 x 轴时，由选项 C 知 $x_1=\sqrt{3}$，则 $\log_8 x_1=\log_8\sqrt{3}=\frac{1}{3}\log_2\sqrt{3}$，故 D 错误. 故选 BC.

第 13 讲　函数的图象

1. B　［解析］在同一平面直角坐标系中画出函数 $f(x)=2^x$ 的图象与函数 $g(x)=-x+6$ 的图象，如图所示，由图可得两函数图象的交点个数为 1. 故选 B.

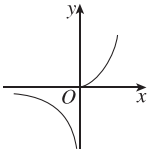


2. B　［解析］当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=3^x=f(x)$，当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(-x)=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数. 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，由图可知函数 $f(x)$ 的最大值为 1，没有最小值. 故选 B.



3. A　［解析］函数 $f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，排除 C，D；因为 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，排除 B. 故选 A.

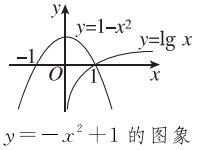
4. B　［解析］因为 $g(x)=f(-x)$，所以 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称. 由 $f(x)$ 的解析式，作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示，从而可得 B 选项符合题意. 故选 B.



5. A　［解析］$f(x)=\frac{x\cos x}{e^{|x|}-1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{-x\cos(-x)}{e^{|-x|}-1}=\frac{-x\cos x}{e^{|x|}-1}=-f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，排除 C，D；$f(\pi)=\frac{-\pi}{e^{\pi}-1}<0$，排除 B. 故选 A.

6. $y=\log_3(4x-2)$　［解析］把函数 $y=\log_3(x-1)$ 的图象向右平移 1 个单位长度，得到 $y=\log_3(x-1-1)=\log_3(x-2)$ 的图象，再把函数 $y=\log_3(x-2)$ 的图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$（纵坐标不变），所得图象对应的函数解析式是 $y=\log_3(4x-2)$.

7. $(1,+\infty)$　［解析］不等式 $f(x)>0$，即 $\lg x+x^2-1>0$，所以 $\lg x>1-x^2$. 在同一坐标系中作出函数 $y=\lg x$，$y=-x^2+1$ 的图象(如图所示)，由图可知，满足不等式 $\lg x>-x^2+1$ 的 x 的取值范围为 $(1,+\infty)$，所以不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $(1,+\infty)$.

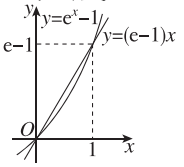


8. D　［解析］当小明沿 AB 走时，他到 O 点的直线距离 y 保持不变；当小明沿 BO 走时，随着时间 t 的增大，他到 O 点的直线距离 y 越来越小；当小明沿 OA 走时，随着时间 t 的增大，他到 O 点的直线距离 y 越来越大. 故 D 选项中的函数图象符合题意. 故选 D.

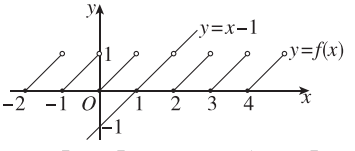
9. C　［解析］对于选项 A，$f(x)=x^3\cdot\ln|x|$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，与题图所表示的函数的定义域不符，故 A 不符合题意；对于选项 B，因为 $f(-x)=e^{|-x|}\cdot[(-x)^2-1]=e^{|x|}\cdot(x^2-1)=f(x)$，且其定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 为偶函数，$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，与题图不符，故 B 不符合题意；对于选项 D，因为 $f(x)=\frac{x-x^3}{2^x}=\frac{x(1+x)(1-x)}{2^x}$，所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\frac{x(1+x)(1-x)}{2^x}>0$，与题图不符，故 D 不符合题意. 故选 C.

10. A　［解析］当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^2+1$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $(0,1]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上的最小值为 $f(0)=1$；当 $x>1$ 时，$f(x)=2^x-a$，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 要使函数 $f(x)$ 存在最小值，则必有 $2-a\geqslant 1$，解得 $a\leqslant 1$. 故选 A.

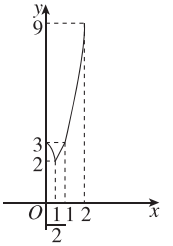
11. B　［解析］由 $f(x)$ 为奇函数可知，$f(e^x-1)+f[(1-e)x]<0$ 等价于 $f(e^x-1)<-f[(1-e)x]$，等价于 $f(e^x-1)<f[(e-1)x]$，又 $f(x)$ 为增函数，所以 $e^x-1<(e-1)x$. 作出 $y=e^x-1$ 与 $y=(e-1)x$ 的图象，如图. 由图可知 $y=e^x-1$ 与 $y=(e-1)x$ 的图象有两个交点，且 1 和 0 分别为两个交点的横坐标，所以不等式 $e^x-1<(e-1)x$ 的解集为 $(0,1)$. 故选 B.



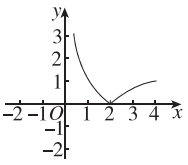
12. AB　［解析］对于 A，由题意得 $f(-1.7)=-1.7-[-1.7]=-1.7-(-2)=0.3$，所以 A 正确；对于 B，$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x)$，所以 B 正确；对于 C，由选项 B 可知，$f(x)$ 是周期为 1 的周期函数，且当 $x=0$ 时，$f(0)=0-[0]=0$，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x-[x]=x-0=x\in(0,1)$，当 $x=1$ 时，$f(1)=1-[1]=1-1=0$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[0,1)$，即 $f(x)$ 的最小值为 0，无最大值，所以 C 错误；对于 D，由选项 C 可知，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\begin{cases}0,x=0,\\x,0<x<1,\\0,x=1,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 的周期为 1，作出 $y=f(x)$ 与 $y=x-1$ 的图象，如图所示，由图可知 $y=f(x)$ 与 $y=x-1$ 的图象有无数个交点，所以 D 错误. 故选 AB.



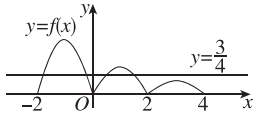
13. 9，2　［解析］作出 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的图象，如图所示，由图可知 $f(x)=\max\{3^x,2x+1,3-4x^2\}$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值 M 和最小值 m 分别是 9，2.



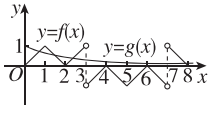
14. [3,6] [解析] 作出函数 $y=|\log_2 x-1|$ 的图象，如图所示，由 $f(x)=0$，得 $x=2$，由 $f(x)=1$，得 $x=1$ 或 $x=4$. 若 $a>2$，则不符合题意，舍去；若 $a=2$，则 $b=4$，此时 $a+b=6$；若 $1<a<2$，则 $b=4$，此时 $5<a+b<6$；若 $a=1$，则 $2\leqslant b\leqslant 4$，此时 $3\leqslant a+b\leqslant 5$；若 $0<a<1$，则不符合题意. 综上，$3\leqslant a+b\leqslant 6$.



15. D [解析] 当 $x\in[-2,0)$ 时，$f(x)=-2x(x+2)=-2(x+1)^2+2\in[0,2]$. 因为 $f(x-2)=2f(x)$，所以当 $x\in[0,2)$ 时，$x-2\in[-2,0)$，则 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)=-x(x-2)\in[0,1]$. 同理，当 $x\in[2,4)$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，依次类推，可得当 $x\in[2k,2(k+1))$ 时，$f(x)\in\left[0,\frac{1}{2^k}\right]$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，所以当 $x\geqslant 2$ 时，必有 $f(x)\leqslant\frac{3}{4}$. 作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图所示，由图可知，当 $0\leqslant x<2$ 时，由 $\begin{cases}-x^2+2x\leqslant\frac{3}{4},\\0\leqslant x<2,\end{cases}$ 解得 $\frac{3}{2}\leqslant x<2$ 或 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，由对任意 $x\in[m,+\infty)$，都有 $f(x)\leqslant\frac{3}{4}$，结合函数 $f(x)$ 的图象可得 $m\geqslant\frac{3}{2}$，故选 D.



16. 4 [解析] 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $y=f(x+1)$ 为偶函数，$y=f(x-1)$ 为奇函数，所以 $f(1-x)=f(1+x)$，$f(-x-1)=-f(x-1)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，也关于点 $(-1,0)$ 对称，所以 $f(-x)=f(x+2)$，$f(-x)=-f(x-2)$，故有 $f(x+2)=-f(x-2)$，则 $f(x+4)=-f(x)$，从而 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数. 根据函数的对称性和周期性，可以画出函数 $f(x)$ 的图象和 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $[0,8]$ 上的图象，如图. 由图可知 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $f(x)$ 的图象在 $[0,8]$ 上有 4 个交点.



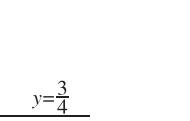
第 14 讲　函数与方程

1. B [解析] 由 $f(x)=\ln x-1=0$，解得 $x=e$，故函数 $f(x)=\ln x-1$ 的零点是 e. 故选 B.

2. B [解析] 由已知可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $f(1)=2+1-9=-6<0$，$f(2)=4+8-9=3>0$，根据函数零点存在定理，可得函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上有零点，且零点是唯一的. 故选 B.

3. D [解析] 显然函数 $f(x)$ 在 $(2,4)$ 上单调递增，若函数 $f(x)=\log_2 x+x^2+m$ 在区间 $(2,4)$ 上存在零点，则 $f(2)\cdot f(4)<0$，即 $(m+5)(m+18)<0$，解得 $-18<m<-5$，所以实数 m 的取值范围是 $(-18,-5)$. 故选 D.

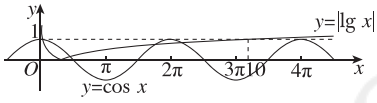
4. C [解析] 令 $f(x)=0$，可得 $|\ln x|=e^{-x}$，作出函数 $y=|\ln x|$ 与 $y=e^{-x}$ 的图象（如图所示），由图可知，函数 $y=|\ln x|$ 与 $y=e^{-x}$ 的图象的交点个数为 2，故 $f(x)$ 的零点个数为 2，故选 C.



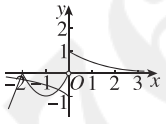
5. AD [解析] 对于 A，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上连续，$f(-1)f(1)>0$，方程 $x^2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有实根 0，A 正确；对于 B，函数 $f(x)=x^2$ 的零点为 0，而函数 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 两侧的函数值符号相同，B 错误；对于 C，“二分法”判断函数零点所在区间的方法对连续不断的函数在零点两侧函数值符号相同的零点无效，C 错误；显然 D 正确. 故选 AD.

6. 3 [解析] $f(x)$ 是增函数，$\because f(3)=2\lg 3-1<0$，$f(4)=2\lg 4>0$，$\therefore f(3)f(4)<0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点在 $(3,4)$ 内，又函数 $f(x)$ 的零点在区间 $(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$ 上，$\therefore k=3$.

7. 4 [解析] 根据题意，函数 $f(x)=\cos x-|\lg x|$ 的零点个数，即为方程 $\cos x=|\lg x|$ 的实数根个数，即为函数 $y=\cos x$ 与 $y=|\lg x|$ 图象的交点个数. 在同一坐标系内作出 $y=\cos x$ 和 $y=|\lg x|$ 的图象，如图. 当 $0<x\leqslant 10$ 时，由图可知 $y=\cos x$ 与 $y=|\lg x|$ 的图象有 4 个交点；当 $x>10$ 时，$y=\cos x\leqslant 1$，而 $y=|\lg x|=\lg x>1$，两图象没有交点. 因此，函数 $y=\cos x$ 和 $y=|\lg x|$ 图象的交点个数为 4，即 $f(x)=\cos x-|\lg x|$ 的零点个数为 4.

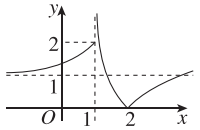


8. C [解析] 作出 $f(x)$ 的图象，再作出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$x\geqslant 0$ 关于原点对称的图象如图所示. 因为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$x\geqslant 0$ 关于原点对称的图象与 $y=-|x^2+2x|$，$x<0$ 的图象有 3 个交点，所以 $f(x)$ 图象上关于原点对称的点有 3 对. 故选 C.

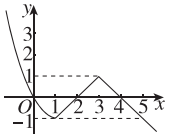


9. C [解析] $\because f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$，$\therefore f(2-x)=(2-x)^2-2(2-x)+a(e^{2-x-1}+e^{-x-2+1})=x^2-4x+4-4+2x+a(e^{1-x}+e^{x-1})=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$，$\therefore f(2-x)=f(x)$，则直线 $x=1$ 为 $f(x)$ 图象的对称轴. $\because f(x)$ 有唯一零点，$\therefore f(x)$ 的零点只能为 $x=1$，即 $f(1)=1^2-2\times 1+a(e^{1-1}+e^{-1+1})=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

10. B [解析] $F(x)$ 的零点个数等于 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点个数，作出 $y=f(x)$ 的图象，如图所示. 由图可知，当 $a\in(0,1]\cup(2,+\infty)$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象有 2 个交点. 故选 B.



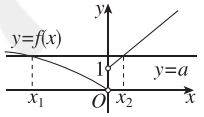
11. D [解析] 由题知 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\leqslant 1,\\1-|x-3|,x>1\end{cases}=\begin{cases}x^2-2x,x\leqslant 1,\\x-2,1<x<3,\\-x+4,x\geqslant 3,\end{cases}$ 作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示. 由图可知函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 和 $[3,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,3)$ 上单调递增，且 $f(1)=-1$，$f(3)=1$. 因为关于 x 的方程 $f(x)-f(1-a)=0$ 至少有两个不同的实数根，所以 $f(x)=f(1-a)$ 至少有两个不同的实数根，即 $y=f(x)$ 的图象与 $y=f(1-a)$ 的图象至少有两个不同的交点，所以 $-1\leqslant f(1-a)\leqslant 1$. 当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^2-2x$，令 $x^2-2x=1$，可得 $x=1-\sqrt{2}$；当 $x\geqslant 3$ 时，$f(x)=4-x$，令 $4-x=-1$，解得 $x=5$. 因为 $-1\leqslant f(1-a)\leqslant 1$，所以 $1-\sqrt{2}\leqslant 1-a\leqslant 5$，解得 $-4\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$. 故选 D.



12. AB [解析] 对于 A，因为 $f(x+2)=f(x-2)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，故 A 正确；对于 B，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x+2)=f(-x-2)$，又 $f(x+2)=f(x-2)$，所以 $f(-x-2)=f(x-2)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，故 B 正确；对于 C，若当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)$ 无零点，则根据周期性和对称性可得 $f(x)$ 在 $[-2,9]$ 上无零点，故 C 错误；对于 D，因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，且 $f(x)$ 的周期为 4，$f(x)=m$ 在区间 $[-4,0]$ 上的根为 x_1，x_2，所以 $x_1+x_2=2\times(-2)=-4$，故 D 错误. 故选 AB.

13. 5 [解析] 因为 m,n 分别为 $f(x)$，$g(x)$ 的零点，所以 $f(m)=\ln m+m-5=0$，$g(n)=e^n+n-5=0$. 因为 $e^n+n-5=0$，所以 $f(e^n)=\ln e^n+e^n-5=e^n+n-5=0$，又函数 $f(x)=\ln x+x-5$ 为增函数，$f(m)=f(e^n)=0$，所以 $m=e^n$，所以 $e^n+\ln m=e^n+\ln e^n=e^n+n=5$.

14. $\left[1-\frac{1}{2}e^2,+\infty\right)$ [解析] $y=f(x)-a$ 的零点个数等于 $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象的交点个数，作出 $y=f(x)$ 和 $y=a$ 的图象如图所示. 由图可知 $a>1$，$\ln(1-x_1)=a$，$x_2+1=a$，可得 $x_1=1-e^a$，$x_2=a-1$，所以 $x_1+\frac{1}{2}e^{2x_2}=\frac{1}{2}e^{2a-2}-e^a+1$. 令 $e^a=t$，由 $a>1$，得 $t>e$，则 $x_1+\frac{1}{2}e^{2x_2}=\frac{1}{2e^2}t^2-t+1$，由二次函数的性质可知当 $t=e^2$ 时，$x_1+\frac{1}{2}e^{2x_2}$ 取得最小值 $1-\frac{1}{2}e^2$，没有最大值，故 $x_1+\frac{1}{2}e^{2x_2}$ 的取值范围为 $\left[1-\frac{1}{2}e^2,+\infty\right)$.



15. $\frac{4\sqrt{6}}{27}$ [解析] 方法一：由 $\left(\frac{x^3+x}{3}+a\right)^3+\left(\frac{x^3+x}{3}+a\right)+3a=3x$，得 $\frac{\left(\frac{x^3+x}{3}+a\right)^3+\left(\frac{x^3+x}{3}+a\right)}{3}+a=x$，令 $f(x)=\frac{x^3+x}{3}+a$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f[f(x)]=x$. 若 $f(x)>x$，则 $f[f(x)]>f(x)>x$，不符合题意；若 $f(x)<x$，则 $f[f(x)]<f(x)<x$，不符合题意. $\therefore f(x)=x$，$\therefore\frac{x^3+x}{3}+a=x$ 在 $(0,2)$ 上有解，即 $a=-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x$ 在 $(0,2)$ 上有解. 令 $g(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x(0<x<2)$，则 $g'(x)=\frac{-3x^2+2}{3}$ $(0<x<2)$. 令 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 上单调递增；令 $g'(x)<0$，得 $\frac{\sqrt{6}}{3}<x<2$，$\therefore g(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},2\right)$ 上单调递减. $\therefore g(x)_{\max}=g\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{27}$，$\therefore a$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{6}}{27}$.

方法二：$\left(\frac{x^3+x}{3}+a\right)^3+\left(\frac{x^3+x}{3}+a\right)+3a=3x$，令 $t=\frac{x^3+x}{3}+a$，则 $3a=3t-x^3-x$，∴原式可化为 $t^3+t+3t-x^3-x=3x$，即 $t^3-x^3+4t-4x=0$，即 $(t-x)(t^2+tx+x^2+4)=0$，∵ $t^2+tx+x^2+4=\left(t+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2+4>0$，∴ $t=x$，即 $\frac{x^3+x}{3}+a=x$，∴ $a=-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x$ 在 $(0,2)$ 上有解. 令 $g(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x(0<x<2)$，则 $g'(x)=\frac{-3x^2+2}{3}$ $(0<x<2)$. 令 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴ $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 上单调递增；令 $g'(x)<0$，得 $\frac{\sqrt{6}}{3}<x<2$，∴ $g(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},2\right)$ 上单调递减. ∴ $g(x)_{\max}=g\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{27}$，∴ a 的最大值为 $\frac{4\sqrt{6}}{27}$.

16. A ［解析］依题意，集合 P 即为关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}x^4+ax-2024=0,\\xy=2024\end{cases}$ 的解集，显然 $x\neq0$，所以 $\begin{cases}a=-x^3+\frac{2024}{x},\\y=\frac{2024}{x},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=-x^3+\frac{2024}{x},\\y=\frac{2024}{x},\\y=a.\end{cases}$ 由 $\begin{cases}y=2024x,\\y=\frac{2024}{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2024\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2024,\end{cases}$ 则函数 $y=2024x$ 与 $y=\frac{2024}{x}$ 的图象的交点坐标为 $(1,2024)$ 和 $(-1,-2024)$，令 $f(x)=-x^3+\frac{2024}{x}$，因为 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq0\}$，且 $f(-x)=x^3-\frac{2024}{x}=-\left(-x^3+\frac{2024}{x}\right)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数. 因为 $y=-x^3$ 与 $y=\frac{2024}{x}$ 均在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)=-x^3+\frac{2024}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)=-x^3+\frac{2024}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减，依题意得直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$，$y=\frac{2024}{x}$ 的图象的交点在直线 $y=2024x$ 的同侧，只需 $a>f(1)$ 或 $a<f(-1)$，即 $a>2023$ 或 $a<-2023$，所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2023)\cup(2023,+\infty)$. 故选 A.

17. BC ［解析］由题意可知，当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，则 $f(x)\geqslant f(0)=t$；当 $x>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)>2\ln1-1=-1$. 易知直线 $y=a$ 与 $f(x)$ 的图象至多有 2 个交点，若函数 $y=f[f(x)]$ 恰好有 4 个不同的零点，令 $u=f(x)$，则 $y=f(u)$ 有 2 个零点，可得当 $u>0$ 时，$2\ln(u+1)-1=0$，解得 $u=\sqrt{e}-1>0$，当 $u<0$ 时，$u^2-2u+t=0$ 有解，可得 $\begin{cases}t\leqslant0,\\u=1-\sqrt{1-t},\end{cases}$ 可得 $f(x)=\sqrt{e}-1$ 和 $f(x)=1-\sqrt{1-t}(t\leqslant0)$ 均有 2 个不同的实数根，即 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{e}-1$，$y=1-\sqrt{1-t}(t\leqslant0)$ 的图象均有 2 个交点. 因为当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)\geqslant t$，当 $x>0$ 时，$f(x)>-1$，所以 $\begin{cases}\sqrt{e}-1>-1,\\\sqrt{e}-1\geqslant t,\end{cases}$ 且 $\begin{cases}1-\sqrt{1-t}>-1,\\1-\sqrt{1-t}\geqslant t,\end{cases}$ 解得 $-3<t\leqslant0$. 综上所述，实数 t 的取值范围为 $(-3,0]$，故选 BC.

增分微练 3　函数共零点问题

1. B ［解析］当 $x\to+\infty$ 时，$x^2-b\to+\infty$，而不等式 $(ax+3)(x^2-b)\leqslant0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以当 $x\to+\infty$ 时，$ax+3\to-\infty$，即 $a<0$，可知 $f(x)=ax+3$，$g(x)=x^2-b$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有相同的零点 $x=-\frac{3}{a}$，所以 $\frac{9}{a^2}-b=0$，即 $a^2b=9$，故选 B.

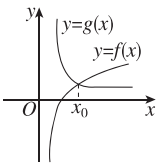
2. B ［解析］设 $1-y=t$，则 $y=1-t$，则 $\ln(1-y)-y+3=\ln t+t+2=0$，又 $f(x)=x+\ln x+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以由 $f(x)=f(t)=0$ 得 $x=t$，故 $y=1-t=1-x$，所以 $x+y=1$. 故选 B.

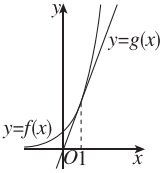
3. C ［解析］设 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-2a-b)(a,b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq0)$，因为当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，所以有以下两种情况：①$f(x)$ 的三个零点 $a,b,2a+b$ 均在 $(-\infty,0)$ 内，则 $a<0,b<0$；②$f(x)$ 有一个不变号零点在 $[0,+\infty)$ 内，因为 $b\neq2a+b$，所以 $\begin{cases}a=2a+b>0,\\b<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b>0,\\2a+b<0\end{cases}$（舍去），得 $\begin{cases}a+b>0,\\b<0,\end{cases}$ 综上所述，必有 $b<0$.

4. $-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$ ［解析］由题知 $y=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$ 与 $y=\cos(ax+b)$ 的图象关于 x 轴对称，则 $\cos(ax+b)=-\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi x+\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $a=\pi$，不妨取 $b=\frac{3\pi}{4}$，进而得 $\sin(a+b)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin(a-b)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

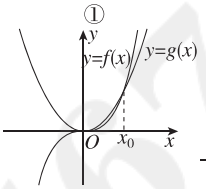
5. B ［解析］函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由 $0<x<1$ 得 $\ln x<0$，由 $x=1$ 得 $\ln x=0$，由 $x>1$ 得 $\ln x>0$，要使 $f(x)\geqslant0$，则对于二次函数 $y=x^2+ax+b$，当 $0<x<1$ 时，$y\leqslant0$，当 $x>1$ 时，$y\geqslant0$，所以 $x=1$ 为该二次函数的一个零点，易得 $b=-a-1$，则 $y=x^2+ax-(a+1)=(x-1)[x+(a+1)]$，又其图象开口向上，所以只需 $-(a+1)\leqslant0$，即 $a+1\geqslant0$，解得 $a\geqslant-1$，故 a 的最小值为 -1. 故选 B.

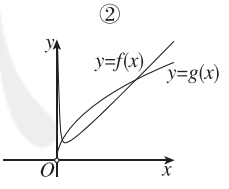
6. AC ［解析］根据题意得，若存在 $x_0\in I$，使得对任意 $x\in I$，当 $x\geqslant x_0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，当 $x\leqslant x_0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，则称 $f(x),g(x)$ 构成“M 函数对”. 对于 A，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，则 $I=(0,+\infty)$，作出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 上的大致图象如图①，由图可知，A 选项的两个函数能构成“M 函数对”；对于 B，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $I=\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x$，$g'(x)=e$，当 $f'(x)=g'(x)$ 时，可得 $e^x=e$，解得 $x=1$，当 $x=1$ 时，$f(1)=e=g(1)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象相切于点 $(1,1)$，作出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 上的大致图象如图②，由图可知，不存在 x_0，使得当 $x\leqslant x_0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，B 选项的两个函数不能构成“M 函数对”；对于 C，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $I=\mathbf{R}$，作出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 上的大致图象如图③，由图可知，C 选项的两个函数能构成“M 函数对”；对于 D，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，则 $I=(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=2$，$g(1)=3$，作出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 上的大致图象如图④，由图可知，$g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象在 I 上有两个交点，D 选项的两个函数不能构成“M 函数对”. 故选 AC.





①　②





③　④

7. AC ［解析］原问题等价于不等式 $(x-e^a)(x-a)(x-b)\geqslant0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，又 $e^a\neq a$，所以 $e^a=b$，且 $a\leqslant0$，所以 $b\in(0,1]$. 故选 AC.

8. ACD ［解析］由 $ax^3+3x^2-abx-3b\leqslant0$，得 $ax(x^2-b)+3(x^2-b)\leqslant0$，所以 $(ax+3)(x^2-b)\leqslant0$，因为 $b>0$，所以当 $0<x<\sqrt{b}$ 时，$x^2-b<0$，当 $x>\sqrt{b}$ 时，$x^2-b>0$，又对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $ax^3+3x^2-abx-3b\leqslant0$ 恒成立，所以当 $0<x<\sqrt{b}$ 时，$ax+3\geqslant0$，当 $x>\sqrt{b}$ 时，$ax+3\leqslant0$，所以 $x=\sqrt{b}$ 为函数 $y=ax+3$ 的零点，且 $a<0$，所以 $a\sqrt{b}+3=0$，可得 $a^2b=9$，故 A 正确，B 错误. 因为 $a\sqrt{b}+3=0$，所以 $a=\frac{-3}{\sqrt{b}}$，所以 $a^2+4b=\frac{9}{b}+4b\geqslant2\sqrt{\frac{9}{b}\cdot4b}=12$，当且仅当 $\frac{9}{b}=4b$，即 $b=\frac{3}{2}$ 时，等号成立，所以 a^2+4b 的最小值为 12，故 C 正确. $a^2+ab+3a+b=\frac{9}{b}+b\left(-\frac{3}{\sqrt{b}}\right)+3\left(-\frac{3}{\sqrt{b}}\right)+b=b+\frac{9}{b}-3\left(\sqrt{b}+\frac{3}{\sqrt{b}}\right)$，令 $t=\sqrt{b}+\frac{3}{\sqrt{b}}$，因为 $\sqrt{b}+\frac{3}{\sqrt{b}}\geqslant2\sqrt{\sqrt{b}\cdot\frac{3}{\sqrt{b}}}=2\sqrt{3}$，当且仅当 $\sqrt{b}=\frac{3}{\sqrt{b}}$，即 $b=3$ 时，等号成立，所以 $t\geqslant2\sqrt{3}$，由 $t=\sqrt{b}+\frac{3}{\sqrt{b}}$，得 $t^2=\left(\sqrt{b}+\frac{3}{\sqrt{b}}\right)^2=b+\frac{9}{b}+6$，所以 $b+\frac{9}{b}=t^2-6$，所以 $b+\frac{9}{b}-3\left(\sqrt{b}+\frac{3}{\sqrt{b}}\right)=t^2-3t-6$. 因为函数 $y=t^2-3t-6$ 的图象的对称轴为直线 $t=\frac{3}{2}$，所以当 $t\in[2\sqrt{3},+\infty)$ 时，y 随 t 的增大而增大，所以当 $t=2\sqrt{3}$ 时，$y=t^2-3t-6$ 取得最小值，最小值为 $(2\sqrt{3})^2-6\sqrt{3}-6=6-6\sqrt{3}$，所以 $a^2+ab+3a+b$ 的最小值为 $6-6\sqrt{3}$，故 D 正确，故选 ACD.

9. 0 ［解析］因为 $y=\ln|x+a|$ 有两个变号零点 $-a-1,-a+1$，所以根据题意得 $y=|x|+a^2-1$ 也有两个变号零点

$-a-1,-a+1$，故 $\begin{cases}|a+1|+a^2-1=0,\\|a-1|+a^2-1=0,\end{cases}$ 解得 $a=0$.

10. -1 ［解析］由题意得 $f'(x)=(x+m+1)e^x-x-(m+1)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $(x+m+1)(e^x-1)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则函数 $y=e^x-1$ 的零点 0 也是函数 $y=x+m+1$ 的零点，所以 $m+1=0$，解得 $m=-1$.

第 15 讲　函数模型及其应用

1. D ［解析］游泳池原有一定量的水，故函数图象不过原点，排除 A,C；过了一段时间关闭进水阀，再过一段时间打开排水阀排水，故函数值有一段时间不变，排除 B. 故选 D.

2. C ［解析］设购买的件数为 x，花费为 y 元，则 $y=\begin{cases}37x,1\leqslant x\leqslant 10,\\32x,11\leqslant x\leqslant 50,\\30x,51\leqslant x\leqslant 100,\\27x,101\leqslant x\leqslant 300,\\25x,x>300.\end{cases}$ 当 $x=107$ 时，$y=27\times 107=2889<2900$，当 $x=108$ 时，$y=27\times 108=2916>2900$，所以张师傅最多可购买这种玩具 107 件，故选 C.

3. D ［解析］设该商场在一周内进货 B 种电器的台数为 x，则 $x\geqslant 2$，一周内进货 A 种电器的台数为 $6-x$. 设该商场在一周内销售 A,B 两种电器的总利润为 y 万元，由题意可得 $\begin{cases}x\geqslant 2,\\x\leqslant 2(6-x),\end{cases}$ 可得 $2\leqslant x\leqslant 4$，且 $x\in\mathbf{N}$，则 $y=0.2(6-x)+0.25x=0.05x+1.2$，故 $y_{max}=0.05\times 4+1.2=1.4$. 故选 D.

4. B ［解析］由题意可得，$Q_0e^{-0.0025t}=\frac{1}{4}Q_0$，则 $e^{-0.0025t}=\frac{1}{4}$，则 $e^{0.0025t}=4$，所以 $0.0025t=2\ln 2\approx 1.38$，可得 $t\approx 552$，故臭氧含量减少初始量的 $\frac{3}{4}$ 大约需要 552 年. 故选 B.

5. 61.6 ［解析］由题可得，两人把商品合并由小昭一次性付款，实际付款为 $(70+280)\times 0.8=280$(元)，他们分别支付共付款 $70+280\times 0.9=322$(元)，故节省了 $322-280=42$(元)，故小敏需要给小昭 $70-42\times\frac{70}{70+280}=61.6$(元).

6. 0.6 ［解析］设电价定为 x 元/(kW·h)，$x\in[0.55,0.75]$，则由题意可得 $(0.8-0.3)a\times 1.2\leqslant\left(a+\frac{0.2a}{x-0.4}\right)(x-0.3)$，整理可得 $(x-0.5)(x-0.6)\geqslant 0$，又 $x\in[0.55,0.75]$，故 $x\in[0.6,0.75]$，故最低的电价可定为 0.6 元/(kW·h).

7. D ［解析］结合图象逐一验证：当 $T=220$，$\lg P=\lg 1026>3$ 时，由图象可知二氧化碳处于固态，故 A 错误；当 $T=270$，$\lg P=\lg 128\in(2,3)$ 时，由图象可知二氧化碳处于液态，故 B 错误；当 $T=300$，$\lg P=\lg 9987\approx 4$ 时，由图象可知二氧化碳处于固态，故 C 错误；当 $T=360$，$\lg P=\lg 729\in(2,3)$ 时，由图象可知二氧化碳处于超临界状态，故 D 正确. 故选 D.

8. B ［解析］当 $d=20$ 时，$\Delta L_1=10\lg(100\pi)$，当 $d=40$ 时，$\Delta L_2=10\lg(400\pi)$，则 $\Delta L_2-\Delta L_1=10\lg(400\pi)-10\lg(100\pi)=20\lg 2=20(\lg 10-\lg 5)\approx 20\times(1-0.7)=6$. 故选 B.

9. BC ［解析］对于 A，当打车距离 x 满足 $3<x<10$ 时，甲方案对应的函数图象在乙方案对应的函数图象的下方，故当打车距离为 8 千米时，乘客选择甲方案省钱，故 A 错误；对于 B，当打车距离为 10 千米时，支付费用均为 12 元，因此乘客选择甲、乙方案均可，故 B 正确；对于 C，当打车距离为 3 千米以上时，甲方案每千米增加的费用为 $\frac{12-5}{10-3}=1$(元)，乙方案每千米增加的费用为 $\frac{12-7}{10-3}=\frac{5}{7}$(元)，故甲方案每千米增加的费用比乙方案多，故 C 正确；对于 D，由题图可知，甲方案中，当打车距离在 3 千米内(含 3 千米)时，付费 5 元，当打车距离大于 3 千米时，每增加 1 千米费用增加 1 元，故 D 错误. 故选 BC.

10. BD ［解析］对于 A，由题意得 $N(t)=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$，又 $N(t)=N_0e^{-\frac{t}{\tau}}$，故 $N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}=N_0e^{-\frac{t}{\tau}}$，两边取对数得 $\frac{t}{T}\ln 0.5=-\frac{t}{\tau}$，则 $T=\tau\ln 2$，故 A 错误；对于 B，由 A 可知，T 与 τ 成正比例关系，故 B 正确；对于 C，由 B 可知，T 与 τ 成正比例关系，因为铀 234 的 τ 值小于铀 235 的 τ 值，所以 $T_1<T_2$，故 C 错误；对于 D，$T_3=6.475\times 10^9\ln 2$，$T_1=3.558\times 10^5\ln 2$，故 $\frac{T_3}{10\,000T_1}=\frac{6.475\times 10^9\ln 2}{3.558\times 10^9\ln 2}>1$，故 D 正确. 故选 BD.

11. 2.5 ［解析］设从 t_1 开始观察，在 t_2 时，该池塘甲种微生物的数量增加到原来的 3 倍，则 $e^{0.44t_2}=3e^{0.44t_1}$，所以 $e^{0.44(t_2-t_1)}=3$，则有 $0.44(t_2-t_1)=\ln 3$，所以 $t_2-t_1=\frac{\ln 3}{0.44}\approx 2.5$，故需要的时间约为 2.5 天.

12. 74 ［解析］由题知 $L=0.5\times D^{\frac{G}{18}}$，依题意得 $0.4=0.5\times D^{\frac{18}{18}}$，则 $D=\frac{4}{5}$，则 $L=0.5\times\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{G}{18}}$. 由 $L=0.5\times\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{G}{18}}<0.2$，得 $G>18\log_{\frac{4}{5}}\frac{2}{5}=\frac{18(\lg 5-\lg 2)}{\lg 5-2\lg 2}=\frac{18(1-2\lg 2)}{1-3\lg 2}\approx 73.9$，所以所需的训练迭代轮数至少为 74.

13. 解：(1) 由已知可得 $f(x)=\begin{cases}-x^2+49x-205,10\leqslant x<20,\\-30\ln x+24x+5,x\geqslant 20,\end{cases}$

又 $g(x)=25x-f(x)-5$，所以当 $x\in[10,20)$ 时，$g(x)=25x-(-x^2+49x-205)-5=x^2-24x+200$，当 $x\in[20,+\infty)$ 时，$g(x)=25x-(-30\ln x+24x+5)-5=30\ln x+x-10$，

故 $g(x)=\begin{cases}x^2-24x+200,10\leqslant x<20,\\30\ln x+x-10,x\geqslant 20.\end{cases}$

(2) 当 $x\in[10,20)$ 时，$g(x)=x^2-24x+200=(x-12)^2+56$，$g(x)_{min}=g(12)=56$. 当 $x\in[20,+\infty)$ 时，$g(x)=30\ln x+x-10$，所以 $g'(x)=\frac{30}{x}+1>0$，所以当 $x\in[20,+\infty)$ 时，$g(x)$ 单调递增，故 $g(x)_{min}=g(20)=30\ln 20+20-10=30\ln 20+10\approx 100$.

因为 $56<100$，所以当生产量为 12 吨时，总利润最小，最小总利润为 56 千元.

14. 解：(1) 由题意可得，$k\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}+60=k\lg\frac{1000P}{2\times 10^{-5}}$，即 $k\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}+60=k\left(3+\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}\right)$，所以 $3k=60$，解得 $k=20$，故声压级 SPL 关于声压 P 的函数解析式为 $SPL=20\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}$.

(2) 不会干扰我们正常的学习，理由如下：当 $SPL=40$ 时，由 $20\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}=40$，得 $\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}=2$，可得 $P_1=P_2=2\times 10^{-3}$，所以 $P=\sqrt{P_1^2+P_2^2}=\sqrt{2}P_1=2\sqrt{2}\times 10^{-3}$，

将其代入 $SPL=20\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}$ 可得 $SPL=20\lg\frac{2\sqrt{2}\times 10^{-3}}{2\times 10^{-5}}=20\lg(\sqrt{2}\times 10^2)=40+10\lg 2\approx 43<45$，

故不会干扰我们正常的学习.

第三单元　一元函数的导数及其应用

第 16 讲　导数的概念及其意义、导数的运算

1. D ［解析］对于 A，$4'=0$，故 A 错误；对于 B，$(3^x)'=3^x\cdot\ln 3$，故 B 错误；对于 C，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，故 C 错误；对于 D，$(x^5)'=5x^4$，故 D 正确.

2. B ［解析］函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率等于 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4}{2}=2$. 由 $f(x)=x^2$，得 $f'(x)=2x$，所以 $f'(m)=2m$. 因为函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率等于 $x=m$ 时的瞬时变化率，所以 $2=2m$，解得 $m=1$.

3. B ［解析］由函数 $f(x)=x^4-3x^2$，可得 $f'(x)=4x^3-6x$，所以 $f'(-1)=2$ 且 $f(-1)=-2$，所以所求切线方程为 $y+2=2(x+1)$，即 $2x-y=0$. 故选 B.

4. C ［解析］因为 $f(x)=2xf'\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin x$，所以 $f'(x)=2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos x$，令 $x=\frac{\pi}{3}$，则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}$，解得 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

5. D ［解析］令 $y=f(x)=ae^x+x\ln x$，则 $f'(x)=ae^x+\ln x+1$，由题意知 $\begin{cases}f(1)=2+b,\\f'(1)=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ae=2+b,\\ae+1=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=e^{-1},\\b=-1.\end{cases}$

6. A ［解析］$f'(x)=\frac{(e^x+2\cos x)(1+x^2)-2x(e^x+2\sin x)}{(1+x^2)^2}$，则切线的斜率 $k=f'(0)=3$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=3x+1$，从而可知切线与 x 轴、y 轴的交点分别为 $\left(-\frac{1}{3},0\right)$，$(0,1)$，所以切线与两坐标轴所围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{6}$.

7. $\frac{1}{2}$ ［解析］由题得 $f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$，$\therefore f'(1)=1$，$\therefore\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$.

8. D ［解析］因为 $y'=\frac{(\sin x+x\cos x)e^x-(x\sin x)e^x}{e^{2x}}=\frac{(1-x)\sin x+x\cos x}{e^x}$，所以 $y'\big|_{x=0}=0$，又曲线 $y=\frac{x\sin x}{e^x}$ 在原点处的切线与直线 $3x-ay+1=0$ 垂直，所以直线 $3x-ay+1=0$ 的斜率不存在，即 $a=0$. 故选 D.

9. A ［解析］因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$，两边求导，可得 $[f(x)]'=[f(-x)]'$，即 $f'(x)=$

$f'(-x)\cdot(-x)'$，所以 $f'(x)=-f'(-x)$. 又 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x-2y+1=0$，所以 $f'(1)=\frac{1}{2}$，所以 $f'(-1)=-f'(1)=-\frac{1}{2}$. 故选 A.

10. A [解析] 设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $(x_1,\ln x_1)$ 且 $x_1>0$，与曲线 $y=-\ln(-x)$ 相切于点 $(x_2,-\ln(-x_2))$ 且 $x_2<0$，因为 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$，$y'=[-\ln(-x)]'=-\frac{1}{x}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_1,\ln x_1)$ 处的切线方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$，曲线 $y=-\ln(-x)$ 在点 $(x_2,-\ln(-x_2))$ 处的切线方程为 $y+\ln(-x_2)=-\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=-\frac{1}{x_2}x+1-\ln(-x_2)$，则 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=-\frac{1}{x_2},\\ \ln x_1-1=1-\ln(-x_2),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=e,\\ x_2=-e,\end{cases}$ 故 $k=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{e}$，$b=\ln x_1-1=0$，故选 A.

11. ABC [解析] 对于 A，由 $f(x)=\sin x+\cos x$，得 $f'(x)=\cos x-\sin x$，则 $f''(x)=-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x)$，因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin x>0$，$\cos x>0$，所以 $f''(x)=-(\sin x+\cos x)<0$，所以此函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是凸函数；对于 B，由 $f(x)=\ln x-2x$，得 $f'(x)=\frac{1}{x}-2$，则 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$，因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，所以此函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是凸函数；对于 C，由 $f(x)=-x^3+2x-1$，得 $f'(x)=-3x^2+2$，则 $f''(x)=-6x$，因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f''(x)=-6x<0$，所以此函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是凸函数；对于 D，由 $f(x)=-xe^{-x}$，得 $f'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}$，则 $f''(x)=e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}=(2-x)e^{-x}$，因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f''(x)=(2-x)e^{-x}>0$，所以此函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上不是凸函数. 故选 ABC.

12. $\frac{1}{4}$ [解析] 设 $f(x)=\frac{ax+1}{e^x}$，则 $f'(x)=\frac{-ax+a-1}{e^x}$，设切点为 $\left(x_0,\frac{ax_0+1}{e^{x_0}}\right)$，则 $f'(x_0)=\frac{-ax_0+a-1}{e^{x_0}}$，所以切线方程为 $y-\frac{ax_0+1}{e^{x_0}}=\frac{-ax_0+a-1}{e^{x_0}}(x-x_0)$，又该切线过原点，所以 $0-\frac{ax_0+1}{e^{x_0}}=\frac{-ax_0+a-1}{e^{x_0}}(0-x_0)$，整理得 $ax_0^2+x_0+1=0$①. 因为曲线 $y=f(x)$ 有且仅有一条过原点的切线，所以方程①只有一个解，故 $\Delta=1-4a=0$，解得 $a=\frac{1}{4}$.

13. $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ [解析] 由题意得 $M(\ln m,m)$，则圆心 M 在曲线 $y=e^x$ 上，又圆 M 的半径为 $\frac{1}{2}$，故 $|PQ|$ 的最小值等于 $|MQ|$ 的最小值减去 $\frac{1}{2}$. 设 $Q(n,\ln n)$，因为曲线 $y=e^x$ 与曲线 $y=\ln x$ 关于直线 $y=x$ 对称，所以 $|MQ|$ 的最小值等于 Q 到直线 $y=x$ 的距离的最小值的 2 倍，由 $y=\ln x$，可得 $y'=\frac{1}{x}$，令 $\frac{1}{n}=1$，解得 $n=1$，故曲线 $y=\ln x$ 在点 $Q(1,0)$ 处的切线与直线 $y=x$ 平行，此时 $Q(1,0)$ 到直线 $y=x$ 的距离最小，最小值为 $\frac{|1-0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $|MQ|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\times2=\sqrt{2}$，则 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

14. 解：因为 $f(x)=ax+\sin x$，
所以 $f'(x)=a+\cos x$.
因为函数 $f(x)=ax+\sin x$ 的图象上存在两条互相垂直的切线，所以不妨设在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处的切线互相垂直，则 $(a+\cos x_1)\cdot(a+\cos x_2)=-1$，
即 $a^2+(\cos x_1+\cos x_2)a+\cos x_1\cos x_2+1=0$①.
因为 a 的值一定存在，即方程①一定有解，所以 $\Delta=(\cos x_1+\cos x_2)^2-4(\cos x_1\cos x_2+1)\geqslant0$，
即 $(\cos x_1-\cos x_2)^2\geqslant4$，解得 $\cos x_1-\cos x_2\geqslant2$ 或 $\cos x_1-\cos x_2\leqslant-2$，
又 $|\cos x|\leqslant1$，所以有 $\cos x_1=1$，$\cos x_2=-1$ 或 $\cos x_1=-1$，$\cos x_2=1$，
所以方程①变为 $a^2=0$，所以 $a=0$.

15. 解：(1) 因为 $f'(x)=6x^2-3$，所以 $f'(0)=-3$，又 $f(0)=0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-3x$.
(2) 设切点为 (x_0,y_0)，则 $f'(x_0)=6x_0^2-3$，所以切线方程为 $y-y_0=(6x_0^2-3)(x-x_0)$，将 $y_0=2x_0^3-3x_0$ 代入，整理可得 $y=3(2x_0^2-1)x-4x_0^3$，
又点 $P(-1,t)$ 在切线上，
所以 $t=-3(2x_0^2-1)-4x_0^3=-4x_0^3-6x_0^2+3$(*).
要使过点 $P(-1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则方程(*)有 3 个解，
令 $g(x)=-4x^3-6x^2+3$，则 $g'(x)=-12x^2-12x=-12x(x+1)$.
令 $g'(x)>0$，可得 $-1<x<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增；
令 $g'(x)<0$，可得 $x<-1$ 或 $x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 所以 $g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值，在 $x=0$ 处取得极大值，
又 $g(-1)=1$，$g(0)=3$，所以 $1<t<3$.

16. ACD [解析] 由题得 $\begin{cases}kx_1=\ln x_1=y_1,\\ kx_2=\ln x_2=y_2,\end{cases}$ 所以 $kx=\ln x$，即 $k=\frac{\ln x}{x}$ 有两个根 x_1，x_2. 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，故当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(e)=\frac{1}{e}$，又当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，直线 $y=k$ 与 $f(x)$ 的图象有两个交点，所以 $0<k<\frac{1}{e}$，故 A 正确. 易知曲线 $y=\ln x$ 在点 M,N 处的切线方程分别为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，由 $\begin{cases}y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1),\\ y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2),\end{cases}$ 得 $\ln x_2-\ln x_1=\frac{x}{x_1}-\frac{x}{x_2}$，解得 $x=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}}$，即 $x_0=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}}=x_1x_2\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，因为 $k=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，所以 $x_0=x_1x_2k$，即 $x_1x_2=\frac{1}{k}x_0$，故 B 错误. 因为 $k=\frac{y_1}{x_1}=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，所以 $x_2\ln x_1=x_1\ln x_2$. 因为 $P(x_0,y_0)$ 为两切线的交点，所以 $y_0=\ln x_1+\frac{1}{x_1}x_0-1=\ln x_1+x_2\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}-1=\frac{x_2\ln x_1-x_1\ln x_1+x_2\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_2-x_1}-1=\frac{x_2\ln x_2-x_1\ln x_1}{x_2-x_1}-1$，所以 $y_0+1=\frac{x_2\ln x_2-x_1\ln x_1}{x_2-x_1}$，所以 $y_1+y_2=\ln x_1+\ln x_2=\frac{(\ln x_1+\ln x_2)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2\ln x_1-x_1\ln x_1+x_2\ln x_2-x_1\ln x_2}{x_2-x_1}=\frac{x_2\ln x_2-x_1\ln x_1}{x_2-x_1}=y_0+1$，故 C 正确. 因为 $kx_1=y_1$，所以 $\ln k+\ln x_1=\ln y_1$，所以 $\ln k+y_1=\ln y_1$，同理得 $\ln k+y_2=\ln y_2$，则 $\ln y_1-y_1=\ln y_2-y_2$，则 $\frac{y_2-y_1}{\ln y_2-\ln y_1}=1$，由均值对数不等式得 $\frac{y_2-y_1}{\ln y_2-\ln y_1}>\sqrt{y_1y_2}$，所以 $y_1y_2<1$，故 D 正确. 故选 ACD.

17. 63 [解析] 因为二次函数 $f(x)$ 有两个不相等的零点 b,c，所以设 $f(x)=a(x-b)(x-c)(a\neq0)$，则 $f'(x)=a(2x-b-c)$，所以 $f'(x_n)=a(2x_n-b-c)$，所以 $f(x)$ 的图象在 $x=x_n$ 处的切线方程为 $y-f(x_n)=a(2x_n-b-c)(x-x_n)$，其中 $f(x_n)=a(x_n-b)(x_n-c)$，令 $y=0$，则 $x_{n+1}=\frac{a\cdot x_n(2x_n-b-c)-f(x_n)}{a(2x_n-b-c)}=\frac{ax_n^2-abc}{a(2x_n-b-c)}=\frac{x_n^2-bc}{2x_n-b-c}$. 因为 $\frac{x_{n+1}-b}{x_{n+1}-c}=\frac{x_n^2-bc-b(2x_n-b-c)}{x_n^2-bc-c(2x_n-b-c)}=\frac{x_n^2-2bx_n+b^2}{x_n^2-2cx_n+c^2}=\frac{(x_n-b)^2}{(x_n-c)^2}$，所以 $\ln\frac{x_{n+1}-b}{x_{n+1}-c}=2\ln\frac{x_n-b}{x_n-c}$，即 $a_{n+1}=2a_n$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为 $\frac{1-2^6}{1-2}=63$.

第 17 讲　导数与函数的单调性

1. D [解析] 由图象可得 $f(x)$ 在 $[1,5]$ 上单调递减，在 $(5,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(2)<0$，$f'(3)<0$，$f'(6)>0$. 故选 D.

2. C [解析] 函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-4\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-3-\frac{4}{x}=\frac{x^2-3x-4}{x}=\frac{(x-4)(x+1)}{x}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<4$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,4)$. 故选 C.

3. B [解析] 当 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递减时，$f'(x)<0$ 在 (a,b) 上不一定恒成立，例如 $f(x)=-x^3$，显然 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，但 $f'(0)=-3\times0^2=0$；若 $f'(x)<0$ 在 (a,b) 上恒成立，设 $x_0\in(a,$

$b)$，则 $f(x)$ 的图象在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 $k=f'(x_0)<0$，所以 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递减. 所以“$f(x)$ 在 (a,b) 上单调递减”是“$f'(x)<0$ 在 (a,b) 上恒成立”的必要不充分条件. 故选 B.

4. A ［解析］$f'(x)=3x^2+2bx+c$，由题意知，$-1,3$ 是 $f'(x)=0$ 的两个根，$\therefore -1+3=-\dfrac{2b}{3}$，$-1\times 3=\dfrac{c}{3}$，$\therefore b=-3,c=-9$，$\therefore b+c=-12$. 故选 A.

5. D ［解析］$f'(x)=-\sin x+e^x$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $2>\ln 2>\ln\sqrt{e}=\dfrac{1}{2}$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f(\ln 2)<f(2)$，即 $b<c<a$. 故选 D.

6. $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ［解析］由已知得 $f'(x)=1-2\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，令 $f'(x)<0$，即 $1-2\sin x<0$，得 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. ［$-3,3$］ ［解析］由 $f(x)=x^3-tx^2+3x$，得 $f'(x)=3x^2-2tx+3$，因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $3x^2-2tx+3\geqslant 0$ 恒成立，则 $\Delta=4t^2-36\leqslant 0$，解得 $-3\leqslant t\leqslant 3$.

8. D ［解析］因为函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-a\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=\cos 2x+a\sin x\geqslant 0$ 在 $(0,\pi)$ 上恒成立，即 $1-2\sin^2 x+a\sin x\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,\pi)$ 恒成立. 令 $t=\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $t\in(0,1]$，所以 $a\geqslant 2t-\dfrac{1}{t}$ 对任意 $t\in(0,1]$ 恒成立，又因为 $y=2t-\dfrac{1}{t}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，所以 $a\geqslant 2-1=1$.

9. D ［解析］对于 A，若 $x<y$，则 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{y-x}{xy}>0$，则 $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$，不满足要求，故 A 错误；对于 B，由 $x+\ln y<y+\ln x$，得 $x-\ln x<y-\ln y$，令 $F(x)=x-\ln x$ $(x>0)$，则 $F'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，令 $F'(x)<0$，得 $0<x<1$，则 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，若 $0<x<y<1$，则 $F(x)>F(y)$，不满足要求，故 B 错误；对于 C，若 $x<y$，取 $x=\dfrac{\pi}{3}$，$y=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\sin x=\sin y$，不满足要求，故 C 错误；对于 D，由 $x-\cos y<y-\cos x$，得 $x+\cos x<y+\cos y$，令 $f(x)=x+\cos x$，则 $f'(x)=1-\sin x\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增，故 $x<y$，反之 $x<y$ 时也有 $x-\cos y<y-\cos x$ 成立，满足要求，故 D 正确. 故选 D.

10. D ［解析］观察图象知，函数 $f(x)$ 单调递减，所以 $f'(x)<0$，于是 $a<0$. 函数图象与 y 轴相切，则 x 从大于 0 的方向趋于 0 时，$f'(x)$ 趋于负无穷大，也即 $1+bf(0)$ 趋于 0，又 $f(0)>0$，所以 $b<0$，所以 $a<0,b<0$. 故选 D.

11. CD ［解析］由题意，$f'(x)=-x^2+x+2=-(x-2)(x+1)$，令 $f'(x)>0$，解得 $-1<x<2$，令 $f'(x)<0$，解得 $x<-1$ 或 $x>2$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,2)$ 上单调递增，在 $(-\infty,-1),(2,+\infty)$ 上单调递减. 若函数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$ 在区间 $(m-1,m+4)$ 上单调，则 $m+4\leqslant -1$ 或 $m-1\geqslant 2$ 或 $\begin{cases}m-1\geqslant -1,\\ m+4\leqslant 2,\end{cases}$ 所以 $m\leqslant -5$ 或 $m\geqslant 3$. 故选 CD.

12. $(-\infty,4)$ ［解析］因为函数 $f(x)=2\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-2x$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 上存在单调递增区间，所以 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-ax-2>0$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 上有解，即 $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x}>a$ 对 $x\in\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 有解. 令 $t=\dfrac{1}{x}\in\left(\dfrac{1}{4},2\right)$，则 $2t^2-2t>a$ 对 $t\in\left(\dfrac{1}{4},2\right)$ 有解. 令 $h(t)=2t^2-2t$，$t\in\left(\dfrac{1}{4},2\right)$，因为 $h(t)$ 的图象开口向上，对称轴方程为 $t=\dfrac{1}{2}$，所以由二次函数的性质可得 $h(t)<h(2)=4$，所以 $a<4$，即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,4)$.

13. $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ ［解析］不妨设 $x_1<x_2$，因为 $f(x)=x+a\ln x$，所以 $f'(x)=1+\dfrac{a}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，所以 $f(x_1)<f(x_2)$. 根据题意得 $f(x_2)-f(x_1)>\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}$，即 $f(x_2)+\dfrac{1}{x_2}>f(x_1)+\dfrac{1}{x_1}$，令 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x}=x+a\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $g(x_2)>g(x_1)$，所以 $g'(x)=\dfrac{x^2+ax-1}{x^2}\geqslant 0$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上恒成立，得 $a\geqslant\dfrac{1}{x}-x$ 对任意 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 恒成立. 令 $h(x)=\dfrac{1}{x}-x$，易知 $h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，所以当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，$h(x)<h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$，所以 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$.

14. 解：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a+2x=\dfrac{2x^2-ax+1}{x}$.

因为 $x>0$，所以当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，对于 $y=2x^2-ax+1$，$\Delta=a^2-8$，若 $0<a\leqslant 2\sqrt{2}$，即 $\Delta\leqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，若 $a>2\sqrt{2}$，令 $2x^2-ax+1=0$，得 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-8}}{4}>0$，

当 $0<x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x>\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}<x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

综上所述，当 $a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}\right)$，$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}\right)$ 上单调递减.

15. 解：(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{x-1}-x$，则 $f'(x)=e^{x-1}-1$. 当 $x>1$ 时，$f'(x)=e^{x-1}-1>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=e^{x-1}-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. 故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$.

(2) 由题知 $f'(x)=e^{x-1}-a(1+\ln x)+(a-1)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $e^{x-1}-a\ln x-1\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. 令 $g(x)=e^{x-1}-a\ln x-1$，则 $g'(x)=e^{x-1}-\dfrac{a}{x}(x>0)$.

① 当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)=e^{x-1}-\dfrac{a}{x}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)<g(1)=0$，不符合题意.

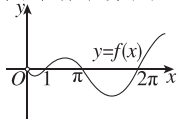
② 当 $a>0$ 时，令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=e^{x-1}+\dfrac{a}{x^2}>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g'(1)=1-a$.

(i) 当 $0<a<1$ 时，$g'(a)=e^{a-1}-1<0$，$g'(1)=1-a>0$，所以存在 $x_0\in(a,1)$，使得 $g'(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，因此当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)>0$，此时 $g(x)<g(1)=0$，不符合题意.

(ii) 当 $a=1$ 时，$g'(1)=1-a=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\geqslant g(1)=0$，符合题意.

(iii) 当 $a>1$ 时，$g'(a)=e^{a-1}-1>0$，$g'(1)=1-a<0$，所以存在 $x_1\in(1,a)$，使得 $g'(x_1)=0$，且当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，因此当 $x\in(1,x_1)$ 时，$g'(x)<0$，此时 $g(x)<g(1)=0$，不符合题意. 综上所述，a 的取值集合为 $\{1\}$.

16. BCD ［解析］对于 A，$f(x)=\sin x\cdot\ln x$，$x>0$，则 $f'(x)=\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$，故 $f'(\pi)=\cos\pi\cdot\ln\pi+\dfrac{\sin\pi}{\pi}=-\ln\pi$，A 错误. 对于 B，$y=\sin x$ 为周期函数，当 $x\to+\infty$ 时，$\ln x\to+\infty$，故 $f(x)=\sin x\cdot\ln x$ 的大致图象如图所示，结合图象可知，当 x 增大到一定数值 x_0 满足 $f(x_0)=2024$ 后，大于 x_0 的数将有无数个满足 $f(x)=2024$，B 正确. 对于 C，设 $P(x,\sin x\cdot\ln x)$ 为 $y=f(x)$ 的图象上任意一点，则 $k_{OP}=\dfrac{\sin x\cdot\ln x}{x}(x>0)$，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 0$，故 $k_{OP}\leqslant 0<\dfrac{1}{e}$；当 $x>1$ 时，$k_{OP}=\dfrac{\sin x\cdot\ln x}{x}\leqslant\dfrac{\ln x}{x}$，设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $1<x<e$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)\leqslant g(e)=\dfrac{1}{e}$，因为 $\sin x\leqslant 1$ 取等号的条件和 $g(x)\leqslant g(e)=\dfrac{1}{e}$ 取等号的条件不一致，所以 $k_{OP}<\dfrac{1}{e}$，C 正确. 对于 D，设 $u(x)=\ln x-x+1$，$x>1$，则 $u'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}<0$，故 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $u(x)<u(1)=0$，则 $\ln x<x-1$，$x>1$. 设 $h(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$，$x>1$，则 $h'(x)=f'(x)-x=\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}-x<\ln x+\dfrac{1}{x}-x<x-1+\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1-x}{x}<0$，故 $y=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，D 正确. 故选 BCD.



17. ABD [解析] 因为 $g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 的导函数，所以 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的可导函数. 因为 $g(x)+g(2-x)=0$，所以 $g(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，且 $f(x)=f(2-x)+C$（C 为常数），所以 $f(1)=f(1)+C$，解得 $C=0$，故 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 因为 $\dfrac{f(x)+g(x)}{x-1}>0$，所以当 $x>1$ 时，$f(x)+g(x)>0$，所以 $f(x)+f'(x)>0$，设 $h(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]>0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，同理 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减. 对于 A，因为 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(0)=1=f(2)$，故 A 正确；对于 B，$h(3)=\mathrm{e}^3 f(3)>h(2)=\mathrm{e}^2 f(2)=\mathrm{e}^2$，故 $f(3)>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故 B 正确；对于 C，当 $x>1$ 时，$h(x)>h(1)=\mathrm{e}f(1)=0$，当 $x<1$ 时，$h(x)>h(1)=0$，而 $x=1$ 时，$h(1)=0$，故 $h(x)\geqslant 0$ 恒成立，故 C 错误；对于 D，当 $0<x<1$ 时，$h(x)$ 单调递减，$h(0)=\mathrm{e}^0 f(0)=1$，$h(1)=0$，所以 $h(x)\in(0,1)$，故当 $0<x<1$ 时，$\mathrm{e}^x f(x)\in(0,1)$，而 $\mathrm{e}^x>1$，故 $f(x)\in(0,1)$，故 D 正确. 故选 ABD.

第 18 讲　导数与函数的极值、最值

1. B [解析] $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(1,\mathrm{e}]$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e}]$ 上的最大值为 $f(1)=\ln 1-1=-1$.

2. A [解析] $\because f(x)=-x\mathrm{e}^x$，$\therefore f'(x)=-(x+1)\mathrm{e}^x$，令 $f'(x)=0$ 可得 $x=-1$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>-1$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore f(x)_{\text{极大值}}=f(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故选 A.

3. C [解析] $f'(x)=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，无最大值和最小值，也无极值. 故选 C.

4. C [解析] 由 $f(x)=\cos x+x\sin x$ 得 $f'(x)=-\sin x+x\cos x+\sin x=x\cos x$，当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

5. ABD [解析] 由 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，可得 $f'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$，令 $f'(x)<0$，得 $x<-2$，令 $f'(x)>0$，得 $x>-2$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-2)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，故 A，B 正确；方程 $f(x)=2$ 的解的个数，即为 $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-2$ 的零点个数，易知 $g(x)$ 的单调性与 $f(x)$ 的单调性相同，且 $g(-2)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-2<0$，$g(1)=2\mathrm{e}-2>0$，即 $g(1)\cdot g(-2)<0$，故由函数零点存在定理得到存在 $x_0\in(-2,1)$，使得 $g(x_0)=0$，而当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-2$，显然 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上无零点，故 $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-2$ 只有 1 个零点，即 $f(x)=2$ 只有 1 个解，故 C 错误；令 $h(x)=f'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$，则 $h'(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=-3$，令 $h'(x)>0$，得 $x>-3$，令 $h'(x)<0$，得 $x<-3$，所以 $x=-3$ 是 $h(x)$ 的极值点，即导函数 $f'(x)$ 的极值点为 -3，故 D 正确. 故选 ABD.

6. 3 [解析] $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由图可得当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,3)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，故 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点. 当 $x\in(3,10)$ 时，$g(x)\geqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增，故 $x=3$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点. 当 $x\in(10,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，故 $x=10$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点. 所以 $f(x)$ 的极小值点为 3.

7. $\dfrac{16\sqrt{3}}{27}\pi$ [解析] 由题意，设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，则有 $c^2+b^2=4$，该圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot b^2\cdot c=\dfrac{1}{3}\pi\cdot(4-c^2)\cdot c$. 设 $f(x)=x\cdot(4-x^2)\ (0<x<2)$，则 $f'(x)=4-3x^2=-3\left(x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，故当 $x\in\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以 $V_{\max}=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(4-\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{16\sqrt{3}}{27}\pi$.

8. B [解析] 由图可知，两个函数图象都在 x 轴及其上方，所以 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以实线为 $y=f(x)$ 的图象，虚线为 $y=f'(x)$ 的图象，$f(0)=f'(0)=1$. 对于 A，$y'=f'(x)+1>0$，则 $y=f(x)+x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无最大值，A 错误；对于 B，$y'=\dfrac{\mathrm{e}^x[f(x)-f'(x)]}{[f(x)]^2}$，则 $y'|_{x=0}=\dfrac{\mathrm{e}^0[f(0)-f'(0)]}{[f(0)]^2}=0$，由图可知，当 $x<0$ 时，$f(x)-f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f(x)-f'(x)>0$，所以 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x=0$ 时，函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}$ 取得最小值 $\dfrac{\mathrm{e}^0}{f(0)}=1$，B 正确；对于 C，$y'=[f'(x)+f(x)]\mathrm{e}^x$，由图可知 $f(x)+f'(x)>0$，所以 $y=f(x)\cdot\mathrm{e}^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无最大值，C 错误；对于 D，$y'=\dfrac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}$，则 $y'|_{x=0}=\dfrac{f'(0)-f(0)}{\mathrm{e}^0}=0$，由图可知，当 $x<0$ 时，$f'(x)-f(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)-f(x)<0$，所以函数 $y=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=0$ 时，函数 $y=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ 取得最大值 $\dfrac{f(0)}{\mathrm{e}^0}=1$，D 错误. 故选 B.

9. C [解析] 由题意得，$\forall a,b\in[0,2]\ (a\neq b)$，不妨设 $a<b$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，又 $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，所以 $\lambda=f'(\xi)$. 因为 $f'(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^x-(-x-1)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，所以 $\lambda=f'(\xi)=\dfrac{\xi}{\mathrm{e}^\xi}$，又 $\xi\in(a,b)\subseteq(0,2)$，所以令 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，$x\in(0,2)$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，故 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，也是最大值，最大值为 $g(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故实数 λ 的最大值为 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

10. BCD [解析] 对于 A，由题意知 $f'(x)=3x^2-6x$. 令 $f'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x>2$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增；令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<2$，所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，所以 $f(x)$ 的极大值点为 0，故 A 错误. 对于 B，因为 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)=-4<0$，极大值为 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 有且仅有 2 个零点，故 B 正确. 对于 C，$f(2-x)+f(x)=(2-x)^3-3(2-x)^2+x^3-3x^2=-4$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,-2)$ 对称，故 C 正确. 对于 D，由 C 选项可知，$f\left(\dfrac{1}{2024}\right)+f\left(\dfrac{2}{2024}\right)+f\left(\dfrac{3}{2024}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{4046}{2024}\right)+f\left(\dfrac{4047}{2024}\right)=-4\times\dfrac{4047}{2}=-8094$，故 D 正确. 故选 BCD.

11. ABC [解析] $f(x)=(kx^2+1)\mathrm{e}^x$，当 $k=0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x$，A 选项正确. $f'(x)=(kx^2+2kx+1)\mathrm{e}^x$，令 $g(x)=kx^2+2kx+1\ (k\neq 0)$，则 $\Delta=4k^2-4k$，当 $0<k\leqslant 1$ 时，$\Delta\leqslant 0$，则 $f'(x)=(kx^2+2kx+1)\mathrm{e}^x\geqslant 0$，$f(x)=(kx^2+1)\mathrm{e}^x$ 单调递增；当 $k>1$ 时，$\Delta>0$，则 $f'(x)=(kx^2+2kx+1)\mathrm{e}^x=0$ 有两个不等根 x_1,x_2，且 $x_1x_2=\dfrac{1}{k}$，$x_1+x_2=-2$，所以 $x_1<0$，$x_2<0$，C 选项正确；当 $k<0$ 时，$\Delta>0$，则 $f'(x)=(kx^2+2kx+1)\mathrm{e}^x=0$ 有两个不等根 x_3,x_4，且 $x_3x_4=\dfrac{1}{k}$，$x_3+x_4=-2$，不妨令 $x_3<x_4$，则 $x_3<0$，$x_4>0$，B 选项正确. 故选 ABC.

12. $(3\mathrm{e},+\infty)$ [解析] 由 $f(x)=3x-t\ln x=0$，$x>0$，可得 $\dfrac{3}{t}=\dfrac{\ln x}{x}$，令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，依题意，函数 $f(x)=3x-t\ln x$ 存在两个零点，等价于函数 $y=\dfrac{3}{t}$ 与函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点. $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，故当 $x=\mathrm{e}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，且当 $x\to 0^+$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$ 且 $g(x)>0$，故要使函数 $y=\dfrac{3}{t}$ 与函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点，只需 $0<\dfrac{3}{t}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，解得 $t>3\mathrm{e}$.

13. $(-\infty,-3)$ [解析] 由 $f(x)=ax^2-2x+\ln x\ (x>0)$，求导得 $f'(x)=2ax-2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-2x+1}{x}$，由函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1,x_2，得方程 $2ax^2-2x+1=0$ 有两个不相等的正实根，则 $\begin{cases}\Delta=4-8a>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{1}{a}>0,\\ x_1x_2=\dfrac{1}{2a}>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<$

$\frac{1}{2}$，于是 $f(x_1)+f(x_2)=ax_1^2-2x_1+\ln x_1+ax_2^2-2x_2+\ln x_2=a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=-\frac{1}{a}-1-\ln(2a)$. 令 $h(a)=-\frac{1}{a}-1-\ln(2a)\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$，求导得 $h'(a)=\frac{1-a}{a^2}$，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$h'(a)>0$，故函数 $h(a)=-\frac{1}{a}-1-\ln(2a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，则 $h(a)<h\left(\frac{1}{2}\right)=-3$，又当 $a\to0^+$ 时，$h(a)\to-\infty$，所以 $f(x_1)+f(x_2)$ 的取值范围为 $(-\infty,-3)$.

14. 解：(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-a$，则 $f'(1)=1-a$，$f(1)=-a$，故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+a=(1-a)(x-1)$，即 $y=(1-a)x-1$.

当 $a=1$ 时，切线方程为 $y=-1$，不符合要求；当 $a\neq1$ 时，令 $x=0$，得 $y=-1$，令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{1-a}$，故 $\frac{1}{1-a}=-1$，解得 $a=2$. 综上，a 的值为 2.

(2) $\because f(x)=\ln x-ax$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$.

① 当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e]$ 上的最大值是 $f(e)=1-ae=-3$，解得 $a=\frac{4}{e}>0$，舍去；

② 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=\frac{1-ax}{x}=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，当 $0<\frac{1}{a}<e$，即 $a>\frac{1}{e}$ 时，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{a},e\right)$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},e\right)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=-1-\ln a=-3$，解得 $a=e^2$；

当 $e\leqslant\frac{1}{a}$，即 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递增，$\therefore f(x)$ 在 $(0,e]$ 上的最大值为 $f(e)=1-ae=-3$，

解得 $a=\frac{4}{e}>\frac{1}{e}$，舍去. 综上所述，存在 a 符合题意，此时 $a=e^2$.

15. 解：(1) 因为 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，

所以 $f'(x)=1-(3x^2+ax^3)e^{ax+b}$，

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$，

所以 $f(1)=-1+1=0$，$f'(1)=-1$，则 $\begin{cases}1-1^3\times e^{a+b}=0,\\1-(3+a)e^{a+b}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1.\end{cases}$

(2) 由(1)得 $g(x)=f'(x)=1-(3x^2-x^3)e^{-x+1}(x\in\mathbf{R})$，

则 $g'(x)=-x(x^2-6x+6)e^{-x+1}$，令 $x^2-6x+6=0$，解得 $x=3\pm\sqrt{3}$，不妨设 $x_1=3-\sqrt{3}$，$x_2=3+\sqrt{3}$，则 $0<x_1<x_2$.

易知 $e^{-x+1}>0$ 恒成立，所以令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$，令 $g'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x_1<x<x_2$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$，(x_1,x_2) 上单调递增，

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,3-\sqrt{3})$ 和 $(3+\sqrt{3},+\infty)$，单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$.

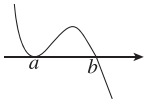
(3) 因为 $f(x)=x-x^3e^{-x+1}(x\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=1-(3x^2-x^3)e^{-x+1}$，由(2)知 $f'(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$，(x_1,x_2) 上单调递增.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)$ 单调递增，因为 $f'(-1)=1-4e^2<0$，$f'(0)=1>0$，即 $f'(-1)f'(0)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上存在唯一零点，不妨设为 x_3，则 $-1<x_3<0$，此时，当 $x<x_3$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，当 $x_3<x<0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有一个极小值点；当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)$ 单调递减，因为 $f'(x_1)=f'(3-\sqrt{3})<f'(1)=1-2<0$，即 $f'(0)f'(x_1)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上存在唯一零点，不妨设为 x_4，则 $0<x_4<x_1$，此时，当 $0<x<x_4$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，当 $x_4<x<x_1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上有一个极大值点；

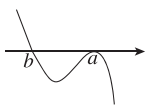
当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)$ 单调递增，因为 $f'(x_2)=f'(3+\sqrt{3})>f'(3)=1>0$，即 $f'(x_1)f'(x_2)<0$，所以 $f'(x)$ 在 (x_1,x_2) 上存在唯一零点，不妨设为 x_5，则 $x_1<x_5<x_2$，此时，当 $x_1<x<x_5$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，当 $x_5<x<x_2$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上有一个极小值点；当 $x>x_2=3+\sqrt{3}>3$ 时，$3x^2-x^3=x^2(3-x)<0$，所以 $f'(x)=1-(3x^2-x^3)e^{-x+1}>0$，则 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上无极值点. 综上，$f(x)$ 共有 3 个极值点.

16. D [解析] $f(x)=-\frac{1}{2}ae^{2x}+(a-1)e^x+x+a^2-\frac{1}{2}(a>0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=-ae^{2x}+(a-1)e^x+1=(ae^x+1)(-e^x+1)$. 当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(0)=a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{2}$，又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{2}\right]$. 令 $t=f(x)$，则 $t\in\left(-\infty,a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{2}\right]$，要使函数 $y=f[f(x)]$ 的值域为 $\left(-\infty,a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{2}\right]$，只需 $a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{2}\geqslant0$，解得 $a\geqslant1$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$，又 $a>0$，所以 $a\geqslant1$. 故选 D.

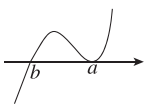
17. BD [解析] 易知 $f(x)$ 的零点为 $x=a$，$x=b$. ① 当 $-ab<0$ 且 $a<b$ 时，用“穿针引线法”可以得到函数 $f(x)$ 的大致图象如图，与题意不符；



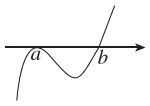
② 当 $-ab<0$ 且 $b<a$ 时，用“穿针引线法”可以得到函数 $f(x)$ 的大致图象如图，与题意相符，此时 $b<a<0$ 或 $0<b<a$；



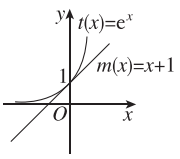
③ 当 $-ab>0$ 且 $b<a$ 时，用“穿针引线法”可以得到函数 $f(x)$ 的大致图象如图，与题意不符；



④ 当 $-ab>0$ 且 $a<b$ 时，用“穿针引线法”可以得到函数 $f(x)$ 的大致图象如图，与题意相符，此时 $a<0<b$. 综上所述，$0<b<a$ 或 $a<0<b$ 或 $b<a<0$.

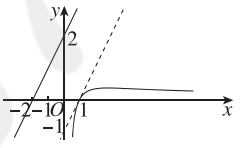


对于 A，若 $ab>a^2$，则当 $a>0$ 时，$0<a<b$，故 A 错误；对于 B，若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则当 $ab>0$ 时，$0<b<a$ 或 $b<a<0$，当 $ab<0$ 时，$a<0<b$，故 B 正确；对于 C，若 $a^2+b^2-4a+4b+7=(a-2)^2+(b+2)^2-1\leqslant0$，则 $(a-2)^2+(b+2)^2\leqslant1$，所以点 (a,b) 在圆心为 $(2,-2)$，半径为 1 的圆内(包括边界)，所以 $b<0<a$，故 C 错误；对于 D，若 $e^b=a+1$，作出函数 $t(x)=e^x$ 和函数 $m(x)=x+1$ 的图象如图，由图可得，$0<b<a$ 或 $b<a<0$，故 D 正确. 故选 BD.

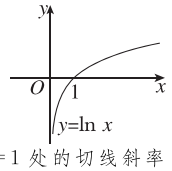


增分微练 4　利用切线解决最值范围问题

1. C [解析] 因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在同一坐标系中作出直线 $y=x+2$ 和 $f(x)$ 的图象如图. 由 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=1$，得 $x^2+\ln x-1=0$，易得函数 $y=x^2+\ln x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $x=1$ 为其零点，所以 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $y=x+2$ 平行，则当 M 的坐标为 $(1,0)$ 时，点 M 到直线 $y=x+2$ 的距离最小，由点到直线的距离公式可得 M 到直线 $y=x+2$ 的距离的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

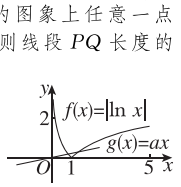


2. C [解析] 易知 $y=k(x-1)$ 的图象过定点 $(1,0)$，且点 $(1,0)$ 在 $y=\ln x$ 的图象上. $\because y=\ln x$，$\therefore y'=\frac{1}{x}$，$\therefore y=\ln x$ 的图象在 $x=1$ 处的切线斜率 $k=y'|_{x=1}=1$，作出 $y=\ln x$ 的图象如图. 结合图象可得，当 $k\leqslant0$ 时，$y=k(x-1)$ 与 $y=\ln x$ 的图象有且只有一个公共点，则 $k\leqslant0$ 符合题意；当 $0<k<1$ 时，$y=k(x-1)$ 与 $y=\ln x$ 的图象有两个公共点，则 $0<k<1$ 不符合题意；当 $k=1$ 时，$y=k(x-1)$ 与 $y=\ln x$ 的图象有且只有一个公共点，则 $k=1$ 符合题意；当 $k>1$ 时，$y=k(x-1)$ 与 $y=\ln x$ 的图象有两个公共点，则 $k>1$ 不符合题意. 综上所述，实数 k 的取值范围为 $k=1$ 或 $k\leqslant0$.



3. A [解析] 由圆的对称性可得，只需考虑圆心 $M(1,0)$ 到函数 $f(x)=e^x$ 的图象上任意一点的距离的最小值. 设 $f(x)$ 的图象上任意一点为 $N(m,e^m)$，$f(x)$ 的图象在点 $N(m,e^m)$ 处的切线为 l，因为 $f'(x)=e^x$，所以切线 l 的斜率为 e^m，当 $MN\perp l$ 时，圆心 $M(1,0)$ 到点 N 的距离最小，此时 $\frac{e^m}{m-1}=-e^{-m}$，则有 $e^{2m}+m-1=0$. 设 $g(x)=e^{2x}+x-1$，则 $g'(x)=2e^{2x}+1>0$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，所以 $m=0$，所以 $N(0,1)$，所以圆心 $M(1,0)$ 到 $f(x)$ 的图象上任意一点的距离的最小值为 $\sqrt{2}$，则线段 PQ 长度的最小值为 $\sqrt{2}-1$.

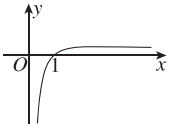
4. A [解析] 设 $g(x)=ax$，由题知函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=ax$ 的图象有 3 个公共点，当 $a\leqslant0$ 时，显然不符合题意，所以 $a>0$，作出 $y=f(x)$ 与



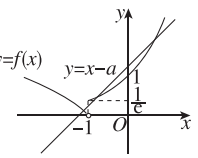
$g(x)=ax$ 的图象如图所示．当 $x\in\left[\frac{1}{3},1\right)$ 时，函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=ax$ 的图象必有 1 个公共点，则 $\frac{1}{3}a\leqslant-\ln\frac{1}{3}$，得 $a\leqslant3\ln3$；当 $x\in(1,3]$ 时，只需函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=ax$ 的图象有 2 个公共点．设过原点且与曲线 $y=\ln x$ 相切的切线为 l，切点为 $(x_0,\ln x_0)$，则 l 的斜率 $k=\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0}$，得 $x_0=\mathrm{e}$，则 $k=\frac{1}{\mathrm{e}}$，故 $a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 且 $3a\geqslant\ln3$，所以 $a\in\left[\frac{\ln3}{3},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$．综上，$a$ 的取值范围是 $\left[\frac{\ln3}{3},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$．

5. D ［解析］$(x-m)^2+(a\mathrm{e}^x-3m)^2$ 表示点 $A(x,a\mathrm{e}^x)$ 与点 $B(m,3m)$ 的距离的平方，点 A 在曲线 $y=a\mathrm{e}^x$ 上，点 B 在直线 $y=3x$ 上，∴$a>0$．设与直线 $y=3x$ 平行的直线与曲线 $y=a\mathrm{e}^x$ 相切于点 $P(x_0,a\mathrm{e}^{x_0})$，∵$y'=a\mathrm{e}^x$，∴$a\mathrm{e}^{x_0}=3$①．点 $A(x,a\mathrm{e}^x)$ 与点 $B(m,3m)$ 的距离的平方的最小值等于点 $P(x_0,a\mathrm{e}^{x_0})$ 到直线 $y=3x$ 的距离的平方，则 $\frac{|a\mathrm{e}^{x_0}-3x_0|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$，∴$|a\mathrm{e}^{x_0}-3x_0|=3$②．由①②得 $x_0=0$，$a=3$ 或 $x_0=2$，$a=3\mathrm{e}^{-2}$．故选 D.

6. C ［解析］因为函数 $f(x)=\ln x$ 与 $g(x)=ax^2-ax$ 的图象有两个不同交点，所以方程 $\ln x=ax^2-ax$ 有两个不同的解，所以 $\frac{\ln x}{x}=a(x-1)$ 有两个不同的解，所以函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 与函数 $y=a(x-1)$ 的图象有两个不同的交点．设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，又 $h(1)=0$，$h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，当 $x>1$ 时，$h(x)>0$，所以函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象如图．因为 $h'(1)=1$，所以函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$．观察图象可得，当 $a=1$ 时，$y=a(x-1)$ 与 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有且只有一个交点；当 $a\leqslant0$ 时，$y=a(x-1)$ 与 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有且只有一个交点；当 $a>1$ 或 $0<a<1$ 时，$y=a(x-1)$ 与 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点．综上可得，a 的取值范围是 $(0,1)\cup(1,+\infty)$．

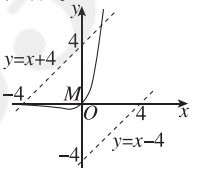


7. D ［解析］令 $g(x)=f(x)-x+a=0$，得 $f(x)=x-a$，则函数 $g(x)$ 的零点个数即为函数 $f(x)$ 与函数 $y=x-a$ 的图象的交点个数，作出函数 $f(x)$ 与函数 $y=x-a$ 的图象，如图所示．当直线 $y=x-a$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切时，因为 $y=\mathrm{e}^x$，所以 $y'=\mathrm{e}^x$，则 $\mathrm{e}^x=1$，得 $x=0$，所以切点坐标为 $(0,1)$，此时 $a=-1$．因为 $g(x)$ 存在 3 个零点，所以函数 $f(x)$ 与函数 $y=x-a$ 的图象有 3 个交点，所以 $\begin{cases}a<-1,\\-1-a>0,\\-1-a\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}},\end{cases}$ 解得 $-1-\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant a<-1$，所以 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}-1,-1\right)$．

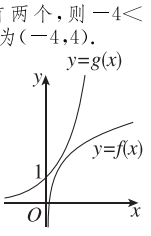


8. ACD ［解析］设 A,B 的横坐标分别为 x_1,x_2，则 $\mathrm{e}^{x_1}=\ln x_2+1=m$，因为 $\mathrm{e}^{x_1}>0$，所以 $m>0$，故 A 正确；当 $m=1$ 时，$x_1=0$，$x_2=1$，因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x$，$g'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $f'(x_1)=f'(0)=1$，$g'(x_2)=g'(1)=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 A 处的切线与曲线 $y=g(x)$ 在 B 处的切线斜率相等，两切线不相交，故 B 错误；$|AB|=x_2-x_1=\mathrm{e}^{m-1}-\ln m$，设 $h(m)=\mathrm{e}^{m-1}-\ln m(m>0)$，则 $h'(m)=\mathrm{e}^{m-1}-\frac{1}{m}(m>0)$，易知 $h'(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $h'(1)=0$，所以当 $m\in(0,1)$ 时，$h'(m)<0$，$h(m)$ 单调递减，当 $m\in(1,+\infty)$ 时，$h'(m)>0$，$h(m)$ 单调递增，所以 $|AB|_{\min}=h(m)_{\min}=h(1)=1$，故 C 正确；曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{x_1}(x-x_1)$，若此切线同时也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，可设切点坐标为 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases}y_0-\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{x_1}(x_0-x_1),\\y_0=\ln x_0+1,\\\mathrm{e}^{x_1}=\frac{1}{x_0},\end{cases}$ 消去 x_0,y_0 得 $(x_1-1)\mathrm{e}^{x_1}-x_1=0$，设 $\varphi(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-x$，则 $\varphi(-1)=-\frac{2}{\mathrm{e}}+1>0$，$\varphi(0)=-1<0$，$\varphi(2)=\mathrm{e}^2-2>0$，因为 $\varphi(x)$ 的图象是连续的，所以 $\varphi(x)$ 至少有两个零点，故 $(x_1-1)\mathrm{e}^{x_1}-x_1=0$ 有解，进而得到 m 的值是存在的且大于零的，故 D 正确．故选 ACD.

9. $(-4,4)$ ［解析］由函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$，可得 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，设斜率为 1 的直线与 $f(x)$ 的图象相切于点 $M(x_0,y_0)$，则 $f'(x_0)=1$，即 $(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}=1$，解得 $x_0=0$，则切点为 $M(0,0)$．当点 $M(0,0)$ 到直线 $y=x+a$ 的距离为 $2\sqrt{2}$ 时，可得 $\frac{|a|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，解得 $a=4$ 或 $a=-4$．由 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ 可得，当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to0$ 且 $f(x)<0$，当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以 $f(x)$ 的图象如图所示．当 $a=-4$ 时，函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的图象与直线 $y=x-4$ 不相交，从而函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的图象上有且仅有一个点到直线 $y=x-4$ 的距离为 $2\sqrt{2}$；当 $a=4$ 时，函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的图象与直线 $y=x+4$ 相交，从而函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的图象上有且仅有三个点到直线 $y=x+4$ 的距离为 $2\sqrt{2}$．综上，要使到直线 $y=x+a$ 的距离为 $2\sqrt{2}$ 的点 P 有且仅有两个，则 $-4<a<4$，即实数 a 的取值范围为 $(-4,4)$．



10. $[1,\mathrm{e}]$ ［解析］设 $f(x)=2+\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，依题意知只需求曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 的公切线斜率．$f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=\mathrm{e}^x$，设切点分别为 $(x_1,2+\ln x_1)$，(x_2,e^{x_2})，则切线方程为 $y-(2+\ln x_1)=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{x_1}x+1+\ln x_1$，$y-\mathrm{e}^{x_2}=\mathrm{e}^{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\mathrm{e}^{x_2}x+(1-x_2)\mathrm{e}^{x_2}$，所以 $\frac{1}{x_1}=\mathrm{e}^{x_2}$①，$1+\ln x_1=(1-x_2)\mathrm{e}^{x_2}$②，由①得 $x_2=-\ln x_1$，代入②得 $(1+\ln x_1)\left(1-\frac{1}{x_1}\right)=0$，则 $x_1=1$ 或 $x_1=\frac{1}{\mathrm{e}}$，故公切线的斜率为 1 或 e．作出曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 如图，由图可知 $a\in[1,\mathrm{e}]$．



增分微练 5　构造法在解决函数、导数问题中的应用

1. B ［解析］设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减．原不等式可化为 $\frac{\ln x}{x}>\frac{\ln2}{2}$，即 $f(x)>f(2)$，结合 $f(2)=f(4)$，可得 $2<x<4$，所以原不等式的解集为 $(2,4)$．故选 B.

2. B ［解析］由 $f(x)\mathrm{e}^x>\mathrm{e}$，$f(1)=1$，可得 $f(x)\mathrm{e}^x>\mathrm{e}f(1)$，令 $g(x)=f(x)\mathrm{e}^x$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)+f(x)]$，又 $f(x)+f'(x)>0$，所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．原不等式等价于 $g(x)>g(1)$，所以 $x>1$，则原不等式的解集为 $(1,+\infty)$．

3. D ［解析］因为 $2024^m=2025$，所以 $m=\log_{2024}2025>1$．构造函数 $f(x)=x^m-x-1,x\in[1,2025]$，则 $f'(x)=mx^{m-1}-1$．令 $g(x)=f'(x)=mx^{m-1}-1,x\in[1,2025]$，则 $g'(x)=m(m-1)x^{m-2}>0$，则 $g(x)=f'(x)$ 在 $[1,2025]$ 上单调递增，得 $f'(x)\geqslant f'(1)=m-1>0$，则 $f(x)$ 在 $[1,2025]$ 上单调递增．又 $f(2024)=0$，$f(2023)=x$，$f(2025)=y$，所以 $x<0<y$．故选 D.

4. A ［解析］构造函数 $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$，则 $f'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，当 $x=1$ 时，$f'(1)=0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减．因为 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}=f(1)$，$b=\frac{\ln3}{3}=\frac{\ln3}{\mathrm{e}^{\ln3}}=f(\ln3)$，$c=\mathrm{e}^{-2+\ln2}=\frac{2}{\mathrm{e}^2}=f(2)$，且 $1<\ln3<2$，所以 $f(1)>f(\ln3)>f(2)$，即 $a>b>c$.

5. D ［解析］设 $g(x)=[f(x)]^2-2\cos x$，则 $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)+2\sin x>0$，故 $y=g(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)>g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2>\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^2$，所以 $\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|>\left|f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|$.

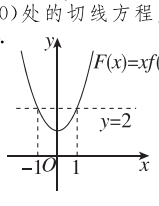
6. D ［解析］由 $x^{x-1}\geqslant\ln x+\frac{a}{x}(x>0)$，得 $x^x\geqslant x\ln x+a$，所以 $\mathrm{e}^{x\ln x}-x\ln x\geqslant a$ 对任意 $x>0$ 恒成立．令 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $x\ln x\geqslant-\frac{1}{\mathrm{e}}$．令 $t=$

$x\ln x$，$g(t)=e^t-t\left(t\geqslant-\frac{1}{e}\right)$，则 $g'(t)=e^t-1$ 在 $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，令 $g'(t)=0$，得 $t=0$，所以当 $-\frac{1}{e}\leqslant t<0$ 时，$g'(t)<0$，当 $t>0$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $\left[-\frac{1}{e},0\right)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(t)_{\min}=g(0)=1$，所以 $a\leqslant1$，所以 a 的最大值为 1. 故选 D.

7. ACD ［解析］设 $f(x)=e^x-x(x>0)$，则 $f'(x)=e^x-1>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $x>y>0$，所以 $f(x)>f(y)$，即 $e^x-x>e^y-y$，即 $e^x-e^y>x-y$，A 正确；令 $x=e$，$y=1$，则 $\ln x-\ln y=1$，而 $x-y=e-1>1$，所以 $\ln x-\ln y<x-y$，B 不正确；设 $h(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，当 $0<x<1$ 时，$h'(x)=\frac{x-1}{x^2}<0$，函数 $h(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{x-1}{x^2}>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，则 $h(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处取得最小值，最小值为 $h(1)=\ln1-1+\frac{1}{1}=0$，所以 $\ln x\geqslant1-\frac{1}{x}$，C 正确；设 $g(x)=x\cdot e^x(x>0)$，则 $g'(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $g(x)=x\cdot e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $x>y>0$，所以 $g(x)>g(y)$，即 $x\cdot e^x>y\cdot e^y$，即 $\frac{e^x}{y}>\frac{e^y}{x}$，D 正确. 故选 ACD.

8. AC ［解析］对于 A，$F(x)=e^xf(x)$，则 $F(-x)=e^{-x}f(-x)$，由 $f(-x)+e^{2x}f(x)=0$ 可得 $e^{-x}f(-x)+e^xf(x)=0$，所以 $F(x)+F(-x)=0$，又 $F(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $F(x)=e^xf(x)$ 为奇函数，A 正确；对于 B，因为 $[e^{2x}f(x)-e^{2x}]'=2e^{2x}f(x)+e^{2x}f'(x)-2e^{2x}=e^{2x}[2f(x)+f'(x)-2]=0$，所以 $e^{2x}f(x)-e^{2x}=c$，c 为常数，则 $f(x)=\frac{e^{2x}+c}{e^{2x}}$，又在 $f(-x)+e^{2x}f(x)=0$ 中，令 $x=0$，得 $f(0)=0$，故 $f(0)=\frac{e^0+c}{e^0}=0$，故 $c=-1$，所以 $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}$，由 $e^xf(x)-\frac{3}{e^x}<0$ 可得 $e^{2x}f(x)-3<0$，又 $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}$，所以 $e^{2x}-4<0$，则 $x<\ln2$，B 错误；对于 C，$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}=1-\frac{1}{e^{2x}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，而 $y=(x-a)^2$ 为图象开口向上，且对称轴方程为 $x=a$ 的二次函数，由题知 x_1，x_2 是 $f(x)$ 与 $y=(x-a)^2$ 的图象的两个交点的横坐标，不妨令 $x_1<a<x_2$，设直线 $y=f(x_1)$ 与 $y=(x-a)^2$ 的图象的两个交点的横坐标为 x_1，x'_2，则 $x_1+x'_2=2a$，且 $x_1<a<x'_2<x_2$，所以 $x_1+x_2>2a$，C 正确；对于 D，由 $2f(x)+f'(x)=2$ 得 $2f(0)+f'(0)=2$，因为 $f(0)=0$，所以 $f'(0)=2$，所以 $f(x)$ 的图象在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$，D 错误. 故选 AC.

9. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ［解析］当 $x>0$ 时，因为 $xf'(x)+f(x)>0$，所以 $[xf(x)]'>0$. 令 $F(x)=xf(x)$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)$，所以 $F(-x)=(-x)f(-x)=-x[-f(x)]=xf(x)=F(x)$，所以 $F(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称. 因为 $f(1)=2$，所以 $F(1)=f(1)=2$，所以 $F(-1)=2$，作出 $F(x)$ 的大致图象如图所示. 由图可知，使不等式 $xf(x)>2$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.



10. $a\geqslant e$ ［解析］由 $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{x_1x_2}-\frac{e^{ax_2}}{e^{ax_1}}<0$，得 $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{x_1x_2}<e^{ax_2-ax_1}$，两边取自然对数，得 $x_1x_2\ln\frac{x_2}{x_1}<ax_2-ax_1$，即 $\ln x_2-\ln x_1<\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}$，则 $\ln x_2+\frac{a}{x_2}<\ln x_1+\frac{a}{x_1}$. 令 $h(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，则 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减，所以 $h'(x)\leqslant0$ 在 $(1,e)$ 上恒成立，而 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}$，则 $\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}\leqslant0$ 对任意 $x\in(1,e)$ 恒成立，所以 $a\geqslant x$ 对任意 $x\in(1,e)$ 恒成立，可得 $a\geqslant e$.

11. $(1,2]$ ［解析］设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$x\in[-4,4]$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，因为 $f'(x)>f(x)$，所以 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $[-4,4]$ 上为增函数. 不等式 $e^{x-1}f(1+x)-f(2x)<0$ 等价于 $e^{x-1}g(1+x)e^{1+x}-g(2x)e^{2x}<0$，故 $g(1+x)-g(2x)<0$，即 $g(1+x)<g(2x)$，因为 $g(x)$ 在 $[-4,4]$ 上为增函数，所以 $-4\leqslant1+x<2x\leqslant4$，解得 $x\in(1,2]$.

12. $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ ［解析］根据题意得 $axe^{ax}\geqslant(x+1)\ln x-ax$，即 $ax(e^{ax}+1)\geqslant(x+1)\ln x=(e^{\ln x}+1)\ln x$，令 $n(x)=x(e^x+1)$，则 $n(ax)\geqslant n(\ln x)$，$n'(x)=e^x+1+xe^x$，令 $m(x)=n'(x)$，则 $m'(x)=(x+2)e^x$，当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，所以 $m(x)=n'(x)=e^x+1+xe^x\geqslant n'(-2)=1-\frac{1}{e^2}>0$，所以 $n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $n(ax)\geqslant n(\ln x)$，所以 $ax\geqslant\ln x$，所以 $a\geqslant\frac{\ln x}{x}$. 令 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，当 $0<x<e$ 时，$\varphi'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$，所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

第 19 讲　导数与不等式

/第 1 课时　利用导数研究恒(能)成立问题/

1. D ［解析］由题设知 $ax^2\geqslant\ln x$，即 $a\geqslant\frac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，$x>0$，则 $f'(x)=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$. 令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\sqrt{e}$，故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增；令 $f'(x)<0$，得 $x>\sqrt{e}$，故 $f(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减. 所以 $f(x)\leqslant f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$，故 $a\geqslant\frac{1}{2e}$. 故选 D.

2. C ［解析］若存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_2)\leqslant g(x_1)$ 成立，则只需 $f(x)_{\min}\leqslant g(x)_{\max}$. 由题得 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{e}$. 由题得 $g(x)_{\max}=g(-1)=a$，所以 $a\geqslant-\frac{1}{e}$，故选 C.

3. B ［解析］因为函数 $f(x)=x^2-ax+\ln x$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=2x-a+\frac{1}{x}\geqslant0$ 在 $(1,e)$ 上恒成立，即 $a\leqslant2x+\frac{1}{x}$ 在 $(1,e)$ 上恒成立. 令 $g(x)=2x+\frac{1}{x}(1<x<e)$，则 $g'(x)=2-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-1}{x^2}=\frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{x^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，又 $g(1)=3$，所以 $a\leqslant3$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,3]$. 故选 B.

4. C ［解析］由 $f(x)=e^{x-1}-\ln x-a$，得 $f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$. 设 $g(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，可得 $g'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}$，当 $x\geqslant1$ 时，$g'(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，故当 $x\geqslant1$ 时，$f'(x)\geqslant f'(1)=0$，故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增. 因为对任意的 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，所以只需 $f(1)=1-a\geqslant0$，解得 $a\leqslant1$，所以 a 的最大值是 1. 故选 C.

5. A ［解析］由题意可得 $(e^m-1)x<e^x-\ln x-m$ 恒成立，即 $xe^m+m+\ln x<e^x+x$ 恒成立，即 $e^{m+\ln x}+m+\ln x<e^x+x$ 恒成立. 令 $\varphi(x)=e^x+x$，则 $\varphi(x)=e^x+x$ 单调递增，原不等式可化为 $\varphi(m+\ln x)<\varphi(x)$，所以 $m+\ln x<x$，即 $m<x-\ln x$. 令 $h(x)=x-\ln x$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(x)_{\min}=h(1)=1$，所以 $m<1$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,1)$. 故选 A.

6. $[1,+\infty)$ ［解析］方法一：设 $f(x)=ax-\sin x$，原问题转化为 $f(x)>0$ 对任意 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立. 因为 $f'(x)=a-\cos x$，所以当 $a\leqslant0$，$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，不合题意，舍去；当 $a\geqslant1$，$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>f(0)=0$ 恒成立，所以 $a\geqslant1$ 满足题意；当 $0<a<1$ 时，存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，又 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，不合题意，舍去. 综上，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

方法二：应用洛必达法则和导数. 当 $x\in$

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，原不等式等价于$a>\frac{\sin x}{x}$.令$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}$.又当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$x<\tan x$，所以当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，故$f(x)=\frac{\sin x}{x}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，又$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1$，所以$a\geqslant1$.

7. $-\frac{1}{e^2}$　［解析］$f'(x)=e^x-\frac{1}{a}$，令$f'(x)=0$得$x=\ln\frac{1}{a}$，当$x>\ln\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，当$x<\ln\frac{1}{a}$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$上单调递减，故$f(x)_{\min}=f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+\frac{\ln a}{a}-b$，由题意得$\frac{1}{a}+\frac{\ln a}{a}-b\geqslant0$恒成立，所以$\frac{1}{a}+\frac{\ln a}{a}\geqslant b$恒成立，则$a^2b\leqslant a+a\ln a$恒成立，则$a^2b\leqslant(a+a\ln a)_{\min}$.令$g(a)=a+a\ln a$，则$g'(a)=2+\ln a$，令$g'(a)>0$得$a>\frac{1}{e^2}$，令$g'(a)<0$得$0<a<\frac{1}{e^2}$，所以$g(a)$在$\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$上单调递减，所以$g(a)_{\min}=g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}$，所以$a^2b\leqslant-\frac{1}{e^2}$，故$a^2b$的最大值为$-\frac{1}{e^2}$.

8. 解：(1)当$a=1,b=3$时，$f(x)=x^2-3x+\ln x$，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$.令$f'(x)>0$，可得$0<x<\frac{1}{2}$或$x>1$，故$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$.

(2)若$b=0$，则$f(x)=ax^2+\ln x$.由$f(x)\leqslant0$在$[1,+\infty)$上恒成立，得$a\leqslant-\frac{\ln x}{x^2}$在$[1,+\infty)$上恒成立.设$g(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，$x\geqslant1$，则$g'(x)=\frac{2\ln x-1}{x^3}$，令$g'(x)>0$，得$x>\sqrt{e}$，此时$g(x)$单调递增，令$g'(x)<0$，得$1\leqslant x<\sqrt{e}$，此时$g(x)$单调递减，故$g(x)_{\min}=g(\sqrt{e})=-\frac{1}{2e}$，故$a\leqslant-\frac{1}{2e}$，即实数$a$的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2e}\right]$.

9. 解：(1)当$a=0$时，$f(x)=e^x+\cos x-\sin x$，$f'(x)=e^x-\sin x-\cos x$.令$h(x)=e^x-\sin x-\cos x$，则当$x\in\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$时，$e^x\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}>2$，$\sin x+\cos x<2$，故$h(x)=e^x-\sin x-\cos x>0$；

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$h'(x)=e^x-\cos x+\sin x=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，此时$e^x>1$，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in(-1,1)$，故$h'(x)>0$，所以$h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

所以当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$h(x)>h(0)=0$.

故当$a=0,x>0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(2)由题意知，当$x>0$时，$f(x)=e^{x+a}+\cos x-\sin x\geqslant0$恒成立，即$e^a\geqslant\frac{\sin x-\cos x}{e^x}$恒成立.

令$\varphi(x)=\frac{\sin x-\cos x}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，

则$\varphi'(x)=\frac{2\cos x}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，

故$\varphi(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，在每一个开区间$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{N})$上都单调递减，在每一个开区间$\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\frac{5\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{N})$上都单调递增，又$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant\varphi\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{N})$，所以$\varphi(x)_{\max}=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$，

故$e^a\geqslant\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$，解得$a\geqslant-\frac{\pi}{2}$，

故实数a的取值范围是$\left[-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$.

10. 解：(1)证明：由$f(x)=e^{x-1}-x$，得$f'(x)=e^{x-1}-1$，令$f'(x)=0$，得$x=1$，当$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以$f(x)\geqslant f(1)=0$，即对任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant0$恒成立.

(2)当$x\in(0,+\infty)$时，由$f(x)\geqslant a(x^2-x-x\ln x)$，得$e^{x-1}-x\geqslant a(x^2-x-x\ln x)$，即$\frac{e^{x-1}}{x}-1=\frac{e^{x-1}}{e^{\ln x}}-1\geqslant a(x-1-\ln x)$，即$e^{x-1-\ln x}-1\geqslant a(x-1-\ln x)$.令$t=x-1-\ln x$，则$t'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当$x\in(0,1)$时，$t'<0$，函数$t=x-1-\ln x$单调递减，当$x\in(1,+\infty)$时，$t'>0$，函数$t=x-1-\ln x$单调递增，所以$t\geqslant1-1-\ln1=0$，原问题转化为$e^t-1\geqslant at$，即$e^t-1-at\geqslant0$对任意$t\in[0,+\infty)$恒成立.令$g(t)=e^t-1-at(t\geqslant0)$，则$g(0)=e^0-1-a\times0=0$，$g'(t)=e^t-a$.若$a\leqslant1$，则$g'(t)\geqslant0$，$g(t)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以$g(t)_{\min}=g(0)=0$，故$g(t)\geqslant0$恒成立，符合题意；若$a>1$，则令$g'(t)=0$，得$t=\ln a$，所以当$t\in[0,\ln a)$时，$g'(t)<0$，$g(t)$单调递减，当$t\in(\ln a,+\infty)$时，$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增，所以$g(t)_{\min}=g(\ln a)<g(0)=0$，不符合题意.

综上，实数a的取值范围为$(-\infty,1]$.

11. 解：(1)$f'(x)=mx+m-1-\frac{1}{x}=\frac{(mx-1)(x+1)}{x}$，$x>0$.

当$m\leqslant0$时，$f'(x)<0$恒成立，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当$m>0$时，由$f'(x)>0$，可得$x\in\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$，

即$f(x)$在$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$上单调递增，

由$f'(x)<0$，可得$x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)$，

即$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{m}\right)$上单调递减.

(2)当$m>0$时，由(1)知$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{m}\right)=\ln m+1-\frac{1}{2m}$.

$g'(x)=2x+\frac{1}{2}e^{-x}>0$在$[1,+\infty)$上恒成立，故$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，所以当$x\in[1,+\infty)$时，$g(x)_{\min}=g(1)=2-\frac{1}{2e}$.由题意知$f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$，即$\ln m+1-\frac{1}{2m}\geqslant2-\frac{1}{2e}$.

设$h(x)=\ln x+1-\frac{1}{2x}$，则$h'(x)=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}>0$，所以$h(x)$为增函数，

又$h(e)=2-\frac{1}{2e}$，所以由$h(m)\geqslant2-\frac{1}{2e}$得$m\geqslant e$，即$m$的取值范围是$[e,+\infty)$.

培优专训(一)　必要性探路法之端点效应、极点效应、特殊点效应

1. 解：由题意得$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x}+a$.当$a\leqslant0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，$f(x)$无极值，不合题意，舍去.

当$a>0$时，$f'(x)=\frac{ax-1}{x}$，当$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递减，当$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，

所以$f(x)$存在极小值，且$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln a+a^2-1$.

令$g(a)=\ln a+a^2-1$，$a\in(0,+\infty)$，

则$g'(a)=\frac{1}{a}+2a$，因为$a\in(0,+\infty)$，所以$g'(a)>0$，所以$g(a)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$g(1)=\ln1+1-1=0$，所以由$g(a)\geqslant0$得$a\geqslant1$，

所以a的取值范围为$[1,+\infty)$.

2. 解：由题意知$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{x+1}-a$，注意到$f(0)=0$，要使对任意$x\in[0,+\infty)$，不等式$f(x)\leqslant0$恒成立，则需满足$f'(0)\leqslant0$，即$2+1-a\leqslant0$，解得$a\geqslant3$.

下面证明：当$a\geqslant3$时，对任意$x\in[0,+\infty)$，不等式$f(x)\leqslant0$恒成立.

当$a\geqslant3$，$x\geqslant0$时，$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{x+1}-a\leqslant2\cos x+\frac{1}{x+1}-3\leqslant\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}\leqslant0$，∴$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，∴$f(x)\leqslant f(0)=0$.

当$a<3$时，$f'(0)=3-a>0$，必存在$x_1\in(0,+\infty)$，使得$f(x)$在$(0,x_1)$上单调递增，∴当$x\in(0,x_1)$时，均有$f(x)>f(0)=0$，矛盾.综上所述，实数a的取值范围为$[3,+\infty)$.

3. 解：方法一：由题知$f'(x)=(ax+1)e^{ax}-e^x$，设$g(x)=f'(x)=(ax+1)e^{ax}-e^x$，则$g'(x)=(a^2x+2a)e^{ax}-e^x$.因为$f(0)=-1$，$f'(0)=0$，所以只需$g'(0)=2a-1\leqslant0$，解得$a\leqslant\frac{1}{2}$.

下面证明：当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，$xe^{ax}-e^x<-1$对$x>0$恒成立.当$a\leqslant\frac{1}{2}$时，只需证$xe^{\frac{1}{2}x}-e^x<-1$对$x>0$恒成立，只需证$x<e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}$对$x>0$恒成立.

令$t=e^{\frac{1}{2}x}>1$，则$x=2\ln t$，只需证

$2\ln t<t-\frac{1}{t}$对$t>1$恒成立.设$p(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$,则$p'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$,所以$p(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,故$p(t)>p(1)=0$,则$2\ln t<t-\frac{1}{t}$对$t>1$恒成立.

当$a>\frac{1}{2}$时,$g'(0)=2a-1>0$,必存在$x_0\in(0,+\infty)$,使得$f'(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,所以当$x\in(0,x_0)$时,$f'(x)>f'(0)=0$,则$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,所以当$x\in(0,x_0)$时,$f(x)>f(0)=-1$,不满足题意.综上所述,故a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

方法二:设$h(x)=xe^{ax}-e^x+1$,则$h(0)=0$,$h'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x$,由题知,当$x>0$时,$h(x)<0$恒成立.

设$g(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x$,则$g'(x)=(2a+a^2x)e^{ax}-e^x$,若$a>\frac{1}{2}$,则$g'(0)=2a-1>0$,必存在$x_0\in(0,+\infty)$,使得$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,故当$x\in(0,x_0)$时,$g(x)>g(0)=0$,

则$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,故当$x\in(0,x_0)$时,$h(x)>h(0)=0$,与题设矛盾.

若$0<a\leqslant\frac{1}{2}$,则$h'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^x=e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x$.

下证对任意$x>0$,总有$\ln(1+x)<x$成立,设$S(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$,则$S'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$,

故$S(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

故$S(x)<S(0)=0$,即$\ln(1+x)<x$.

由上述不等式有$e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x<e^{ax+ax}-e^x=e^{2ax}-e^x\leqslant 0$,故$h'(x)\leqslant 0$总成立,即$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以当$x>0$时,$h(x)<h(0)=0$.

当$a\leqslant 0$,$x>0$时,$h'(x)=e^{ax}-e^x+axe^{ax}<1-1+0=0$,

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以当$x>0$时,$h(x)<h(0)=0$.

综上,a的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

4. 解:若$g(x)\geqslant 0$恒成立,则必有$g(1)=2a-2\geqslant 0$,解得$a\geqslant 1$.

下面证明:当$a\geqslant 1$时,$g(x)\geqslant 0$恒成立.

由$g(x)=x^3-x^2+ax+\frac{a}{x}-x\ln x-2$及$a\geqslant 1$,得$g(x)\geqslant x^3-x^2+x+\frac{1}{x}-x\ln x-2$.要证不等式$g(x)\geqslant 0$,只需证$x^3-x^2+x+\frac{1}{x}-x\ln x-2\geqslant 0$,

又$x>0$,所以只需证$x^2-x+1+\frac{1}{x^2}-\ln x-\frac{2}{x}\geqslant 0$.令$h(x)=x^2-x+1+\frac{1}{x^2}-\ln x-\frac{2}{x}$,则$h'(x)=2x-1-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x}\left(2x^2-x-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}-1\right)$.

令$\varphi(x)=2x^2-x-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}-1(x>0)$,

则$\varphi'(x)=4x-1+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2}=\frac{4x^4-x^3-2x+4}{x^3}$.

①当$0<x<1$时,$0<x^3<1$,$0<2x<2$,则$4x^4-x^3-2x+4>4x^4-1-2+4=4x^4+1>0$;

②当$x\geqslant 1$时,$x^4\geqslant x^3$,$2x^4\geqslant 2x$,则$4x^4-x^3-2x+4=(x^4-x^3)+(2x^4-2x)+x^4+4\geqslant x^4+4>0$.

由①②可知$\varphi'(x)>0$,故函数$\varphi(x)$单调递增,又$\varphi(1)=0$,可知当$0<x<1$时,$\varphi(x)<0$,即$h'(x)<0$;当$x>1$时,$\varphi(x)>0$,即$h'(x)>0$.可得函数$h(x)$的单调递减区间为$(0,1)$,单调递增区间为$(1,+\infty)$,故$h(x)\geqslant h(1)=0$.

当$a<1$时,$g(1)=2a-2<0$,不满足题意.综上,若$g(x)\geqslant 0$恒成立,则实数a的取值范围为$[1,+\infty)$.

5. 解:(1)当$b=0$时,$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax$,$f(x)$的定义域为$(0,2)$,$f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}+a$.$\because\frac{2}{x(2-x)}+a\geqslant 2+a$,当且仅当$x=1$时取等号,$\therefore$若$f'(x)\geqslant 0$,则只需$2+a\geqslant 0$,解得$a\geqslant -2$,故$a$的最小值为$-2$.

(2)证明:由$y=\ln\frac{x}{2-x}$的图象关于点$(1,0)$中心对称,$y=ax$的图象关于点$(1,a)$中心对称,$y=b(1-x)^3$的图象关于点$(1,0)$中心对称,得曲线$y=f(x)$关于点$(1,a)$中心对称,证明如下:

$\because f(1+x)+f(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+a(1+x)+bx^3+\ln\frac{1-x}{1+x}+a(1-x)+b(-x)^3=2a$,$\therefore$曲线$y=f(x)$关于点$(1,a)$中心对称,故曲线$y=f(x)$是中心对称图形.

(3)方法一:由函数$f(x)$连续及题意知$f(1)=-2$,故$a=-2$,

$\therefore f(x)=\ln\frac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3$.

$f'(x)=\frac{(x-1)^2[-3b(x-1)^2+3b+2]}{1-(x-1)^2}$.

若$-\frac{2}{3}\leqslant b\leqslant 0$,则$f'(x)>0$在$(1,2)$上恒成立,故$f(x)$在$(1,2)$上单调递增,则$f(x)>f(1)=-2$,满足题意.当$b<-\frac{2}{3}$或$b>0$时,令$f'(x)=0$,可得$x=1+\sqrt{\frac{3b+2}{3b}}$.若$b<-\frac{2}{3}$,则当$x\in\left(1,1+\sqrt{\frac{3b+2}{3b}}\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当$x\in\left(1+\sqrt{\frac{3b+2}{3b}},2\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,则$f\left(1+\sqrt{\frac{3b+2}{3b}}\right)<f(1)=-2$,不满足题意,舍去.若$b>0$,则$1+\sqrt{\frac{3b+2}{3b}}>2$,当$x\in(1,2)$时,$f'(x)>0$,故$f(x)>f(1)=-2$,满足题意.综上,$b$的取值范围是$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

方法二:由函数$f(x)$连续及题意知$f(1)=-2$,故$a=-2$,故$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3$,$f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}-2+3b(x-1)^2$,$f'(1)=0$.

令$m(x)=f'(x)$,则$m'(x)=(x-1)\left[\frac{4}{x^2(2-x)^2}+6b\right]$.

$y=x(2-x)$在$(1,2)$上单调递减,由复合函数的单调性知$g(x)=\frac{4}{x^2(2-x)^2}+6b$在$(1,2)$上单调递增.

若$g(1)\geqslant 0$,即$4+6b\geqslant 0$,即$b\geqslant -\frac{2}{3}$,

则当$x\in(1,2)$时,$g(x)>g(1)\geqslant 0$,则$m'(x)>0$,$\therefore f'(x)$在$(1,2)$上单调递增,$\therefore f'(x)>f'(1)=0$,$\therefore f(x)$在$(1,2)$上单调递增,$\therefore$当$1<x<2$时,$f(x)>f(1)=-2$,满足题意.

若$g(1)<0$,即$4+6b<0$,即$b<-\frac{2}{3}$,

当$x\to 2$时,$g(x)\to+\infty$,

则存在$x_0\in(1,2)$,使得$g(x_0)=0$,

当$1<x<x_0$时,$m'(x)<0$,当$x_0<x<2$时,$m'(x)>0$,$\therefore f'(x)$在$(1,x_0)$上单调递减,在$(x_0,2)$上单调递增,$\therefore$当$x\in(1,x_0)$时,$f'(x)<f'(1)=0$,$\therefore f(x)$在$(1,x_0)$上单调递减,$\therefore$当$x\in(1,x_0)$时,$f(x)<f(1)=-2$,不满足题意.

综上,b的取值范围为$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

/第2课时　利用导数证明不等式/

1. 解:(1)$\because f(x)=(2-x)e^x$,$\therefore f'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$.当$-1\leqslant x<1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;

当$1<x\leqslant 2$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.又$f(-1)=\frac{3}{e}$,$f(1)=e$,$f(2)=0$,

$\therefore$函数$f(x)$在区间$[-1,2]$上的最大值为e,最小值为0.

(2)证明:记$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x-2e=(2-x)e^x-\frac{1}{2}x^2+x-2e$,$x>0$,则$g'(x)=(1-x)(e^x+1)$.当$0<x<1$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;

当$x>1$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.

则$g(x)$的最大值为$g(1)=\frac{1}{2}-e$,而$\frac{1}{2}-e<0$,故$g(x)<0$,即当$x>0$时,$f(x)<\frac{1}{2}x^2-x+2e$.

2. 解:(1)因为$f(x)=ax^2-2\ln x$,

所以$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=2ax-\frac{2}{x}=\frac{2(ax^2-1)}{x}$,$x>0$.

当$a\leqslant 0$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当$a>0$时,由$f'(x)<0$,得$0<x<\sqrt{\frac{1}{a}}$,由$f'(x)>0$,得$x>\sqrt{\frac{1}{a}}$,所以$f(x)$在$\left(0,\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$上单调递减,在$\left(\sqrt{\frac{1}{a}},+\infty\right)$上单调递增.

综上,当$a\leqslant 0$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当$a>0$时,$f(x)$在$\left(0,\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$上单调递减,在$\left(\sqrt{\frac{1}{a}},+\infty\right)$上单调递增.

(2)证明:由(1)知,当$a>0$时,$f(x)_{\min}=f\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)=\ln a+1$,要证$f(x)\geqslant 2-\frac{1}{a}$,只需证$\ln a+1\geqslant 2-\frac{1}{a}$,即证$\ln a+\frac{1}{a}-1\geqslant 0$.设$\varphi(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1$,$a>0$,则$\varphi'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}$,令$\varphi'(a)=0$,得$a=1$,当$a$变化时,$\varphi'(a)$,$\varphi(a)$的变化情况如表所示.

a	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(a)$	$-$	0	$+$
$\varphi(a)$	单调递减	0	单调递增

所以$\varphi(a)\geqslant\varphi(1)=0$,即$\ln a+\frac{1}{a}-1\geqslant 0$,所以$f(x)\geqslant 2-\frac{1}{a}$.

3. 证明:$\because f(x)=\cos x+\frac{1}{4}x^2-1$,$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,$\therefore$函数$f(x)$为偶函数,

要证 $f(x)\leqslant 0$，只需证当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)\leqslant 0$. $f'(x)=-\sin x+\frac{1}{2}x$，令 $g(x)=-\sin x+\frac{1}{2}x$，则 $g'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{\pi}{3}$. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，此时函数 $f'(x)$ 单调递减；当 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，此时函数 $f'(x)$ 单调递增. ∵$f'(0)=0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-1<0$，∴当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，故函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，此时 $f(x)\leqslant f(0)=0$，故对任意的 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\leqslant 0$，得证.

4. 解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由已知得 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{ex^2}$，

则 $\begin{cases}f(1)=\frac{b}{e}=\frac{2}{e},\\ f'(1)=a-\frac{b}{e}=1-\frac{2}{e},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

(2)由题意得 $g(x)=x\cdot f(x)=x\ln x+\frac{2}{e}(x>0)$，则 $g'(x)=\ln x+1$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，$g(x)$ 的极小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$，无极大值.

(3)证明：要证 $f(x)>\frac{1}{e^x}$，即证 $\ln x+\frac{2}{ex}>\frac{1}{e^x}$，只需证 $x\ln x+\frac{2}{e}>\frac{x}{e^x}$.

令 $h(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)$ 的极大值为 $h(1)$，即 $h(x)\leqslant h(1)=\frac{1}{e}$. 由(2)知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)\geqslant g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$，且 $g(x)$ 的最小值点与 $h(x)$ 的最大值点不同，

所以 $x\ln x+\frac{2}{e}>\frac{x}{e^x}$，即 $\ln x+\frac{2}{ex}>\frac{1}{e^x}$，所以 $f(x)>\frac{1}{e^x}$.

5. 解：(1)函数 $f(x)=\ln x+ax+1(a\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}+a$. 当 $a\geqslant 0$ 时，对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+a>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=\frac{1}{x}+a=\frac{1+ax}{x}=0$，解得 $x=-\frac{1}{a}$，当 $x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，当 $x\in\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. 综上所述，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)证明：当 $a\leqslant 2$ 时，因为 $x>0$，所以要证 $\frac{f(x)}{x}\leqslant e^{2x}$，只需证 $\ln x+ax+1\leqslant xe^{2x}$，只需证 $xe^{2x}\geqslant\ln x+2x+1$，只需证 $e^{2x+\ln x}\geqslant\ln x+2x+1$(*).

令 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)=e^0-0-1=0$，所以 $e^x\geqslant x+1$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立)，所以(*)式成立，当且仅当 $2x+\ln x=0$ 时，等号成立.

令 $h(x)=2x+\ln x$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}-1<0$，$h(1)=2>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $h(x_0)=2x_0+\ln x_0=0$，所以 $\frac{f(x)}{x}\leqslant e^{2x}$.

6. 解：(1)函数 $g(x)=xe^{x-1}+x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g(x)$ 的零点等价于 $k(x)=e^{x-1}+\ln x$ 的零点，$k'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x}>0$，所以 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $k(1)=1>0$，$k\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}-1}-1<0$，所以 $k(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上存在唯一的零点，所以 $k(x)$ 的零点个数为 1，则 $g(x)$ 的零点个数也为 1.

(2)因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+ax$，所以 $f'(x)=x^2+x+a=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}$，所以 $f'(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增，故 $f'(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上的最大值为 $m=f'(1)=a+2$. 因为 $g(x)=xe^{x-1}+x\ln x$，所以 $g'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}+\ln x+1=(x+1)e^{x-1}+\ln x+1$.

令 $h(x)=(x+1)e^{x-1}+\ln x+1$，则 $h'(x)=(x+2)e^{x-1}+\frac{1}{x}$，当 $x\in(0,1]$ 时，$h'(x)>0$，故 $g'(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增，所以 $g'(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上的最大值为 $n=g'(1)=3$.

因为对任意的 $x_1\in(0,1]$，总存在 $x_2\in(0,1]$，使得 $f'(x_1)\leqslant g'(x_2)-2$ 成立，所以 $m\leqslant n-2$，即 $a+2\leqslant 3-2$，解得 $a\leqslant -1$，故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

(3)证明：令 $s(x)=e^{x-1}-x$，$x>0$，则 $s'(x)=e^{x-1}-1$.

令 $s'(x)=0$，解得 $x=1$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$s'(x)<0$，$s(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$s'(x)>0$，$s(x)$ 单调递增.

所以 $s(x)\geqslant s(1)=0$，即 $e^{x-1}\geqslant x$(当且仅当 $x=1$ 时，等号成立). 令 $F(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，则 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$.

令 $F'(x)=0$，解得 $x=1$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增.

所以 $F(x)\geqslant F(1)=0$，即 $\ln x\geqslant-\frac{1}{x}+1$(当且仅当 $x=1$ 时，等号成立)，

故 $e^{x-1}+\ln x\geqslant x-\frac{1}{x}+1$(当且仅当 $x=1$ 时，等号成立). 又 $x>0$，所以 $xe^{x-1}+x\ln x\geqslant x^2+x-1$.

因为 $a\leqslant -1$，所以 $x^2+x-1\geqslant x^2+x+a$，故 $xe^{x-1}+x\ln x\geqslant x^2+x+a$，

即 $g(x)\geqslant f'(x)$ 恒成立，得证.

/第 3 课时　放缩法证明不等式/

1. 证明：令 $\varphi(x)=\ln x-x+1$，其定义域为 $(0,+\infty)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，∴$\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

∴$\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=0$，∴$\varphi(x)\leqslant 0$，

即 $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号. 当 $x>2$ 时，$\ln(x-1)<x-2$，又 $a>0$，∴$a\ln(x-1)<a(x-2)$. 要证 $f(x)<e^x+(a-1)x-2a$，即证 $a\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}<e^x+(a-1)x-2a$，只需证 $a(x-2)+\frac{2}{x-1}<e^x+(a-1)x-2a$，

即证 $e^x-x-\frac{2}{x-1}>0$. 令 $h(x)=e^x-x-\frac{2}{x-1}$，$x>2$，则 $h'(x)=e^x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$. ∵$x>2$，∴$h'(x)>0$ 恒成立，

∴$h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

∴$h(x)>h(2)=e^2-4>0$，∴当 $x>2$ 时，$f(x)<e^x+(a-1)x-2a$.

2. 解：(1)证明：要证 $f(x)<1$，即证 $\frac{\sin x}{x}<1(x\in(0,\pi])$，只需证 $\sin x-x<0(x\in(0,\pi])$. 令 $h(x)=\sin x-x$，$x\in(0,\pi]$，则 $h'(x)=\cos x-1<0$，∴$h(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递减，

故 $h(x)<h(0)=0$，∴$f(x)<1$.

(2)$g(x)=\frac{\sin x}{x}+ax^2$，$x\in(0,\pi]$，

则 $g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x+2ax^3}{x^2}$.

∵$g(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调，∴当 $x\in(0,\pi]$ 时，$g'(x)\leqslant 0$ 恒成立或 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立. 令 $m(x)=x\cos x-\sin x+2ax^3$，$x\in(0,\pi]$，则 $m'(x)=6ax^2-x\sin x=x(6ax-\sin x)$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$6ax\leqslant 0$，$\sin x\geqslant 0$，∴当 $x\in(0,\pi]$ 时，$m'(x)\leqslant 0$，即 $m(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递减，∴当 $x\in(0,\pi]$ 时，$m(x)<m(0)=0$，故 $g'(x)<0$ 在 $(0,\pi]$ 上恒成立，故 $g(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递减，满足题意.

②当 $a\geqslant\frac{1}{6}$ 时，$m'(x)=x(6ax-\sin x)>x(6ax-x)=(6a-1)x^2\geqslant 0$，∴$m(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递增，∴$m(x)>m(0)=0$，故 $g'(x)>0$ 在 $(0,\pi]$ 上恒成立，故 $g(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递增，满足题意.

③当 $0<a<\frac{1}{6}$ 时，令 $n(x)=6ax-\sin x$，则 $n'(x)=6a-\cos x$，$n'(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递增，且 $n'(0)=6a-1<0$，$n'(\pi)=6a+1>0$，故存在 $x_1\in(0,\pi)$，使得 $n'(x_1)=0$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$n'(x)<0$，当 $x\in(x_1,\pi]$ 时，$n'(x)>0$，故 $n(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 $(x_1,\pi]$ 上单调递增，又 $\begin{cases}n(0)=0,\\ n(x_1)=6ax_1-\sin x_1<0,\\ n(\pi)=6a\pi>0,\end{cases}$ ∴存在 $x_2\in(x_1,\pi)$，使得 $n(x_2)=0$，当 $x\in(0,x_2)$ 时，$m'(x)<0$，当 $x\in(x_2,\pi]$ 时，$m'(x)>0$，∴$m(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,\pi]$ 上单调递增，故 $m(x_2)<m(0)=0$，又 $m(\pi)=-\pi+2a\pi^3$，

∴只需 $m(\pi)\leqslant 0$，可得 $0<a\leqslant\frac{1}{2\pi^2}$.

综上所述，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\right.$

$\frac{1}{2\pi^2}\Big]\cup\Big[\frac{1}{6},+\infty\Big)$.

3. 解：(1) 由题可知 $f'(x)=e^{x-1}-a-\ln x-\frac{x-1}{x}$，则 $f'(1)=1-a$.

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $2x+y-1=0$ 垂直，所以 $1-a=\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2) 证明：令 $h(x)=\ln x-(x-1)$，$x\in(1,+\infty)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，则 $h(x)<h(1)=0$，

即 $\ln x<x-1$，则当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$(x-1)\ln x<(x-1)^2$.

要证当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>a$，只需证当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$e^{x-1}-\frac{1}{2}(x+1)-(x-1)\ln x>0$，只需证当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$e^{x-1}-\frac{1}{2}(x+1)-(x-1)^2>0$.

令 $F(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}(x+1)-(x-1)^2$，$x\in(1,+\infty)$，则 $F'(x)=e^{x-1}-2x+\frac{3}{2}$，$x\in(1,+\infty)$. 令 $t(x)=e^{x-1}-2x+\frac{3}{2}$，$x\in(1,+\infty)$，则 $t'(x)=e^{x-1}-2$，令 $t'(x)=0$，得 $x=1+\ln 2$，

当 $x\in(1,1+\ln 2)$ 时，$t'(x)<0$，$F'(x)$ 单调递减，当 $x\in(1+\ln 2,+\infty)$ 时，$t'(x)>0$，$F'(x)$ 单调递增，

所以 $F'(x)_{\min}=F'(1+\ln 2)=\frac{3}{2}-2\ln 2=\frac{\ln e^3-\ln 16}{2}$，因为 $e^3>16$，所以 $F'(x)_{\min}>0$，则 $F'(x)>0$，则 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $F(x)>F(1)=0$，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>a$.

4. 解：(1) 令 $h(x)=\ln(x+1)-x$ $(x>-1)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$. 当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)>0$，则函数 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增；当 $x>0$ 时，$h'(x)<0$，则函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 所以 $h(x)_{\max}=h(0)=0$，故 $\ln(x+1)\leqslant x$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，所以当 $a\geqslant 0$ 时，$\ln(x+1)\leqslant x\leqslant ax^2+x$，即 $f(x)\leqslant g(x)$；当 $a<0$ 时，取 $x_0=-\frac{1}{a}>0$，因为 $\ln(x_0+1)>\ln 1=0$，且 $ax_0^2+x_0=a\cdot\Big(-\frac{1}{a}\Big)^2-\frac{1}{a}=0$，所以 $\ln(x_0+1)>ax_0^2+x_0$，故 $f(x_0)>g(x_0)$，不合题意. 综上所述，实数 a 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

(2) 证明：由 (1) 可得，当 $x>-1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant x$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，则当 $x>0$ 时，$\ln x\leqslant x-1$，可得 $\ln\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{x}-1$，即 $-\ln x\leqslant\frac{1}{x}-1$，即 $\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，故当 $x>1$ 时，$\ln x>1-\frac{1}{x}$.

令 $\frac{1}{t}=1-\frac{1}{x}$，$t>1$，则 $x=\frac{t}{t-1}$，所以 $\ln\frac{t}{t-1}>\frac{1}{t}$，即 $\ln t-\ln(t-1)>\frac{1}{t}$ $(t>1)$，所以 $\frac{1}{n+k}<\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，$k\in\{1,2,\cdots,n\}$. 令 $\varphi(x)=x-\sin x(x>0)$，则 $\varphi'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，且 $\varphi'(x)$ 不恒为零，所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，则 $\sin x<x(x>0)$，所以 $\sin\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+k}<\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln(n+1)]+\cdots+[\ln(2n)-\ln(2n-1)]=\ln(2n)-\ln n=\ln\frac{2n}{n}=\ln 2$，得证.

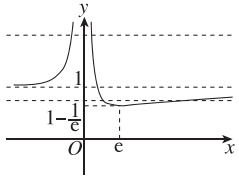
第 20 讲　利用导数研究函数的零点

1. B　[解析] 令 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1$，由 $h'(x)=e^x-1=0$，得 $x=0$，∴当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，∴当 $x=0$ 时，$h(x)$ 取得最小值 $h(0)=0$，∴$h(x)=e^x-x-1$ 只有 1 个零点，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象只有 1 个交点. 故选 B.

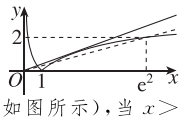
2. C　[解析] 由 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ 在区间 $(1,e)$ 上恒为正可得，函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+a$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增. 因为函数 $f(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上存在零点，所以由函数零点存在定理可得，$f(1)=a-1<0$，且 $f(e)=a+1-\frac{1}{e}>0$，解得 $\frac{1}{e}-1<a<1$.

3. B　[解析] 由 $f(x)$ 有两个零点，得 $m=x-\frac{x^3}{3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根. 令 $g(x)=x-\frac{x^3}{3}$ $(x>0)$，则 $g'(x)=1-x^2$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{2}{3}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)>g(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$. 要使 $m=x-\frac{x^3}{3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，则 $0<m<\frac{2}{3}$. 故选 B.

4. D　[解析] $y=f(x)-kx$ 恰有两个零点，即 $f(x)-kx=0$ 恰有两个实数根，由于 $x\neq 0$，所以 $f(x)-kx=0$ 恰有两个实数根等价于 $\frac{f(x)}{x}=k$ 恰有两个实数根，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g(x)=\begin{cases}1-\frac{\ln x}{x},x>0,\\1+\frac{1}{x^2},x<0,\end{cases}$ 当 $x>0$ 时，$g(x)=1-\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$，故当 $x>e$ 时，$g'(x)>0$，此时 $g(x)$ 单调递增，当 $0<x<e$ 时，$g'(x)<0$，此时 $g(x)$ 单调递减，故当 $x=e$ 时，$g(x)$ 取得极小值也是最小值，且当 $x>1$ 时，$\frac{\ln x}{x}>0$，此时 $g(x)=1-\frac{\ln x}{x}<1$. 当 $x<0$ 时，$g(x)=1+\frac{1}{x^2}>1$，且 $g(x)$ 单调递增. 在平面直角坐标系中画出 $g(x)$ 的大致图象如图，要使 $g(x)=k$ 有两个根，则 $k\in\Big(1-\frac{1}{e},1\Big)\cup(1,+\infty)$.



5. D　[解析] 令 $g(x)=f(x)-ax=0$，可得 $f(x)=ax$. 在平面直角坐标系内画出函数 $f(x)=|\ln x|$ 的图象(如图所示)，当 $x>1$ 时，$f(x)=\ln x$. 由 $y=\ln x$ 得 $y'=\frac{1}{x}$. 设过原点的直线 $y=ax$ 与函数 $y=\ln x$ 的图象相切于点 $A(x_0,\ln x_0)$，则有 $\begin{cases}\ln x_0=ax_0,\\a=\frac{1}{x_0},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=e,\\a=\frac{1}{e},\end{cases}$ 所以当直线 $y=ax$ 与函数 $y=\ln x$ 的图象相切时，$a=\frac{1}{e}$. 又当直线 $y=ax$ 经过点 $B(e^2,2)$ 时，有 $2=a\cdot e^2$，解得 $a=\frac{2}{e^2}$. 结合图象可得当直线 $y=ax$ 与函数 $f(x)=|\ln x|$ 的图象在区间 $(0,e^2)$ 上有 3 个交点时，实数 a 的取值范围是 $\Big(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\Big)$.



6. 0　[解析] $f(x)=e^{x+a}-x-1$ 有 1 个零点，则方程 $e^a=\frac{x+1}{e^x}$ 有 1 个实数根，令 $g(x)=\frac{x+1}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{-x}{e^x}$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(0)=1$，又当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$；当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，所以要直线 $y=e^a$ 与 $g(x)$ 的图象有一个交点，则 $e^a=1$，解得 $a=0$.

7. $\Big(1,\frac{4}{3}\Big)$　[解析] $f'(x)=x^2-2x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-f(x_1)=(x_1^2-2x_1)(x-x_1)$，整理得 $y=(x_1^2-2x_1)x-\frac{2}{3}x_1^3+x_1^2+1$，将点 $(0,a)$ 代入上式可得 $a=-\frac{2}{3}x_1^3+x_1^2+1$. 令 $g(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2+1$，则 $g'(x)=-2x^2+2x=2x(1-x)$，∴当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减. 又 $g(0)=1$，$g(1)=\frac{4}{3}$，∴当 $1<a<\frac{4}{3}$ 时，方程 $g(x)=a$ 有 3 个不同的实数根，即当 $1<a<\frac{4}{3}$ 时，有 3 个不同的 x_1 满足方程 $a=-\frac{2}{3}x_1^3+x_1^2+1$，即过点 $(0,a)$ 可作三条直线与曲线 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+1$ 相切.

8. D　[解析] 由 $mx^2+\frac{1}{2}=\ln x(x>0)$ 得 $m=\frac{\ln x-\frac{1}{2}}{x^2}$，则问题转化为直线 $y=m$ 和 $h(x)=\frac{\ln x-\frac{1}{2}}{x^2}$ 的图象有两个交点，而 $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\Big(\ln x-\frac{1}{2}\Big)}{(x^2)^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^3}$，令 $h'(x)>0$，解得 $0<x<e$，令 $h'(x)<0$，解得 $x>e$，故 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，则 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{2e^2}$，当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to 0$，故 m 的取值范围是 $\Big(0,\frac{1}{2e^2}\Big)$.

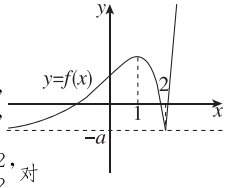
9. C　[解析] 由 $e^{x_1}+e(x_1-a-1)=0$，得 $e^{x_1-1}+(x_1-1)=a$，由 $\ln(x_2e^{x_2})-a=0$，得 $\ln x_2+x_2=a$，令 $x_2=e^t$，则 $\ln x_2+x_2=t+e^t=a$，又函数 $y=x+e^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上

18833506

的增函数，因此 $x_2=e^{x_1-1}$，则 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1}{e^{x_1-1}}$. 令 $h(x)=\frac{x}{e^{x-1}}$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{e^{x-1}}$，当 $x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)_{max}=h(1)=1$，所以 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值是 1.

10. AD ［解析］令 $f(x)=e^x-\frac{a}{x-1}=0$，则有 $a=e^x(x-1)(x\neq1)$，令 $h(x)=e^x(x-1)$，则有 $h'(x)=e^x x$，当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{min}=h(0)=-1$，又当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to0$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，$h(1)=0$，故由 $f(x)$ 有唯一零点，可得 $a=-1$ 或 $a>0$. 故选 AD.

11. BD ［解析］由题意得 $f(x)=|x-2|e^x-a=\begin{cases}(x-2)e^x-a,x\geqslant2,\\(2-x)e^x-a,x<2,\end{cases}$ 所以 $f'(x)=\begin{cases}(x-1)e^x,x\geqslant2,\\(1-x)e^x,x<2.\end{cases}$ 对于 A，当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)=(1-x)e^x<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，故 A 错误. 对于 B，当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，故 B 正确. 对于 C，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=|x-2|e^x-a\to-a$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，又 $f(1)=e-a>f(2)=-a$，所以 $f(x)$ 的大致图象如图所示，则 $f(x)$ 的值域为 $[-a,+\infty)$，所以 $f(x)$ 有最小值，无最大值，故 C 错误. 对于 D，因为 $a\in(1,2)$，所以 $f(2)=-a<0$，$f(3)=e^3-a>0$，所以 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上有一个零点，当 $x<2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，又 $f(1)=e-a>0$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=|x-2|e^x-a\to-a$，$f(2)=-a<0$. 结合 $f(x)$ 的大致图象，可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有一个零点，在 $(1,2)$ 上有一个零点. 综上，当 $a\in(1,2)$ 时，$f(x)$ 有三个零点，故 D 正确. 故选 BD.

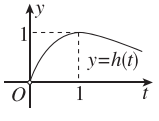


12. -2 ［解析］设 $g(x)=f(x-2)=|x|+e^x+e^{-x}+a$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g(-x)=|-x|+e^{-x}+e^x+a=|x|+e^x+e^{-x}+a=g(x)$，故函数 $g(x)$ 为偶函数，则函数 $f(x-2)$ 的图象关于 y 轴对称，故函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，∵$f(x)$ 有唯一零点，∴$f(-2)=0$，可得 $a=-2$.

13. 解：(1) 由 $f(x)=e^{1-\frac{1}{x}}(x>0)$，得 $f'(x)=e^{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x}-2\right)$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，故 $g(x)_{max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{e}$，所以 $f'(x)$ 的最大值为 $\frac{4}{e}$，$f'(x)$ 无最小值.

(2) $f(x)=kx(k>0)$ 等价于 $\frac{1}{x}e^{1-\frac{1}{x}}=k$，令 $t=\frac{1}{x}>0$，则关于 x 的方程 $f(x)=kx(k>0)$ 的根的个数等价于关于 t 的方程 $te^{1-t}=k(k>0)$ 的根的个数. 设 $h(t)=te^{1-t}$，$t>0$，则 $h'(t)=e^{1-t}(1-t)$，当 $t>1$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，当 $0<t<1$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增，又 $h(t)>0$ 恒成立，$h(0)=0$，$h(1)=1$，当 $t\to+\infty$ 时，$h(t)\to0$，所以 $y=h(t)$ 的图象如图所示. 由图可知，当 $k>1$ 时，$k=h(t)$ 没有实数根，即 $f(x)=kx$ 没有实数根；当 $k=1$ 时，$k=h(t)$ 有 1 个根，即 $f(x)=kx$ 有 1 个根；当 $0<k<1$ 时，$k=h(t)$ 有 2 个根，即 $f(x)=kx$ 有 2 个根.



14. 解：(1) 因为 $f(x)=ax+1-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1)(x>-1)$，

所以当 $a=1$ 时，$f(x)=x+1-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1)$，$x\in(-1,+\infty)$，

则 $f'(x)=1-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)-\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x+1}=1+\frac{\ln(x+1)}{x^2}-\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=1+\ln2-1=\ln2$，$f(1)=1+1-2\ln2=2-2\ln2$，

所以所求切线方程为 $y-(2-2\ln2)=\ln2(x-1)$，即 $y=x\ln2+2-3\ln2$.

(2) 由题意知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点等价于 $ax+1-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1)=0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时有解，由 $ax+1-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1)=0$，可得 $\frac{ax^2+x}{x+1}-\ln(x+1)=0$，设 $h(x)=\frac{ax^2+x}{x+1}-\ln(x+1)$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点. 易知 $h'(x)=\frac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2}$，当 $a\leqslant0$ 时，$h'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)<h(0)=0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点，所以 $a\leqslant0$ 不合题意. 当 $a>0$，且 $x\in(0,+\infty)$ 时，令 $h'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{a}-2$.

① 当 $\frac{1}{a}-2\leqslant0$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)=\frac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2}=\frac{ax\left(x+2-\frac{1}{a}\right)}{(x+1)^2}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点，所以 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 不合题意.

② 当 $\frac{1}{a}-2>0$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $h'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{a}-2$，令 $h'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{a}-2$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$ 上单调递增，又 $h(0)=0$，所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$ 时，$h(x)<0$，取 $x_0=\frac{2}{a^2}$，则 $x_0>\frac{1}{a}-2>0$，构造函数 $\varphi(x)=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)(x>0)$，则 $\varphi'(x)=e^x-(1+x)(x>0)$，令 $m(x)=\varphi'(x)$，则 $m'(x)=e^x-1$，所以当 $x>0$ 时，$m'(x)>0$ 恒成立，则 $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\varphi'(x)>\varphi'(0)=0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，所以 $e^{ax_0}-(x_0+1)>1+ax_0+\frac{1}{2}a^2x_0^2-(x_0+1)>\frac{1}{2}a^2x_0^2-x_0=\frac{1}{2}x_0(a^2x_0-2)=0$，所以 $ax_0>\ln(x_0+1)$，所以 $h(x_0)=\frac{ax_0^2+x_0}{x_0+1}-\ln(x_0+1)>\frac{ax_0^2+ax_0}{x_0+1}-\ln(x_0+1)=ax_0-\ln(x_0+1)>0$，所以存在 $x_1\in\left(\frac{1}{a}-2,x_0\right)$，使得 $f(x_1)=0$，所以 $0<a<\frac{1}{2}$ 符合题意.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

15. 解：(1) 证明：设 $g(x)=e^x-x-\frac{7}{4}-f(x)=e^x-x-1-\frac{1}{2}x\sin x$，则 $g'(x)=e^x-1-\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$.

设 $m(x)=g'(x)=e^x-1-\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$，则 $m'(x)=e^x+\frac{1}{2}(x\sin x-2\cos x)=e^x-\cos x+\frac{1}{2}x\sin x$，

因为 $y=e^x-\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，所以 $e^x-\cos x\geqslant e^0-\cos0=0$，

又因为当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\frac{1}{2}x\sin x\geqslant0$，所以 $m'(x)\geqslant0$，所以 $m(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，所以 $m(x)\geqslant m(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，所以当 $x\in[0,\pi]$ 时，$e^x-x-\frac{7}{4}\geqslant f(x)$.

(2) $f'(x)=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

因为 $f(0)=-\frac{3}{4}<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-3}{4}>0$，所以由函数零点存在定理知 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有一个零点.

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，令 $h(x)=f'(x)=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$，则 $h'(x)=\frac{1}{2}(2\cos x-x\sin x)$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，有 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，又因为 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$，$h(\pi)=-\frac{\pi}{2}<0$，所以存在 $m\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $h(m)=0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 时，$h(x)>h(m)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 上单调递增，所以当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},m\right]$ 时，$f(x)\geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-3}{4}>0$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},m\right]$ 上无零点，当 $x\in(m,\pi)$ 时，$h(x)<h(m)=0$，所以 $f(x)$ 在 (m,π) 上单调递减，

又 $f(m)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)=-\frac{3}{4}<0$，所以 $f(x)$ 在 (m,π) 上有且仅有一个

1853.com

零点.综上所述,$f(x)$在$[0,\pi]$上有且只有2个零点.

培优专训(二)　隐零点问题

1. 证明:设$g(x)=xe^x-\ln x-x-1,x>0$,则$g'(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x}-1$,

令$h(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x}-1,x>0$,

则$h'(x)=(x+2)e^x+\frac{1}{x^2}>0,x>0$,

即$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

又$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}-3<0,h(e)=(e+1)e^e-\frac{1}{e}-1>0$,故存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},e\right)$,使得$h(x_0)=0$,即$x_0e^{x_0}=1$,

当$x\in(0,x_0)$时,$h(x)<0$,故$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,

当$x\in(x_0,+\infty)$时,$h(x)>0$,故$g(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增,故$g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0e^{x_0}-\ln\frac{1}{e^{x_0}}-x_0-1=0$,

即$g(x)\geqslant0$,即$xe^x\geqslant\ln x+x+1$,

则$f(x)\leqslant xe^x$.

2. 证明:要证$f(x)>-\frac{3}{5x}-2$,只需证$x\ln x+5x^2-2x>-\frac{3}{5}$.

令$g(x)=x\ln x+5x^2-2x,x>0$,

则$g'(x)=\ln x+10x-1$,易知$g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,因为$g'(e^{-2})=\ln e^{-2}+10\times e^{-2}-1=\frac{10}{e^2}-3<0$,$g'\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{1}{4}+10\times\frac{1}{4}-1=\frac{3}{2}-\ln4=\frac{1}{2}(\ln e^3-\ln16)>0$,所以存在$x_0\in\left(e^{-2},\frac{1}{4}\right)$,使得$g'(x_0)=\ln x_0+10x_0-1=0$,即$\ln x_0=1-10x_0$,当$x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,故$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减;当$x\in(x_0,+\infty)$时,$g'(x)>0$,故$g(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增.

所以当$x=x_0$时,$g(x)$取得最小值$g(x_0)=x_0\ln x_0+5x_0^2-2x_0=x_0(1-10x_0)+5x_0^2-2x_0=-5x_0^2-x_0$.

令$h(x)=-5x^2-x\left(x\in\left(e^{-2},\frac{1}{4}\right)\right)$,由二次函数的性质可知,$h(x)=-5x^2-x$在$\left(e^{-2},\frac{1}{4}\right)$上单调递减,

所以$h(x)>h\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{16}>-\frac{3}{5}$,即$g(x_0)>-\frac{3}{5}$,所以$g(x)=x\ln x+5x^2-2x>-\frac{3}{5}$,所以$f(x)>-\frac{3}{5x}-2$.

3. 解:(1)由题意得$f'(x)=(x+1)e^x+ax+a=(x+1)(e^x+a)$,

∵$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,∴$f'(x)\geqslant0$在$\mathbf{R}$上恒成立且$f'(x)$不恒为零.

当$x\geqslant-1$时,$x+1\geqslant0$,则$e^x+a\geqslant0$恒成立,即$a\geqslant-e^x$恒成立,又$-e^x\leqslant-\frac{1}{e}$,∴$a\geqslant-\frac{1}{e}$;当$x\leqslant-1$时,$x+1\leqslant0$,则$e^x+a\leqslant0$恒成立,即$a\leqslant-e^x$恒成立,又$-e^x\geqslant-\frac{1}{e}$,∴$a\leqslant-\frac{1}{e}$.

综上可得$a=-\frac{1}{e}$.

(2)$F(x)=2f(x)-ax^2-(4a+1)x-2\ln x=2xe^x-(2a+1)x-2\ln x-2,x>0$,令$F(x)=0$,分离参数得$a+\frac{1}{2}=e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.令$g(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}(x>0)$,则$g'(x)=e^x-\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$.令$h(x)=x^2e^x+\ln x(x>0)$,则$h'(x)=x(x+2)e^x+\frac{1}{x}>0$,

∴$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

又$h(1)=e>0,h\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^2e^{\frac{1}{e}}-1=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1<0$,∴存在$x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$,使得$h(x_0)=0$,当$x\in(0,x_0)$时,$h(x)<0$,即$g'(x)<0$;当$x\in(x_0,+\infty)$时,$h(x)>0$,即$g'(x)>0$.∴$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增,

∴$g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}$.

由$h(x_0)=0$,得$x_0^2e^{x_0}=-\ln x_0$,可得$\ln(-\ln x_0)=2\ln x_0+x_0$,

∴$\ln(-\ln x_0)+(-\ln x_0)=\ln x_0+x_0$,

又$y=\ln x+x$在$(0,+\infty)$上单调递增,

∴$-\ln x_0=x_0$,即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,

故$g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{1}{x_0}-\frac{-x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=1$,又当$x\to0$时,$g(x)\to+\infty$,

当$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,

故只需$a+\frac{1}{2}>1$,解得$a>\frac{1}{2}$,即实数a的取值范围为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

4. 解:(1)由已知得,$x\neq-2$.

因为$f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x$,所以$f'(x)=e^x\left[\frac{x-2}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}\right]=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}$.

因为当$x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(-\infty,-2)$和$(-2,+\infty)$上单调递增.

证明:因为$f(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增,所以当$x>0$时,$f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x>f(0)=-1$,即$(x-2)e^x+x+2>0$.

(2)证明:由题意知$g'(x)=\frac{(x-2)e^x+a(x+2)}{x^3}=\frac{x+2}{x^3}[f(x)+a]$.

由(1)知,$y=f(x)+a$在$(0,+\infty)$上单调递增,对任意的$a\in[0,1)$,$f(0)+a=a-1<0$,$f(2)+a=a\geqslant0$,

所以存在唯一的$x_0\in(0,2]$,使得$f(x_0)+a=0$,即$g'(x_0)=0$,

当$0<x<x_0$时,$f(x)+a<0$,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;当$x>x_0$时,$f(x)+a>0$,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增.

因此$g(x)$在$x=x_0$处取得最小值,最小值为$g(x_0)=\frac{e^{x_0}-a(x_0+1)}{x_0^2}=\frac{e^{x_0}+f(x_0)(x_0+1)}{x_0^2}=\frac{e^{x_0}}{x_0+2}$.

当$x\in(0,2]$时,$\left(\frac{e^x}{x+2}\right)'=\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}>0$,知$y=\frac{e^x}{x+2}$在$(0,2]$上单调递增,

所以由$x_0\in(0,2]$,得$\frac{1}{2}=\frac{e^0}{0+2}<g(x_0)=\frac{e^{x_0}}{x_0+2}\leqslant\frac{e^2}{2+2}=\frac{e^2}{4}$.

因为$y=\frac{e^x}{x+2}$单调递增,对任意$\lambda\in\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right]$,存在唯一的$x_0\in(0,2]$,$a=-f(x_0)\in[0,1)$,使得$h(a)=\lambda$,

所以$h(a)$的值域是$\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right]$.

综上,当$a\in[0,1)$时,$g(x)$有最小值$h(a)$,$h(a)$的值域是$\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right]$.

第21讲　双变量不等式的证明

1. 解:(1)当$a=0$时,$f(x)=\ln x+x$,则$f(1)=1$,又因为$f'(x)=\frac{1}{x}+1$,所以切线的斜率$k=f'(1)=2$,故所求切线方程为$y-1=2(x-1)$,即$2x-y-1=0$.

(2)证明:当$a=-2$时,$f(x)=\ln x+x^2+x(x>0)$.

由$f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$,得$\ln x_1+x_1^2+x_1+\ln x_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$,

即$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1x_2-\ln(x_1x_2)$,令$t=x_1x_2(t>0)$,$\varphi(t)=t-\ln t$,则$\varphi'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$,易知$\varphi(t)$在区间$(0,1)$上单调递减,在区间$(1,+\infty)$上单调递增,所以$\varphi(t)\geqslant\varphi(1)=1$,所以$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geqslant1$,因为$x_1>0,x_2>0$,所以$x_1+x_2\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. 证明:因为$f(x)=2\ln x,g(x)=x^2+x$,所以$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}>\frac{4a}{g(a)+g(b)-a-b}$,即为$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}$.

要证$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}$,只需证对任意$b>a>0$,$\ln b-\ln a-\frac{2a(b-a)}{a^2+b^2}>0$,令$h(b)=\ln b-\ln a-\frac{2(ba-a^2)}{b^2+a^2}$,$b>a>0$,

则$h'(b)=\frac{1}{b}-\frac{2a(b^2+a^2)-4b(ab-a^2)}{(b^2+a^2)^2}=\frac{(b^2-a^2)(b^2-a^2+2ab)}{b(b^2+a^2)^2}$,当$b>a>0$时,$h'(b)>0$,$h(b)$单调递增,即$h(b)>h(a)=\ln a-\ln a-\frac{2(a^2-a^2)}{a^2+a^2}=0$,

即对任意$b>a>0$,$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}>\frac{4a}{g(a)+g(b)-a-b}$.

3. 解:(1)因为$f(x)$有极值点,所以$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+a)^2}=\frac{(x+a)^2-2x}{x(x+a)^2}$在$(0,+\infty)$上有变号零点,即$\varphi(x)=x^2+(2a-2)x+a^2$在$(0,+\infty)$上有变号零点.

①当$1-a\leqslant0$,即$a\geqslant1$时,$\varphi(0)=a^2>0$,故$\varphi(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立,则$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上无变号零点;

②当$1-a>0$,即$0<a<1$时,由$\Delta=(2a-2)^2-4a^2=4-8a>0$,得$a<\frac{1}{2}$,所以$0<a<\frac{1}{2}$.

综上,a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

(2)$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$,证明如下:先证$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$,即证$\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}=\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$,令$\frac{x_2}{x_1}=t,t>1$,即证$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$,

令$g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$,则$g'(t)=\frac{1}{t}-$

$\frac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(t)>g(1)=0$，不等式 $\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$ 得证. 再证 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$，

即证 $2\ln\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}<\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$，

令 $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=m$，$m>1$，即证 $2\ln m<m-\frac{1}{m}$，$m>1$，令 $h(m)=2\ln m-\left(m-\frac{1}{m}\right)$，则 $h'(m)=\frac{2}{m}-\left(1+\frac{1}{m^2}\right)=\frac{2m-m^2-1}{m^2}=\frac{-(m-1)^2}{m^2}<0$，所以 $h(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(m)<h(1)=0$，不等式 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$ 得证.

综上，$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$.

4. 证明：$\because g(x)=x(\ln x-x+a)$，定义域为 $(0,+\infty)$，$\therefore g'(x)=\ln x-2x+a+1$，$\because g(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2，

$\therefore g'(x)=0$ 有两个不相等的正根，且是 $g'(x)$ 的变号零点.

令 $h(x)=\ln x-2x+a+1$，由 $h'(x)=\frac{1}{x}-2=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增；当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$h(x)$ 取得最大值，最大值为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=a-\ln 2$. 当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，则 $h(x)$ 至多有两个零点，要使 $h(x)$ 有两个零点，

则必有 $a-\ln 2>0$，可得 $a>\ln 2$. 易知 x_1,x_2 为 $h(x)$ 的两个零点，

则 $\begin{cases}\ln x_1-2x_1+a+1=0,\\ \ln x_2-2x_2+a+1=0,\end{cases}$ 得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=2(x_1-x_2)$①，令 $\frac{x_1}{x_2}=t$，则 $x_1=tx_2$，由 $0<x_1<\frac{1}{2}<x_2$ 得 $0<t<1$，将 $x_1=tx_2$ 代入①式得 $2(tx_2-x_2)=\ln t$，

$\therefore x_2=\frac{\ln t}{2(t-1)}$，则 $x_1=\frac{t\ln t}{2(t-1)}$，故所证不等式转化为 $\frac{(t+1)\ln t}{2(t-1)}>1+\ln t$，$0<t<1$，只需证 $\frac{(3-t)\ln t}{2(t-1)}>1$，即证 $\ln t-\frac{2(t-1)}{3-t}<0$. 令 $F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{3-t}$，$t\in(0,1)$，则 $F'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(3-t)^2}=\frac{t^2-10t+9}{t(3-t)^2}=\frac{(t-1)(t-9)}{t(3-t)^2}$，

$\because 0<t<1$，$\therefore F'(t)>0$，$\therefore F(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$\therefore F(t)<F(1)=0$，

故 $\ln t-\frac{2(t-1)}{3-t}<0$，即不等式 $x_2+x_1>1+\ln\frac{x_1}{x_2}$ 得证.

第四单元　三角函数、解三角形

第 22 讲　任意角和弧度制、三角函数的概念

1. A　[解析] 将钟表校正的过程中，时针顺时针旋转了 $15°$，故时针旋转的弧度数为 $-\frac{\pi}{12}$，故选 A.

2. D　[解析] 由已知可得 $\alpha=-\frac{2\pi}{5}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，观察选项可得只有 $-\frac{22\pi}{5}=-\frac{2\pi}{5}-4\pi$，所以 α 可能是 $-\frac{22\pi}{5}$. 故选 D.

3. C　[解析] 点 $P(-3,1)$ 到原点的距离为 $\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$，所以由三角函数的定义可知 $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故选 C.

4. B　[解析] 对于 A，由 $\begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta>0,\end{cases}$ 可得 θ 为第一象限角，所以 A 不符合题意；对于 B，由 $\begin{cases}\sin\theta<0,\\ \cos\theta<0,\end{cases}$ 可得 θ 为第三象限角，反之也成立，所以 B 符合题意；对于 C，由 $\begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta<0,\end{cases}$ 可得 θ 为第二象限角，所以 C 不符合题意；对于 D，由 $\begin{cases}\sin\theta<0,\\ \cos\theta>0,\end{cases}$ 可得 θ 为第四象限角，所以 D 不符合题意. 故选 B.

5. D　[解析] 由 $P\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$，可得 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且 P 在单位圆上，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，故 $\sin\alpha\tan\alpha=\frac{3}{2}$. 故选 D.

6. $\frac{3\pi}{2}$　[解析] 在 $\triangle ABO$ 中，$AB^2=OA^2+OB^2=18$，故 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，故弧长 $l=\frac{\pi}{2}\times3=\frac{3\pi}{2}$.

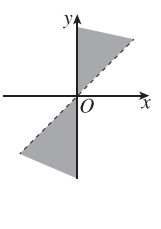
7. ①②③　[解析] 对于①，因为 $-180°<-100°<-90°$，所以 $-100°$ 是第三象限角，所以 $\sin(-100°)<0$；对于②，因为 $-270°<-220°<-180°$，所以 $-220°$ 是第二象限角，所以 $\cos(-220°)<0$；对于③，因为 $-\frac{7\pi}{2}<-10<-3\pi$，所以 -10 是第二象限角，所以 $\tan(-10)<0$；对于④，因为 $\frac{\pi}{3}$ 是第一象限角，所以 $\cos\frac{\pi}{3}>0$. 故填①②③.

8. D　[解析] 由 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以 $y=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{5}=\frac{4}{5}$. 故选 D.

9. B　[解析] 依题意知，伞面的曲线为弧 AB，人体为圆心 O，点 O,C,D 共线，因为 $\angle AOB=60°$，所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形，所以 $OC=3\sqrt{3}$，$CD=6-3\sqrt{3}=3(2-\sqrt{3})$，所以 $s=6+\frac{9(2-\sqrt{3})^2}{6}=6+\frac{3}{2}\times(7-4\sqrt{3})\approx6+\frac{3}{2}\times(7-4\times1.7)=6.3$. 故选 B.

10. ABC　[解析] 对于 A，因为角 α 的终边过点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以角 α 为第一象限角，由三角函数的定义知 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，所以角 α 的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同，所以角 α 的集合是 $\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，故 A 选项正确；对于 B，因为角 α 是第四象限角，所以 $\sin\alpha<0$，$\tan\alpha<0$，所以点 $P(\sin\alpha,\tan\alpha)$ 在第三象限，故 B 选项正确；对于 C，因为 $-2024°=-44°-11\times180°$，所以集合 $A=\{\alpha\mid\alpha=-2024°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$ 中的最大负角 α 为 $-44°$，故 C 选项正确；对于 D，设扇形的半径为 r cm，则扇形的弧长为 $l=2r$，所以扇形的周长为 $l+2r=2r+2r=4r=8$，可得 $r=2$，所以 D 选项不正确. 故选 ABC.

11. BD　[解析] 由题意，得 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的范围如图中阴影部分所示（不包含边界），故 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的符号不确定，$\tan\frac{\alpha}{2}>0$，故 C 错误，D 正确. 当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角，此时 $0<\cos\frac{\alpha}{2}<\sin\frac{\alpha}{2}$；当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角，此时 $\sin\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\alpha}{2}<0$. 故 $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|>\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$，所以 A 错误，B 正确. 故选 BD.



12. π　[解析] 由已知得，经过 t s，A_1，A_2 第一次相遇，此时 A_1 比 A_2 多走一圈，所以 $4t-2t=2\pi\times1$，所以 $t=\pi$.

13. 解：$\because P(x,-\sqrt{2})(x\neq0)$，$\therefore$ 点 P 到原点的距离 $r=\sqrt{x^2+2}$. 又 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}x$，

$\therefore\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}x$.

$\because x\neq0$，$\therefore x=\pm\sqrt{10}$，$\therefore r=2\sqrt{3}$.

当 $x=\sqrt{10}$ 时，点 P 的坐标为 $(\sqrt{10},-\sqrt{2})$，由三角函数的定义，得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{6}$，$\frac{1}{\tan\alpha}=-\sqrt{5}$，$\therefore\sin\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{\sqrt{6}}{6}-\sqrt{5}=-\frac{6\sqrt{5}+\sqrt{6}}{6}$；

当 $x=-\sqrt{10}$ 时，同理可求得 $\sin\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{6\sqrt{5}-\sqrt{6}}{6}$.

14. 解：(1) 因为点 A 运动的路程为 $\frac{2\pi}{3}$，$OA=1$，所以 $\angle AOx=\frac{2\pi}{3}$，又 $OB=2$，所以 $\angle BOx=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理得 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$，可得 $AB=\sqrt{3}$.

(2) 设 $\angle AOx=2\alpha$，则 $\angle BOx=\alpha$，所以 $A(\cos2\alpha,\sin2\alpha)$，$B(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，则 $x_1+y_2=\cos2\alpha+2\sin\alpha=-2\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1=-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$，

所以当 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 时，x_1+y_2 取得最大

值$\frac{3}{2}$.

15. $\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{2}$ ［解析］点A走过的路径是由9段圆心角均为$\frac{\pi}{6}$的劣弧组成的，其中6段劣弧所在圆的半径为1，3段劣弧所在圆的半径为$\sqrt{2}$，所以点A走过的路径的长度为$\frac{\pi}{6}\times(1+\sqrt{2}+1+1+\sqrt{2}+1+1+\sqrt{2}+1)=\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{2}$.

16. $ld-\frac{1}{2}\alpha d^2$ ［解析］由题意知，大扇形的半径为$\frac{l}{\alpha}$，小扇形的半径为$\frac{l}{\alpha}-d$，梯形的上底为$\left(\frac{l}{\alpha}-d\right)\cdot\alpha$，下底为$l$，高为$d$，由题意可知该图形的面积等于梯形的面积，即$S=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{l}{\alpha}-d\right)\alpha+l\right]d=ld-\frac{1}{2}\alpha d^2$.

第23讲　同角三角函数的基本关系式与诱导公式

1. A ［解析］$\cos 300^\circ=\cos(360^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$. 故选A.

2. C ［解析］因为$\tan 3\alpha=-12$，所以$\tan(\pi-3\alpha)=-\tan 3\alpha=12$. 故选C.

3. B ［解析］因为$\tan\alpha=2$，所以$\frac{5\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{5\tan\alpha+1}{2\tan\alpha-1}=\frac{5\times2+1}{2\times2-1}=\frac{11}{3}$. 故选B.

4. C ［解析］由$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}$，可得$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{169}$，可得$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{120}{169}$，则$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{120}{169}=\frac{289}{169}$，因为$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{120}{169}<0$，所以$\sin\theta$与$\cos\theta$异号，可得$\theta$为第二或第四象限. 当$\theta$为第二象限角时，可得$\sin\theta-\cos\theta=\frac{17}{13}$；当$\theta$为第四象限角时，可得$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{17}{13}$. 故选C.

5. A ［解析］因为角α的终边在函数$y=2x$的图象上，所以$\tan\alpha=2$，故$1-2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha-2}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2^2-2\times2-2}{2^2+1}=-\frac{2}{5}$. 故选A.

6. -3 ［解析］因为角α为第三象限角，所以$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$，所以原式$=\frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{2\sin\alpha}{-\sin\alpha}=-3$.

7. $-\sqrt{3}$ ［解析］由$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)+3\cos(\alpha-\pi)=1$，得$\cos\alpha-3\cos\alpha=1$，∴$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$. ∵角$\alpha$是第二象限角，∴$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{3}$.

8. B ［解析］由诱导公式得$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，又因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选B.

9. A ［解析］因为$2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-4\cos\alpha=3$，所以$3\cos^2\alpha-4\cos\alpha-4=0$，所以$\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. 又因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选A.

10. AC ［解析］∵角α的终边与单位圆交于点$\left(\frac{3}{5},y_0\right)$，∴$\frac{9}{25}+y_0^2=1$，∴$y_0=\pm\frac{4}{5}$，∴$\tan\alpha=\frac{y_0}{\frac{3}{5}}=\pm\frac{4}{3}$. 当$\tan\alpha=\frac{4}{3}$时，$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+2}{3\tan\alpha-1}=\frac{10}{9}$；当$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$时，$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+2}{3\tan\alpha-1}=-\frac{2}{15}$. 故选AC.

11. AC ［解析］在$\triangle ABC$中，$B+C=\pi-A$. 对于A，$\sin A-\sin(B+C)=\sin A-\sin(\pi-A)=0$，故A正确；对于B，$\cos A-\cos(B+C)=\cos A-\cos(\pi-A)=2\cos A$，$\cos A$不一定为0，故B错误；对于C，$\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=0$，故C正确；对于D，$\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}$不一定为0，故D错误. 故选AC.

12. 2 ［解析］∵$\tan(3\pi+\alpha)=2$，∴$\tan\alpha=2$，∴原式$=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=2$.

13. 4 ［解析］方法一：由$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，得$\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$，解得$\tan\alpha=2-\sqrt{3}$，故$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$.

方法二：由$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，可得$\frac{1+2\cos\alpha\sin\alpha}{1-2\cos\alpha\sin\alpha}=3$，故$\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4}$，故$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=4$.

14. 解：(1)由$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{10}{3}$，得$3\tan^2\alpha+10\tan\alpha+3=0$，解得$\tan\alpha=-3$或$-\frac{1}{3}$，因为$\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$，所以$-1<\tan\alpha<0$，所以$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$.

(2)$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{-\frac{1}{3}+1}{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{1}{2}$.

(3)$2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha-\tan\alpha-3}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}-3}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1}=-\frac{11}{5}$.

15. 解：(1)$f(\alpha)=\frac{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{4\sin(2024\pi+\alpha)-\cos(2023\pi+\alpha)}=\frac{-2\cos\alpha-3\sin\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$，

∴$f(\alpha)=\frac{-2\cos\alpha-3\sin\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}=-1$，整理得$\tan\alpha=1$，又$0<\alpha<\pi$，∴$\alpha=\frac{\pi}{4}$.

(2)∵$\sin\beta=\frac{1}{3}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，∴$\cos\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=2\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$，∴$\cos(2\alpha+2\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right)=-\sin 2\beta=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

16. B ［解析］因为$\sin 310^\circ<0$，$\cos 310^\circ>0$，所以角α为第二象限角，又因为$\tan\alpha=\frac{\cos 310^\circ}{\sin 310^\circ}=\frac{\cos(360^\circ-50^\circ)}{\sin(360^\circ-50^\circ)}=\frac{\cos 50^\circ}{-\sin 50^\circ}=\frac{\cos(140^\circ-90^\circ)}{-\sin(140^\circ-90^\circ)}=\frac{\sin 140^\circ}{\cos 140^\circ}=\tan 140^\circ$，且$0^\circ<\alpha<360^\circ$，所以$\alpha=140^\circ$. 故选B.

17. BCD ［解析］$\operatorname{versin}\frac{22\pi}{3}=1-\cos\frac{22\pi}{3}=1-\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$，故A错误；$\operatorname{versin}(2025\pi-\theta)-\operatorname{coversin}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=1-\cos(2025\pi-\theta)-1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta-\cos\theta=0$，故B正确；因为$\frac{\operatorname{coversin}x-1}{\operatorname{versin}x-1}=\frac{1-\sin x-1}{1-\cos x-1}=\tan x=2$，所以$\frac{\operatorname{coversin}x-\operatorname{versin}x}{2-(\operatorname{coversin}x+\operatorname{versin}x)}=\frac{1-\sin x-1+\cos x}{2-(1-\sin x+1-\cos x)}=\frac{-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{-\tan x+1}{\tan x+1}=\frac{-2+1}{2+1}=-\frac{1}{3}$，故C正确；$f(x)=\operatorname{versin}\left(2025x-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{coversin}\left(2025x+\frac{\pi}{6}\right)=1-\cos\left(2025x-\frac{\pi}{3}\right)+1-\sin\left(2025x+\frac{\pi}{6}\right)=2-\sin\left(2025x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(2025x+\frac{\pi}{6}\right)=2-2\sin\left(2025x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以当$\sin\left(2025x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$时，$f(x)$取得最大值4，故D正确. 故选BCD.

第 24 讲　和、差、倍角的正弦、余弦和正切公式

1. D　[解析] $1-2\sin^2 750^\circ=\cos 1500^\circ=\cos(4\times360^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，故选 D.

2. A　[解析] 原式 $=\cos 40^\circ\sin 160^\circ-\sin 40^\circ\cos 160^\circ=\sin(160^\circ-40^\circ)=\sin 120^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 A.

3. D　[解析] $\because 5\pi<\theta<6\pi$，$\therefore\frac{\theta}{2}\in\left(\frac{5\pi}{2},3\pi\right)$，$\frac{\theta}{4}\in\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$，故 $\sin\frac{\theta}{4}<0$，又 $\cos\frac{\theta}{2}=a$，$\therefore\sin\frac{\theta}{4}=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2}}=-\sqrt{\frac{1-a}{2}}$. 故选 D.

4. A　[解析] 因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{12}{13}$，所以 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{12}{13}\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$. 故选 A.

5. D　[解析] 因为 $\sin\beta+\cos\beta=\frac{1}{5}$，$\beta\in(0,\pi)$，所以 $\sin^2\beta+\cos^2\beta+2\sin\beta\cos\beta=\frac{1}{25}$，故 $2\sin\beta\cos\beta=-\frac{24}{25}<0$，又 $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\beta>0$，$\cos\beta<0$. 又 $(\sin\beta-\cos\beta)^2=1-2\sin\beta\cos\beta=\frac{49}{25}$，所以 $\sin\beta-\cos\beta=\frac{7}{5}$，所以 $\sin\beta=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$，故 $\tan\beta=-\frac{4}{3}$，故 $\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\frac{4}{3}+1}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\times1}=-\frac{1}{7}$，故选 D.

6. $-\frac{1}{4}$　[解析] 由 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{1}{2}$，得 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{1}{4}$.

7. $-\frac{3}{4}$　[解析] 由 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\tan\theta$，且 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=-\frac{2}{3}\tan\theta$，整理得 $2\tan^2\theta-5\tan\theta-3=0$，解得 $\tan\theta=3$（负值舍去），所以 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times3}{1-3^2}=-\frac{3}{4}$.

8. C　[解析] 由 $2\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{3}$，$2\cos\alpha-\cos\beta=1$，两边平方后相加得 $4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta-4\sin\alpha\sin\beta-4\cos\alpha\cos\beta=4$，即 $5-4\sin\alpha\sin\beta-4\cos\alpha\cos\beta=4$，得 $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$，即 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$，故选 C.

9. A　[解析] 因为 $\tan(\alpha+\beta)=7$，所以 $\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)=7\tan(\alpha-\beta)$，又 $\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdot\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}=21$，所以 $21=7\tan(\alpha-\beta)$，即 $\tan(\alpha-\beta)=3$，故 $\tan 2\alpha=\tan[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)}=\frac{7+3}{1-7\times3}=-\frac{1}{2}$. 故选 A.

10. BC　[解析] 对于 A，$\sin20^\circ\cos10^\circ+\cos160^\circ\sin10^\circ=\sin20^\circ\cos10^\circ-\cos20^\circ\sin10^\circ=\sin10^\circ\neq\frac{1}{2}$，故 A 错误；对于 B，$(1+\tan18^\circ)(1+\tan27^\circ)=1+\tan18^\circ+\tan27^\circ+\tan18^\circ\tan27^\circ=1+\tan(18^\circ+27^\circ)(1-\tan18^\circ\tan27^\circ)+\tan18^\circ\tan27^\circ=2$，故 B 正确；对于 C，$\frac{\cos78^\circ+\sin18^\circ\sin60^\circ}{\cos18^\circ}=\frac{\cos(18^\circ+60^\circ)+\sin18^\circ\sin60^\circ}{\cos18^\circ}=\frac{\cos18^\circ\cos60^\circ}{\cos18^\circ}=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，故 C 正确；对于 D，$\sin10^\circ\cos20^\circ\sin30^\circ\cos40^\circ=\frac{1}{2}\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin40^\circ}{2\sin20^\circ}\cdot\frac{\sin80^\circ}{2\sin40^\circ}\cdot\frac{\sin160^\circ}{2\sin80^\circ}=\frac{1}{16}$，故 D 错误. 故选 BC.

11. ABC　[解析] 对于 A，因为 $\angle AOx=\alpha$，$\angle BOx=\beta$，$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle AOB=\beta-\alpha$，故 A 正确；对于 B，由 M 为线段 AB 的中点，得 $OM\perp AB$，则 $\angle AOM=\frac{\beta-\alpha}{2}$，又 $|OA|=1$，所以 $|OM|=|OA|\cos\angle AOM=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$，故 B 正确；对于 C，易得 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，所以 $\angle COx=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，又 $|OC|=1$，所以点 C 的坐标为 $\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$，故 C 正确；对于 D，$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\times2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$，$y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\times2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$，所以点 M 的坐标为 $\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2},\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$，故 D 错误. 故选 ABC.

12. $9+4\sqrt{5}$　[解析] 将 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{2+\sqrt{5}}{3}$ 两边平方，得 $1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{9+4\sqrt{5}}{9}$，即 $\sin2\theta=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$，因为 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，所以 $2\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，所以 $\cos2\theta=\frac{1}{9}$，故 $\frac{1-\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{1+\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}}=9+4\sqrt{5}$.

13. $-\frac{3}{5}$　[解析] 由 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=2$ 可得 $\tan\alpha=2\tan\beta$，所以 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\beta}{\cos\beta}$，则 $\sin\alpha\cos\beta=2\sin\beta\cos\alpha$，因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\sin\beta=-\frac{1}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\sin\beta=3\cos\alpha\sin\beta=-\frac{3}{5}$.

14. 解：(1) 因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，

又因为 $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}<0$，

所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$，

则 $\sin(\alpha-\beta)<0$，由 $\sin^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1$ 及 $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=-\frac{1}{3}$，可得 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(2) 由 (1) 可得，$\cos(\alpha-\beta)>0$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 因为 α 为锐角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{9\sqrt{10}}{50}$.

15. 解：(1) 证明：连接 PA，P_1P_2，易知 $|PA|=|P_1P_2|$，$\therefore[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$，即 $2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$，$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

(2) 由 (1) 知，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\therefore\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，$\therefore\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，

故 $\cos37.5^\circ\cos37.5^\circ=\frac{1}{2}[\cos(37.5^\circ+37.5^\circ)+\cos(37.5^\circ-37.5^\circ)]=\frac{1}{2}(\cos75^\circ+1)=\frac{1}{2}(\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{2}$.

16. C　[解析] $\tan\frac{C}{2}=3\tan\frac{A}{2}$，设 $m=\tan\frac{A}{2}$，则 $\tan\frac{C}{2}=3m$，显然 $\tan\frac{A}{2}>0$，

$\tan\frac{C}{2}>0$，即 $m>0$，所以 $\frac{2}{\sin A}+\frac{6}{\sin C}=\frac{2}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{6}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2}{\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{6}{\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{2}{2\tan\frac{A}{2}}+\frac{6}{2\tan\frac{C}{2}}=\frac{2}{\tan^2\frac{A}{2}+1}+\frac{6}{\tan^2\frac{C}{2}+1}=\frac{2}{\frac{2m}{m^2+1}}+\frac{6}{\frac{6m}{9m^2+1}}=\frac{m^2+1}{m}+\frac{9m^2+1}{m}=10m+\frac{2}{m}\geqslant 2\times\sqrt{10\times 2}=4\sqrt{5}$，当且仅当 $10m=\frac{2}{m}$，即 $m=\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时等号成立，故 $\frac{2}{\sin A}+\frac{6}{\sin C}$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$. 故选 C.

第 25 讲　简单的三角恒等变换

1. A　[解析] $\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\sqrt{2}\sin(15^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$. 故选 A.

2. B　[解析] $\sin\left(\frac{\pi}{10}+2\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{10}+2\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{2\pi}{5}-2\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)-1=2\times\frac{1}{9}-1=-\frac{7}{9}$，故选 B.

3. A　[解析] 由题知 $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 故选 A.

4. C　[解析] 由 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\cos\frac{\beta}{2}>0$，由 $\tan\alpha=\frac{\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}$，得 $\tan\alpha=\frac{1+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\beta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$，而 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，因此 $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$，所以 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

5. D　[解析] 由题得 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，又 α 为第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，则 $\sin 2\beta-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=-[\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)]=-\sin 2\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha=-2\times\frac{2}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{9}$. 故选 D.

6. $\frac{2}{5}$　[解析] $\frac{\cos\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan\theta+1}{\tan^2\theta+1}=\frac{2}{5}$.

7. $-\frac{1}{12}$　[解析] 由 $\tan\alpha=2\tan\beta$，即 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\beta}{\cos\beta}$，可得 $\sin\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\sin\beta$，又 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=3\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$，可得 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$，所以 $\sin(\beta-\alpha)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta=-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{1}{12}$.

8. B　[解析] $\frac{\cos 20^\circ-\sin 30^\circ\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 60^\circ}=\frac{\cos(60^\circ-40^\circ)-\sin 30^\circ\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 60^\circ}=\frac{\sin 60^\circ\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 60^\circ}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$. 故选 B.

9. B　[解析] $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=m$，设 $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=x$，则 $-\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{x}{m}$，因为 $\alpha-\beta$ 为第一象限角，所以 $\frac{\alpha-\beta}{2}$ 是第一或第三象限角，所以 $\frac{x}{m}<0$. 因为 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\frac{-2x}{m}}{1-\frac{x^2}{m^2}}=\frac{3}{4}$，设 $\frac{x}{m}=t<0$，所以 $3t^2-8t-3=0$，得 $t=-\frac{1}{3}$，即 $\frac{x}{m}=-\frac{1}{3}$，则 $x=-\frac{m}{3}$，所以 $\cos\alpha-\cos\beta=-\frac{m}{3}$. 故选 B.

10. AD　[解析] 易知 $\cos x\neq 0$，因为 $\frac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}=1$，所以 $\frac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}=\frac{\tan x+1}{2\tan x-1}=1$，可得 $\tan x=2$，故 A 选项正确；由 $\frac{\sin x}{\cos x}=2$，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，得 $\sin x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 B 选项错误；$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$，故 C 选项错误；由 $\sin x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，得 $\sin^2 x=\frac{4}{5}$，所以 $\sin 2x=2\sin x\cos x=\sin^2 x=\frac{4}{5}$，故 D 选项正确. 故选 AD.

11. ABD　[解析] 由 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，得 $\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{3}$ ①，由 $\tan\alpha=5\tan\beta$，得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{5\sin\beta}{\cos\beta}$，即 $\sin\alpha\cos\beta=5\sin\beta\cos\alpha$ ②，由①② 可得 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{12},\\ \sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{12},\end{cases}$ 所以 A，B 均正确；$\sin 2\alpha\sin 2\beta=2\sin\alpha\cos\alpha\times 2\sin\beta\cos\beta=4\times\frac{1}{12}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{36}$，所以 C 错误；$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又因为 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{4}$，所以 $\alpha+\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$，所以 D 正确. 故选 ABD.

12. $\frac{12}{13}$　[解析] 因为 $A\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$，所以 $\sin\angle MOA=\frac{12}{13}$，因为 $|AB|=|OA|=|OB|=1$，所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，故 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}(1+\cos\alpha)}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\angle MOA=\frac{12}{13}$.

13. $\frac{\pi}{4}$　[解析] 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\alpha-\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$. 由 $\alpha-\beta=\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{3\pi}{4}+\beta\right)$，得 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{3\pi}{4}+\beta\right)$，不妨记 $x=\frac{\pi}{4}-\alpha$，$y=\frac{3\pi}{4}+\beta$，则 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$y\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，且 $\sin(\alpha-\beta)=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$，又 $\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，又 $\sin y=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\cos y=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故 $\sin(\alpha-\beta)=\sin x\cos y+\sin y\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

14. 解：(1) 由已知得 $2\sin\alpha=-\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，故 $\sin\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1}{5}$.

(2) 由 $\tan^2\beta-6\tan\beta=1$，可得 $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=-\frac{1}{3}$，则 $\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=-1$. 因为 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\beta\in(0,\pi)$，又 $\tan 2\beta=-\frac{1}{3}>-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $2\beta\in\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$，因为 $\alpha\in(0,\pi)$，$\tan\alpha=-\frac{1}{2}>-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\alpha\in\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$，则 $\alpha+2\beta\in\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$，所以 $\alpha+2\beta=\frac{7\pi}{4}$.

15. 解：(1) $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+$

$2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left[\pi-\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=0$.

(2)∵$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴$2\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，又 $f(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$0<\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$2\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，∴$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴$\sin 2\alpha=\sin\left[\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$.

16. 解：(1)因为 $OC=10\sqrt{3}$，$BC=10$，$\angle OCB=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle BOC=\frac{\pi}{6}$，$OB=\sqrt{10^2+(10\sqrt{3})^2}=20$，则 $OA=20$，$\angle BOA=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，$\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $l=\frac{\pi}{3}\times 20=\frac{20\pi}{3}$，

所以广告带的总长度为 $OA+OC+BC+l=\left(30+10\sqrt{3}+\frac{20\pi}{3}\right)$(米).

(2)连接 OF. 设 $\angle FOA=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$. 因为 $OF=20$，所以 $FI=GH=20\sin\theta$，$OI=20\cos\theta$，因为 $\angle AOD=\frac{\pi}{6}$，所以 $OG=\frac{GH}{\tan\frac{\pi}{6}}=20\sqrt{3}\sin\theta$，所以 $GI=20\cos\theta-20\sqrt{3}\sin\theta$，所以 $S=GI\cdot GH=(20\cos\theta-20\sqrt{3}\sin\theta)\cdot 20\sin\theta=400\sin\theta\cos\theta-400\sqrt{3}\sin^2\theta=200[\sin 2\theta-\sqrt{3}(1-\cos 2\theta)]=200\left[2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\right]$，因为 $2\theta+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以当 $2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，S 取得最大值，所以 $S\leqslant 200(2-\sqrt{3})=400-200\sqrt{3}$，所以促销展示区的面积 S 的最大值为 $(400-200\sqrt{3})$ 平方米.

第 26 讲　三角函数的图象与性质

1. B　[解析] 由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，得 $2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 B.

2. C　[解析] 由 $f(x)$ 为奇函数，可得 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

3. C　[解析] 由题意知，$f(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，由 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{2\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，结合 $x\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，可得 $x\in\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$. 故选 C.

4. D　[解析] 因为函数 $f(x)=\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=\frac{2\pi}{2\pi}=1$，则 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，对比选项可知，只有当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{3}$ 符合题意，故 D 正确. 故选 D.

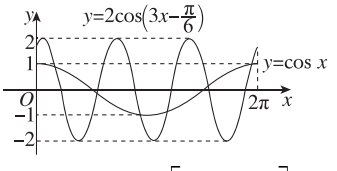
5. BC　[解析] 函数 $f(x)=\sin|x|=\begin{cases}\sin x,x>0,\\-\sin x,x\leqslant 0,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，且不具有周期性，不关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故选项 A，D 错误，C 正确；易得 $f(x)$ 的最大值为 1，故 B 正确. 故选 BC.

6. $\left\{x\middle|2k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

[解析] 要使函数有意义，则有 $\begin{cases}\sin x>0,\\\cos x-\frac{1}{2}\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sin x>0,\\\cos x\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}2k\pi<x<\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\\-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 所以 $2k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以函数的定义域为 $\left\{x\middle|2k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

7. $\frac{\pi}{2}$　[解析] $f(x)=|\sin^2x-\cos^2x|=|\cos 2x|$，因为 $y=\cos 2x$ 的最小正周期为 π，所以 $f(x)=|\cos 2x|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

8. D　[解析] 函数 $y=\cos x$ 与 $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象如图所示，由图可知，两曲线的交点个数为 6. 故选 D.



9. B　[解析] 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$. 若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\begin{cases}\omega\leqslant 4-12k,\\\omega\leqslant 2+12k\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，若不等式组有解，则 $\begin{cases}4-12k>0,\\2+12k>0\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，可得 $k=0$，则 $0<\omega\leqslant 2$；若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\begin{cases}\omega\leqslant-2-12k,\\\omega\leqslant 8+12k\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，若不等式组有解，则 $\begin{cases}-2-12k>0,\\8+12k>0\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，不等式组无解，故不存在 $\omega>0$，使得 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减. 综上所述，$\omega\in(0,2]$，则 ω 的最大值为 2. 故选 B.

10. BC　[解析] 对于 A，$y=f(x)g(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 错误；对于 B，$y=f(x)-g(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，当 $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$ 时，函数有最大值 $\sqrt{2}$，故 B 正确；对于 C，由 $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，得 $x-\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，可得 $x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，故 C 正确；对于 D，$y=f(x)+g(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，可得 $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，结合 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，可得函数在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，故 D 错误. 故选 BC.

11. AD　[解析] $f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x+\varphi)+\frac{1}{2}$，因为 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x=\frac{5\pi}{12}$，所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$. 对于 A，$f(x)$ 的最小正周期为 π，故 A 正确；对于 B，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，故 B 错误；对于 C，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$，故 C 错误；对于

D，$y=f(\omega x)=\frac{1}{2}\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，若函数 $y=f(\omega x)(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，则 $2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{5}{12}$，故 D 正确. 故选 AD.

12. (1)π (2)-2 ［解析］(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\cos^2x=\frac{\cos 2x+1}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)$f(x)=\cos^2x+a\sin x=-\sin^2x+a\sin x+1=-\left(\sin x-\frac{a}{2}\right)^2+1+\frac{a^2}{4}$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\sin x\in(0,1]$，令 $t=\sin x$，则 $t\in(0,1]$，$g(t)=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+1+\frac{a^2}{4}$ 的图象开口向下，要使 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的最小值为 -2，则 $g(t)$ 在 $(0,1]$ 上的最小值为 -2，则需要 $1-\frac{a}{2}\geqslant\frac{a}{2}-0$，即 $a\leqslant1$，且当 $t=1$，即 $\sin x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值，故 $-1+a+1=-2$，解得 $a=-2$.

13. 2 ［解析］线段 MN 的长度等于点 $(a,f(a))$ 与点 $(a,g(a))$ 间的距离，即 $|MN|=|f(a)-g(a)|$. 令 $F(x)=|f(x)-g(x)|=\left|\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right|=|2\sin x|$，易知 $F(x)$ 的最大值为 2，故线段 MN 长度的最大值为 2.

14. 解：(1)$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

(2)令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$，∴ $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(3)由(2)可得，函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，∵ $f(0)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

15. 解：(1)$f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x=2\left(\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x\right)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，因为函数 $f(x)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{1}{2}T=\frac{\pi}{2}$，则 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\left(2\times\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

(2)由 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，得 $\frac{\pi\omega}{3}-\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=3k+1,k\in\mathbf{Z}$. 由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，$\omega>0$，得 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi\omega}{4}-\frac{\pi}{3}\right]$，又函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，所以 $\begin{cases}\frac{\pi\omega}{4}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \omega>0,\end{cases}$ 解得 $0<\omega\leqslant\frac{10}{3}$，所以 $\omega=1$.

16. BCD ［解析］由 $\sin x>0,\cos x>0$ 得 $f(x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$. 对于 A，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x+\pi\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，不在定义域内，故选项 A 错误；对于 B，$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2x\cdot\log_2\cos x+2\sin^2x\cdot\log_2\sin x=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故选项 B 正确；对于 C，$f(x)=\sin^2x\cdot\log_2\sin^2x+\cos^2x\cdot\log_2\cos^2x$，$x\in\left(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$，设 $t=\sin^2x$，$g(t)=t\cdot\log_2t+(1-t)\cdot\log_2(1-t)$，$t\in(0,1)$，则 $g'(t)=\log_2t-\log_2(1-t)$，由 $g'(t)>0$ 得 $\frac{1}{2}<t<1$，由 $g'(t)<0$ 得 $0<t<\frac{1}{2}$，所以 $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，故 $g(t)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，即 $f(x)_{\min}=-1$，故选项 C 正确；对于 D，$g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，令 $0<\sin^2x<\frac{1}{2}$，可得 $0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $f(x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$，所以 $2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $t=\sin^2x$ 在每一个区间 $\left(2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$ 上都单调递增，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$，故选项 D 正确. 故选 BCD.

第 27 讲　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及三角函数模型的应用

1. A ［解析］因为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$，所以把函数 $y=\sin2x$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可得 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故选 A.

2. C ［解析］由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=-1$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减；当 $k=0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$ 上单调递减；当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{8\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right]$ 上单调递减. 故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上不单调递减，在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故选 C.

3. C ［解析］$f(x)=-\sqrt{3}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x+\frac{1}{2}\sin2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x+\frac{1}{2}\sin2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，由 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，故选 C.

4. D ［解析］由图象知 $A=\sqrt{2}$，$f(0)=1$，所以 $\sqrt{2}\sin\varphi=1$，结合图象知 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 由 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，得 $\frac{5\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=\frac{8k}{5}+1,k\in\mathbf{Z}$，又 $\frac{2\pi}{\omega}>\frac{5\pi}{4},\omega>0$，所以 $0<\omega<\frac{8}{5}$，则 $\omega=1$，所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，故选 D.

5. CD ［解析］由题意知 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)$ 的最大值为 1，故 A 错误；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，显然 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内不单调，故 B 错误；$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，故直线 $x=\frac{5\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的图象的一条对称轴，故 C 正确；令 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$，则 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的所有非负零点为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{N}$，易知 $\{x_n\}$ 是首项为 $\frac{\pi}{12}$，公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列，故 D 正确. 故选 CD.

6. $\frac{\pi}{4}$ ［解析］函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，由于 $f\left(\frac{T}{4}\right)=\sin\left(\omega\times\frac{2\pi}{4\omega}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<\varphi<\pi$，∴ $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

7. $\frac{1}{4}$ ［解析］由题意可知，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值，则 $\omega\cdot\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+$

$2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\omega=\frac{1}{4}+3k,k\in\mathbf{Z}$，又 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 上无最小值，所以 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi-\frac{\pi}{3}$，所以 $0<\omega\leqslant3$，所以 $\omega=\frac{1}{4}$.

8. B ［解析］题中图象对应函数的最小正周期 $T=2\times(1-0)=2$. 对于 A，$f(2x-1)=\cos\,2\pi(2x-1)=\cos(4\pi x-2\pi)=\cos\,4\pi x$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，不符合题意，故 A 错误；对于 B，$f\left(\frac{x}{2}-1\right)=\cos\,2\pi\left(\frac{x}{2}-1\right)=\cos(\pi x-2\pi)=\cos\,\pi x$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\pi}=2$，且 $(0,1)$ 和 $(1,-1)$ 都在函数图象上，符合题意，故 B 正确；对于 C，$f\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)=\cos\,2\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)=\cos(\pi x-\pi)=-\cos\,\pi x$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\pi}=2$，但函数图象过点 $(0,-1)$，不符合题意，故 C 错误；对于 D，$f\left(2x-\frac{1}{2}\right)=\cos\,2\pi\left(2x-\frac{1}{2}\right)=\cos(4\pi x-\pi)=-\cos\,4\pi x$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，不符合题意，故 D 错误. 故选 B.

9. B ［解析］因为 $f(x)$ 的图象的相邻两个对称中心之间的距离为 2π，所以 $\frac{T}{2}=2\pi$，则 $T=4\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{2}$. 因为 $f(x)$ 为奇函数，且 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)=2\sin\frac{1}{2}x$，所以 $g(x)=2\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $g(x)$ 的图象的对称中心的横坐标为 $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，故 A 错误，B 正确；令 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $g(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，故 C，D 错误. 故选 B.

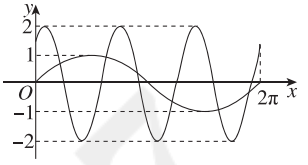
10. ABD ［解析］对于 A，因为筒车按逆时针方向每旋转一周用时 60 s，所以 $\omega=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$ rad/s，因此 A 正确；对于 B，因为当 $t=0$ 时，盛水筒 M 位于点 $P_0(3,-3\sqrt{3})$，所以 $R=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$，且 $f(0)=6\sin\varphi=-3\sqrt{3}$，可得 $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，即 $f(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(10)=6\sin\left(\frac{\pi}{30}\times10-\frac{\pi}{3}\right)=6\sin\,0=0$，因此 B 正确；对于 C，当 $t=50$ 时，$f(50)=-3\sqrt{3}$，所以此时盛水筒 M 的纵坐标为 $-3\sqrt{3}$，设它的横坐标为 x，则 $\sqrt{x^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$，可得 $x=\pm3$，因为筒车旋转 50 s 时，所以此时盛水筒 M 在第三象限，故 $x=-3$，此时盛水筒 M 和初始点 P_0 的水平距离为 $3-(-3)=6$，因此 C 错误；对于 D，由 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，可得 $t=25+60k,k\in\mathbf{Z}$，又 $t\in(0,60]$，所以筒车在旋转过程中，盛水筒 M 第一次到达最高点所需要的时间是 25 s，因此 D 正确. 故选 ABD.

11. BD ［解析］由函数 $f(x)$ 的图象，可得 $\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，所以 $T=2\pi$，所以 $|\omega|=\frac{2\pi}{T}=1$，解得 $\omega=\pm1$. 当 $\omega=1$ 时，由函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$，可得 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=1$，所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$；当 $\omega=-1$ 时，由函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$，可得 $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=1$，所以 $-\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 φ 的值不存在. 综上可得，$\omega=1,\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 A 错误；又因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=-1$，所以直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，所以 B 正确；将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 s 个单位长度后，得到 $g(x)=\sin\left(x-s-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，因为 $y=g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，所以满足 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}-s-\frac{\pi}{3}\geqslant2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\ \frac{\pi}{3}-s-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 解得 $-\frac{3\pi}{2}-2k\pi\leqslant s\leqslant-\frac{7\pi}{6}-2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$\frac{\pi}{2}\leqslant s\leqslant\frac{5\pi}{6}$，当 $k=-2$ 时，$\frac{5\pi}{2}\leqslant s\leqslant\frac{17\pi}{6}$，故 s 不可能等于 5，所以 C 错误；当 $k=-1$ 时，$\frac{\pi}{2}\leqslant s\leqslant\frac{5\pi}{6}$，当 $k=0$ 时，$-\frac{3\pi}{2}\leqslant s\leqslant-\frac{7\pi}{6}$，又因为 $s\in\mathbf{N}^*$，所以 $s_{\min}=2$，所以 D 正确. 故选 BD.

12. $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$（答案不唯一）

［解析］由性质③可得 $\omega=\pm2$，不妨取 $\omega=2$. 由性质①可得 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，再由性质②可知，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}+k\pi\in\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，则 $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{2}+2m\pi,\frac{3\pi}{2}+2m\pi\right](k,m\in\mathbf{Z})$，易知当 k 为奇数时上述关系成立，不妨令 $k=1$，则 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$，不妨取 $A=1$，则满足条件的一个函数为 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$.

13. 6 ［解析］因为函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象经过点 $(0,\sqrt{2})$，所以 $2\sin\varphi=\sqrt{2}$，即 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又因为 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 因为 $y=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 在 y 轴右侧的第一个零点为 $\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}=\pi$，解得 $\omega=3$，所以 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$，画出 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图象，如图所示，由图可知曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的交点有 6 个.



14. 解：(1) 由题可知 $\begin{cases}A+b=3,\\-A+b=-1,\\A>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=2,\\b=1.\end{cases}$ 设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图可知 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}T=\frac{\pi}{2}$，即可得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$.

由 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)+1=3$，可得 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，因此 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$.

(2) 令 $f(x)=0$，可得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的零点为 $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 和 $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(3) 由题意可得 $g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

因为 $x\in\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]$. 当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$；

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$，即 $x=\frac{7\pi}{12}$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $g\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$. 故 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]$ 上的取值范围为 $[1-\sqrt{3},3]$.

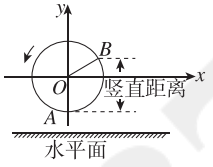
15. 解：(1) $f(x)=\frac{1}{2}\sin2\omega x+\frac{1+\cos2\omega x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$，所

以 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, 则 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$, 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. 令 $2x+\frac{\pi}{4}=l\pi$, $l\in\mathbf{Z}$, 则 $x=\frac{l\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$, $l\in\mathbf{Z}$, 故 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{l\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\frac{1}{2}\right)$, $l\in\mathbf{Z}$.

(2) 由题设有 $g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$, 则 $g(x)$ 的最小正周期为 π, 而 $x_{n+3}-x_n=\frac{\pi}{3}\times 3=\pi$, 故 $g(x_{n+3})=g(x_n)$, 而 $g(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(x_2)=g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $g(x_3)=g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, 故 $g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_{2024})=g(x_1)+g(x_2)+674[g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)]=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}+674\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

16. ABC [解析] $f(x)=\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x=2\left(\frac{1}{2}\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\right)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$, 当 $x\in[0,\pi]$ 时, 可得 $\frac{\pi}{6}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{6}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{6}$, 又 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调, 所以 $\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$, 解得 $0<\omega\leqslant\frac{1}{3}$, 又 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(-\pi,0)$ 对称, 所以 $-\omega\pi+\frac{\pi}{6}=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\omega=\frac{1}{6}-k$, $k\in\mathbf{Z}$, 所以 $\omega=\frac{1}{6}$, 所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)$. 对于 A, 若 $|f(x_1)-f(x_2)|=4$, 则可得 $f(x_1)$, $f(x_2)$ 分别为函数 $y=f(x)$ 的最大值与最小值或最小值与最大值, 可得 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\frac{1}{6}}=6\pi$, 故 A 正确; 对于 B, $f(2\pi)=2\sin\left(\frac{1}{6}\times 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=2$, 所以 $f(x)$ 的图象的一条对称轴方程为 $x=2\pi$, 故 B 正确; 对于 C, 因为 $x\in(-\pi,5\pi)$, 所以 $0<\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{6}<\pi$, 所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\pi,5\pi)$ 上无零点, 故 C 正确; 对于 D, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 π 个单位长度后得到的图象对应的函数为 $g(x)=2\sin\left[\frac{1}{6}(x+\pi)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $f(x)$ 的图象向左平移 π 个单位长度后得到的函数不是偶函数, 故 D 不正确. 故选 ABC.

17. $\frac{1}{3}$ $\sqrt{3}\left|\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right|$ [解析] 如图, 以 O 为原点, 以 OA 所在直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 由于角速度 $\omega=2\pi$ rad/s, 所以可设点 $A\left(\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, 圆上两点 A, B 始终保持 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$, 则 $B\left(\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)\right)$, 要使 A, B 两点的竖直距离为 0, 则 $\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $2\pi t-\frac{\pi}{2}+2\pi t+\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 可得 $t=\frac{1}{3}+\frac{k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, 所以当 $t=\frac{1}{3}$ 时, A, B 两点的竖直距离第一次为 0. 由题可知, $f(t)=\left|\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\pi t+\frac{1}{2}\cos 2\pi t+\cos 2\pi t\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\pi t+\frac{3}{2}\cos 2\pi t\right|=\sqrt{3}\left|\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right|$.



培优专训(三) 三角函数中的参数范围问题

1. A [解析] 依题意得函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\pi$, 解得 $\omega=2$.

2. C [解析] 因为函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象与直线 $y=3$ 的两个相邻交点的距离等于 2π, 且 $\omega>0$, 所以 $T=2\pi=\frac{2\pi}{\omega}$, 可得 $\omega=1$. 故选 C.

3. D [解析] 函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\omega x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\omega\right)$, 则 $\frac{\pi}{4}\omega\leqslant\frac{\pi}{2}$, 解得 $0<\omega\leqslant 2$, 故选 D.

4. B [解析] 将 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度后, 可得函数 $g(x)=\sin[\omega(x-1)+1]=\sin(\omega x-\omega+1)$ 的图象, 由 $g(x)$ 的图象关于原点对称, 得 $-\omega+1=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 即 $\omega=1-k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. 又 $\omega>0$, 所以 ω 的最小值为 1. 故选 B.

5. D [解析] 因为 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, 所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\omega x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2\omega\pi-\frac{\pi}{4}$, 又函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象在区间 $[0,2\pi]$ 内恰有 3 条对称轴, 所以 $2\pi\leqslant 2\omega\pi-\frac{\pi}{4}<3\pi$, 解得 $\frac{9}{8}\leqslant\omega<\frac{13}{8}$, 故选 D.

6. $\left(\frac{9}{4},\frac{13}{4}\right]$ [解析] 令 $t=\omega x-\frac{\pi}{4}$, $\because x\in(0,\pi)$, $\therefore t\in\left(-\frac{\pi}{4},\omega\pi-\frac{\pi}{4}\right)$, 又 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有三个零点, $\therefore 2\pi<\omega\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant 3\pi$, 解得 $\frac{9}{4}<\omega\leqslant\frac{13}{4}$.

7. 2 [解析] $\because$ 函数 $f(x)$ 图象的对称中心到对称轴的最短距离为 $\frac{T}{4}$, 两条对称轴间的最短距离为 $\frac{T}{2}$, $\therefore$ 对称中心 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 到对称轴 $x=\frac{\pi}{3}$ 的距离用周期可表示为 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{4}+\frac{kT}{2}$, $k\in\mathbf{N}$, 又 $\because T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\therefore\omega=2+4k$, $k\in\mathbf{N}$, $\therefore$ 当 $k=0$ 时, ω 有最小值 2.

8. D [解析] 当 $x\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 时, $\omega x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{12}\omega+\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{2\pi}{3}\right)$, $\because f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增, $\therefore\begin{cases}\frac{\pi}{12}\omega+\frac{2\pi}{3}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \frac{\pi}{6}\omega+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$, 解得 $\begin{cases}\omega\geqslant-14+24k,\\ \omega\leqslant-1+12k\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$, 又 $\omega>0$, $\therefore\begin{cases}-14+24k\leqslant-1+12k,\\ -1+12k>0\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$, 解得 $\frac{1}{12}<k\leqslant\frac{13}{12}$, 又 $k\in\mathbf{Z}$, $\therefore k=1$, $\therefore 10\leqslant\omega\leqslant 11$, 即 ω 的取值范围为 $[10,11]$. 故选 D.

9. D [解析] 当 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\omega x_0+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, 依题意有 $\frac{3\pi}{2}<\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{2}$, 解得 $\frac{7}{3}<\omega\leqslant\frac{19}{3}$, 则 ω 的取值范围为 $\left(\frac{7}{3},\frac{19}{3}\right]$. 故选 D.

10. D [解析] 由题设有 $f(x)=\frac{1-\cos\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$, 令 $f(x)=0$, 则有 $\omega x-\frac{\pi}{4}=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 即 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}$, $k\in\mathbf{Z}$. 因为 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点, 所以存在整数 k, 使得 $\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\leqslant\pi<2\pi\leqslant\frac{k\pi+\frac{5\pi}{4}}{\omega}$, $k\in\mathbf{Z}$, 即 $\begin{cases}\omega\geqslant k+\frac{1}{4},\\ \omega\leqslant\frac{k}{2}+\frac{5}{8},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$, 因为 $\omega>0$, 所以 $k\geqslant-1$ 且 $k+\frac{1}{4}\leqslant\frac{k}{2}+\frac{5}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$, 故 $k=-1$ 或 $k=0$, 所以 $0<\omega\leqslant\frac{1}{8}$ 或 $\frac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{8}$, 故选 D.

11. $\left(\frac{5}{6},\frac{4}{3}\right]$ [解析] 函数 $f(x)=\cos\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x=2\left(\frac{1}{2}\cos\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\right)=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$, 因为 $x\in(0,2\pi)$, $\omega>0$, 所以 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上有且仅有 2 个极值点, 所以 $2\pi<2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant 3\pi$, 解得 $\frac{5}{6}<\omega\leqslant\frac{4}{3}$.

12. $\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right]$ [解析] 由题意

可得，$g(x)=\sin\omega\left(x-\frac{\pi}{3\omega}\right)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，由 $x\in\left(-\frac{\pi}{18},0\right)$，得 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\omega\pi}{18}-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $g(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{18},0\right)$ 上单调递增，所以 $-\frac{\omega\pi}{18}-\frac{\pi}{3}\geqslant-\frac{\pi}{2}$，解得 $0<\omega\leqslant3$. 由 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$，得 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right)$，又 $0<\omega\leqslant3$，所以 $-\frac{\pi}{3}<\omega x-\frac{\pi}{3}<\frac{8\pi}{3}$，因为 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 上有且仅有 1 个零点，设为 x_0，所以 $\omega x_0-\frac{\pi}{3}=0$ 或 $\omega x_0-\frac{\pi}{3}=\pi$ 或 $\omega x_0-\frac{\pi}{3}=2\pi$. 当 $\omega x_0-\frac{\pi}{3}=0$ 时，$\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<0$，$0<\omega\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，可得 $\omega\in\left(\frac{1}{3},1\right)$；当 $\omega x_0-\frac{\pi}{3}=\pi$ 时，$0\leqslant\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<\pi$，$\pi<\omega\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant2\pi$，解得 $\omega\in\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right]$；当 $\omega x_0-\frac{\pi}{3}=2\pi$ 时，$\pi\leqslant\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<2\pi$ 无解. 综上，ω 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right]$.

第 28 讲　余弦定理、正弦定理

1. D ［解析］由题意可得 $B=\pi-A-C=\frac{\pi}{6}$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 可得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2$. 故选 D.

2. C ［解析］在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{3^2+7^2-(\sqrt{37})^2}{2\times3\times7}=\frac{1}{2}$，而 $0<B<\pi$，则 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $A+C=\frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

3. D ［解析］由题意知 $\triangle ABC$ 中，$B=30°$，$b=2$，$c=2\sqrt{2}$，故由 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{2}\times\sin30°}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由于 $c>b$，故 $C>B=30°$，则 $C=45°$ 或 $135°$，故 A 的大小为 $180°-30°-45°=105°$ 或 $180°-30°-135°=15°$，故选 D.

4. C ［解析］在 $\triangle ABC$ 中，由 $\frac{b^2}{c^2}=\frac{\tan B}{\tan C}$ 及正弦定理得 $\frac{\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos C}}$，而 $\sin C>0$，$\sin B>0$，整理得 $\sin B\cos B=\sin C\cos C$，即 $\sin2B=\sin2C$，而 $0<B<\pi$，$0<C<\pi$，$0<B+C<\pi$，则 $0<2B<2\pi$，$0<2C<2\pi$，$0<2B+2C<2\pi$，因此 $2B=2C$ 或 $2B+2C=\pi$，即 $B=C$ 或 $B+C=\frac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形. 故选 C.

5. ABD ［解析］对于 A，$\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；对于 B，由 A 选项知 $\cos C=\frac{1}{2}$，由余弦定理得 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos C=1+25-2\times5\times\frac{1}{2}=21$，故 $AB=\sqrt{21}$，故 B 正确；对于 C，由于在 $\triangle ABC$ 中，$C\in(0,\pi)$，故 $\sin C>0$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC\sin C=\frac{1}{2}\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$，故 C 错误；对于 D，设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则由正弦定理得 $2R=\frac{AB}{\sin C}=\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{7}$，故 D 正确. 故选 ABD.

6. $3\sqrt{3}$ ［解析］由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $13=a^2+4-4a\cos30°$，即 $a^2-2\sqrt{3}a-9=0$，所以 $a=3\sqrt{3}$.

7. $\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{7}$ ［解析］因为 $a=2$，$b=1$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. 当 $C=\frac{\pi}{3}$ 时，由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+1-2=3$，即 $c=\sqrt{3}$；当 $C=\frac{2\pi}{3}$ 时，由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+1+2=7$，即 $c=\sqrt{7}$. 综上，$c=\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{7}$.

8. D ［解析］由 $(a+b)(\sin A-\sin B)=(b+c)\sin C$，根据正弦定理可得 $(a+b)(a-b)=(b+c)c$，化简得 $b^2+c^2-a^2=-bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$，又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由正弦定理可得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

9. A ［解析］由 $b=\sqrt{2}a$，可得 $\sin B=\sqrt{2}\sin A$，则 $\sin2C=\sqrt{2}\sin(\pi-3C)=\sqrt{2}\sin3C$，所以 $\sin2C=\sqrt{2}\sin2C\cos C+\sqrt{2}\cos2C\cdot\sin C$，可化为 $2\cos C=2\sqrt{2}\cos^2C+\sqrt{2}(2\cos^2C-1)$，即 $4\sqrt{2}\cos^2C-2\cos C-\sqrt{2}=0$，由 $B=2C>C$，得 C 只能为锐角，可得 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $0<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$，$B=\frac{\pi}{2}$. 故选 A.

10. B ［解析］由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，代入 $2a\cos B=c-a$ 得，$2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{c}=c-a$，则 $a^2+c^2-b^2=c^2-ac$，即 $b^2=a^2+ac$，所以 $\left(\frac{c+3a}{b}\right)^2=\frac{c^2+6ac+9a^2}{b^2}=\frac{c^2+6ac+9a^2}{a^2+ac}=\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2+6\cdot\frac{c}{a}+9}{1+\frac{c}{a}}$，令 $1+\frac{c}{a}=t$，$t>1$，则 $g(t)=\frac{(t-1)^2+6(t-1)+9}{t}=\frac{t^2+4t+4}{t}=t+\frac{4}{t}+4\geqslant2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+4=8$，当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $a=c$ 时等号成立，此时 $\cos B=0$，即 $B=\frac{\pi}{2}$，故当 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形时，$\frac{c+3a}{b}$ 取到最小值，且最小值为 $2\sqrt{2}$. 故选 B.

11. ACD ［解析］因为 $a^2-b^2-c^2+bc=0$，所以由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，由 A 为三角形内角得 $A=\frac{\pi}{3}$，故 A 正确；若 $a=\sqrt{3}$，$\cos B=\frac{4}{5}$，则 $b^2+c^2-bc=3$，$\sin B=\frac{3}{5}$，所以由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，所以 $b=2\sin B=\frac{6}{5}$，代入 $b^2+c^2-bc=3$，可得 $c=\frac{3+4\sqrt{3}}{5}$，故 B 错误；若 $a=2$，则 $b^2+c^2=4+bc\geqslant2bc$，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号，所以 $bc\leqslant4$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，故 C 正确；因为 $b\sin C=\sin C+\sqrt{3}\cos C=c\sin B$，所以 $c\sin B=2\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin(C+A)=2\sin B$，因为 $\sin B>0$，所以 $c=2$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ［解析］因为 $c^2\sin A=6\sin C$，所以由正弦定理可得 $ac^2=6c$，即 $ac=6$，又 $(a+c)^2=18+b^2$，所以 $a^2+c^2-b^2=18-2ac=6$，则 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

13. $2\sqrt{3}$ ［解析］由 $\sqrt{3}b\sin C=c\sin2B$ 及正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\sin C=2\sin C\sin B\cos B$，因为 $0<C<\pi$，$0<B<\pi$，所以 $\sin C\neq0$，$\sin B\neq0$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $B=\frac{\pi}{6}$. 因为 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2$，所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=1$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，可得 $A=\frac{\pi}{6}$，所以 $C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}$. 因为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 4，所以由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\sin\frac{2\pi}{3}}=4$，则 $c=4\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

14. 解：(1) 由余弦定理可得，$a=2b-2c\cos A=2b-2c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，即 $ab=b^2-c^2+a^2$，$\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=$

$\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2)设$\triangle ABC$的外接圆的半径为R，由正弦定理可得$2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{8}{\sqrt{3}}$，则$\sin A\sin B=\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}=\frac{5}{8}$，解得$ab=\frac{40}{3}$，$\therefore\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{40}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

15. 解：(1)由$a(1-3\cos C)=3c\cos A$及正弦定理得$\sin A(1-3\cos C)=3\sin C\cos A$，得$\sin A=3\sin A\cos C+3\cos A\sin C=3\sin(A+C)=3\sin B$，由正弦定理得$a=3b$，所以$\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$.

(2)由余弦定理得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9b^2+4-b^2}{12b}=\frac{2b}{3}+\frac{1}{3b}\geqslant2\sqrt{\frac{2b}{3}\cdot\frac{1}{3b}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当$\frac{2b}{3}=\frac{1}{3b}$，即$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，当$\cos B$取最小值时，$B$取得最大值，此时$a=3b=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$c=2$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{1}{3}$，$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times2\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. 解：(1)由$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$及正弦定理得$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0$，因为$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin A\cos C-\cos A\sin C-\sin C=0$，即$\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0$，因为$C\in(0,\pi)$，所以$\sin C\neq0$，故$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，所以$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.因为$A\in(0,\pi)$，所以$A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，故$A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，解得$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以$\frac{1}{2}bc\sin A=10\sqrt{3}$，即$\frac{1}{2}\times b\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$，所以$b=8$，又因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$a^2=64+25-2\times8\times5\times\frac{1}{2}=49$，所以$a=7$.

(3)因为$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$，所以$\frac{b+c}{a}=\sqrt{3}\sin C+\cos C=2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$，设$t=\frac{b+c}{a}$，因为$0<C<\frac{2\pi}{3}$，所以$1<t\leqslant2$.由(1)知$A=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得$bc=b^2+c^2-a^2$，所以$3bc=(b+c)^2-a^2$，所以$\frac{bc}{a^2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{3a^2}=\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{3}$，所以$\frac{bc-ab-ac}{a^2}=\frac{1}{3}t^2-t-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{12}(1<t\leqslant2)$，故当$t=\frac{3}{2}$时，$\frac{bc-ab-ac}{a^2}$取最小值$-\frac{13}{12}$；当$t=2$时，$\frac{bc-ab-ac}{a^2}$取最大值$-1$.所以$\frac{bc-ab-ac}{a^2}$的取值范围是$\left[-\frac{13}{12},-1\right]$.

第29讲　多三角形背景下解三角形

1. 解：(1)由题意知，$\frac{\cos A}{\cos C}=\frac{\sin A}{2\sin B-\sin C}$，所以$2\cos A\cdot\sin B=\sin A\cdot\cos C+\cos A\cdot\sin C=\sin(A+C)=\sin B$.

又$\sin B\neq0$，所以$\cos A=\frac{1}{2}$，而$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4\times2\times\frac{1}{2}=4$.因为$2\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，所以$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，

所以$|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{4c^2+9b^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{25}=\frac{4\times4^2+9\times2^2+12\times4}{25}=\frac{4\times37}{25}$，

故$AM=\frac{2\sqrt{37}}{5}$.

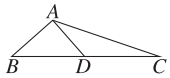
2. 解：(1)$\because\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，$\therefore(b-a)(\sin A+\sin B)=(c+b)\cdot(-\sin C)$，由正弦定理得$(b-a)(a+b)=(c+b)\cdot(-c)$，$\therefore b^2+c^2-a^2=-bc$，$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$，又$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)$\because AD$平分$\angle BAC$，$\therefore\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.

$\because S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，$\therefore\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\angle BAC$，即$2c\sin\frac{\pi}{3}+2b\sin\frac{\pi}{3}=bc\sin\frac{2\pi}{3}$，$\therefore2c+2b=bc$.由基本不等式可得$bc=2b+2c\geqslant4\sqrt{bc}$，$\therefore bc\geqslant16$，当且仅当$b=c=4$时取等号，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\geqslant4\sqrt{3}$，即$\triangle ABC$的面积的最小值为$4\sqrt{3}$.

3. 解：(1)由题知$(b+c-a)(b+c+a)=(b+c)^2-a^2=b^2+2bc+c^2-a^2=bc$，则$b^2+c^2-a^2=-bc$，所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)方法一：由(1)得，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，因为



$\angle BAD=3\angle CAD$，所以$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$.

如图，在$\triangle ACD$中，由余弦定理得$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos\angle DAC=3+16-2\times\sqrt{3}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$，所以$CD=\sqrt{7}$.

在$\triangle ACD$中，由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AD}{\sin C}$，即$\frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$，所以$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

因为$0<C<\frac{\pi}{3}$，所以$\cos C=\sqrt{1-\sin^2C}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$，

所以在$\triangle ABC$中，$\sin B=\sin(\angle BAC+C)=\sin\angle BAC\cos C+\cos\angle BAC\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{2\sqrt{7}}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

方法二：同方法一，得$CD=\sqrt{7}$.在$\triangle ACD$中，由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，即$\frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sin\angle ADC}$，

所以$\sin\angle ADC=\frac{2}{\sqrt{7}}$，可得$\cos\angle ADC=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$.

因为$\angle ADC=\angle BAD+B=B+\frac{\pi}{2}$，

所以$\cos\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以$\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

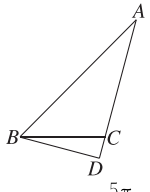
方法三：同方法一，得$CD=\sqrt{7}$.在直角三角形ABD中，$BD=\sqrt{c^2+3}$，所以$a=\sqrt{c^2+3}+\sqrt{7}$.又$a^2=b^2+c^2+bc$，所以$(\sqrt{c^2+3}+\sqrt{7})^2=c^2+4c+16$，即$c^2+2\sqrt{7}\sqrt{c^2+3}+10=c^2+4c+16$，得$\sqrt{7}\sqrt{c^2+3}=2c+3$，即$c^2-4c+4=0$，所以$c=2$，$BD=\sqrt{7}$，故$\sin B=\frac{AD}{BD}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

方法四：由(1)知$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，因为$\angle BAD=3\angle CAD$，所以$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$.

因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，所以$\frac{1}{2}\times4c\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}c+\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}$，即$\sqrt{3}c=\frac{\sqrt{3}}{2}c+\sqrt{3}$，解得$c=2$，所以$a^2=b^2+c^2+bc=16+4+8=28$，即$a=2\sqrt{7}$.在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sin B}$，解得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

4. 解：(1)由题知$\sqrt{3}\sin2A+\cos2A=2\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=2$，所以$\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$2A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，则$A=\frac{\pi}{6}$.又$b=\sqrt{2}a$，所以$\sin B=\sqrt{2}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为$B\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$，所以$B=\frac{\pi}{4}$或$B=\frac{3\pi}{4}$.

(2)由(1)可知$A=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{4}$，则$C=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$.如图，作$BD\perp AC$，交$AC$的延长线于点$D$，则$BD=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$\angle BCD=\frac{5\pi}{12}$，$\angle CBD=\frac{\pi}{12}$，所以$\sin A=\frac{BD}{AB}$，所以$AB=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$，$\cos\angle CBD=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{BD}{BC}$，则$BC=4$，故$AC=4\sqrt{2}$，所以



1358765051

$\triangle ABC$ 的周长为 $AB+BC+AC=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4+4\sqrt{2}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4$.

5. 解：(1)方法一：在$\triangle ABD$中，由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}$，

将 $AD=2\sqrt{3}$，$AB=2$ 代入得 $\cos A=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+2^2-BD^2}{2\times 2\sqrt{3}\times 2}$，即 $\sqrt{3}\cos A=\dfrac{16-BD^2}{8}$①. 同理，在$\triangle BCD$中，$\cos C=\dfrac{2^2+2^2-BD^2}{2\times 2\times 2}$，即 $\cos C=\dfrac{8-BD^2}{8}$②.

①－②得$\sqrt{3}\cos A-\cos C=1$，所以当 BD 的长度变化时，$\sqrt{3}\cos A-\cos C$ 为定值，该定值为 1.

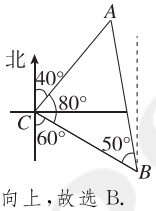
方法二：在$\triangle ABD$中，由余弦定理得 $BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos A$，即 $BD^2=(2\sqrt{3})^2+2^2-2\times 2\sqrt{3}\times 2\times\cos A$，即 $BD^2=16-8\sqrt{3}\cos A$.

同理，在$\triangle BCD$中，$BD^2=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cos C=8-8\cos C$，所以 $16-8\sqrt{3}\cos A=8-8\cos C$，化简得$\sqrt{3}\cos A-1=\cos C$，即$\sqrt{3}\cos A-\cos C=1$，所以当 BD 的长度变化时，$\sqrt{3}\cos A-\cos C$ 为定值，该定值为 1.

(2) $S_1^2+S_2^2=\dfrac{1}{4}AB^2\cdot AD^2\cdot\sin^2 A+\dfrac{1}{4}BC^2\cdot CD^2\cdot\sin^2 C=12\sin^2 A+4\sin^2 C=12\sin^2 A+4-4\cos^2 C=12\sin^2 A+4-4(\sqrt{3}\cos A-1)^2=-24\cos^2 A+8\sqrt{3}\cos A+12$，令 $\cos A=t$，$t\in(-1,1)$，所以 $S_1^2+S_2^2=-24t^2+8\sqrt{3}t+12=-24\left(t-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+14$，所以当 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，即 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$S_1^2+S_2^2$ 取到最大值 14，故 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值为 14.

第 30 讲　余弦定理、正弦定理应用举例

1. B　[解析] 依题意，$AC=BC$，因为灯塔 A 在观察站北偏东 40°方向上，灯塔 B 在观察站南偏东 60°方向上，所以 $\angle ACB=80°$，所以 $\angle ABC=50°$，A，B，C 的位置如图，所以灯塔 A 在灯塔 B 的北偏西 10°方向上，故选 B.



2. A　[解析] 在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=30°$，$\angle CAB=105°$，所以 $\angle ABC=180°-30°-105°=45°$，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，则 $AB=\dfrac{AC\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\dfrac{50\sin 30°}{\sin 45°}=\dfrac{50\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=25\sqrt{2}$(m). 故选 A.

3. A　[解析] 设山顶为 A，塔底为 C，塔顶为 D，过点 A 作 CD 的垂线，交 CD 的延长线于点 B，则易得 $AB=\dfrac{BC}{\tan 60°}$，$BD=AB\cdot\tan 30°=\dfrac{BC}{\tan 60°}\cdot\tan 30°=\dfrac{200}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{200}{3}$(m)，所以 $CD=BC-BD=200-\dfrac{200}{3}=\dfrac{400}{3}$(m). 故选 A.

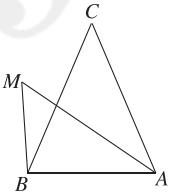
4. C　[解析] 由题意易知 $\angle ACB=120°$，由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=10^2+20^2-2\times 10\times 20\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=700$，所以 $AB=10\sqrt{7}$ km，所以渔船沿直线从灯塔 A 航行到灯塔 B 需要 $\dfrac{10\sqrt{7}}{20}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$(h).

5. B　[解析] 在$\triangle ABC$中，由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，即 $\dfrac{BC}{\sin 105°}=\dfrac{2}{\sin(180°-105°-45°)}$，则 $BC=4\sin 105°=4\sin 75°$. 在$\triangle ABD$中，$\angle DAB=\angle DBA=60°$，所以$\triangle ABD$是等边三角形，所以 $BD=AB=2$. 在$\triangle BCD$中，$\angle DBC=15°$，所以由余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos\angle DBC=16\sin^2 75°+4-2\times 4\sin 75°\times 2\times\cos 15°=16\sin^2 75°+4-2\times 4\sin 75°\times 2\times\sin 75°=4$，所以 $CD=2$. 故选 B.

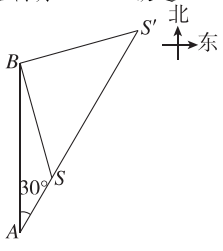
6. $10\sqrt{6}$　[解析] 依题意得 $C=180°-A-B=45°$，由正弦定理，得 $\dfrac{BC}{\sin 60°}=\dfrac{AB}{\sin 45°}$，所以 $\dfrac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得 $x=10\sqrt{6}$.

7. C　[解析] 依题意，在 Rt$\triangle MAC$中，$AC=60$ m，$\tan\angle MCA=\dfrac{3}{4}$，所以 $\tan\angle MCA=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AM}{60}=\dfrac{3}{4}$，可得 $AM=45$ m，则 $CM=\sqrt{AM^2+AC^2}=\sqrt{45^2+60^2}=75$(m). 在 Rt$\triangle BCN$中，$BC=70\sqrt{3}$ m，$\cos\angle NCB=\dfrac{14}{15}$，则 $CN=\dfrac{BC}{\cos\angle NCB}=\dfrac{70\sqrt{3}}{\frac{14}{15}}=75\sqrt{3}$(m). 在$\triangle MNC$中，$\angle MCN=150°$，由余弦定理可得 $MN=\sqrt{CM^2+CN^2-2CM\cdot CN\cdot\cos\angle MCN}=\sqrt{75^2+(75\sqrt{3})^2-2\times 75\times 75\sqrt{3}\cos 150°}=75\sqrt{7}$(m)，故塔尖 M，N 之间的距离为 $75\sqrt{7}$ m. 故选 C.

8. D　[解析] 依题意设炮弹第一次命中点为 C，如图，则 $AB=14$，$AC=BC=AM=18$，$\angle CBA=\angle CAB=\theta$，$\angle MAB=\dfrac{\theta}{2}$. 在$\triangle ABC$中，由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos\theta$，即 $18^2=14^2+18^2-2\times 14\times 18\cos\theta$，解得 $\cos\theta=\dfrac{7}{18}$，所以 $\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{7}{18}$，又 θ 为锐角，所以 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{5}{6}$(负值舍去). 在$\triangle ABM$中，由余弦定理得 $BM^2=AM^2+AB^2-2AM\cdot AB\cos\dfrac{\theta}{2}=18^2+14^2-2\times 18\times 14\times\dfrac{5}{6}=100$，所以 $BM=10$，即 B 炮台与弹着点 M 间的距离为 10 km. 故选 D.

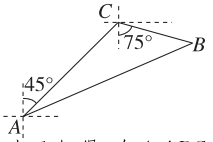


9. AB　[解析] 画出示意图如图所示，由题意得 $AB=32\times\dfrac{1}{2}=16$，$BS=8\sqrt{2}$，$\angle BAS=30°$，所以 $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sin 30°}=\dfrac{16}{\sin\angle ASB}$，解得 $\sin\angle ASB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\angle ASB=45°$ 或 $\angle ASB=135°$. 当灯塔在 S' 处时，$\angle AS'B=45°$，所以 $\angle ABS'=105°$；当灯塔在 S 处时，$\angle ASB=135°$，所以 $\angle ABS=15°$. 综上，灯塔 S 在 B 处的北偏东 75°或南偏东 15°方向. 故选 AB.



10. AC　[解析] 对于 A，因为 $\angle BAD=75°$，点 B 位于点 A 的南偏西 45°方向上，点 B 位于点 D 的正西方向上，所以 $B=45°$，所以 $\angle ADB=60°$，$\angle ADC=120°$，又 $\angle AEC=120°$，$CD=CE=100$ m，$AE=200$ m，所以 $AC^2=AE^2+CE^2-2AE\cdot CE\cos 120°=CD^2+AD^2-2AD\cdot CD\cos 120°$，所以 $AD=200$ m，故 A 正确；对于 B，$\triangle ADC$的面积为 $\dfrac{1}{2}\times AD\times CD\times\sin\angle ADC=\dfrac{1}{2}\times 200\times 100\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5000\sqrt{3}$(m^2)，故 B 错误；对于 C，在$\triangle ABD$中，由正弦定理，得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin B}$，所以 $AB=\dfrac{AD\cdot\sin\angle ADB}{\sin B}=\dfrac{200\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=100\sqrt{6}$(m)，故 C 正确；对于 D，过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G，易知 $\angle DAG=30°$，所以 $\angle CAG>30°$，故 D 错误. 故选 AC.

11. $\dfrac{2}{3}$　[解析] 设海轮“和谐号”与海轮“奋斗号”相遇所需的时间为 x 小时，且在 B 处相遇，如图所示. 由已知得，在$\triangle ABC$中，$AC=10$，$AB=21x$，$BC=9x$，$\angle ACB=120°$，由余弦定理得 $(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times 10\times 9x\times\cos 120°$，整理得 $36x^2-9x-10=0$，解得 $x=-\dfrac{5}{12}$(舍去)或 $x=\dfrac{2}{3}$，所以海轮“和谐号”与海轮“奋斗号”相遇所需的时间为 $\dfrac{2}{3}$ 小时.

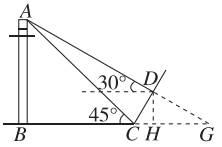


12. 3 百米　[解析] 根据题意，在$\triangle ADC$中，$\angle ACD=45°$，$\angle ADC=67.5°$，$DC=2\sqrt{3}$，则 $\angle DAC=180°-45°-67.5°=67.5°$，则 $AC=DC=2\sqrt{3}$ 百米. 在$\triangle BCE$中，$\angle BCE=75°$，$\angle BEC=60°$，$CE=\sqrt{2}$ 百米，则 $\angle EBC=180°-75°-60°=45°$，由正弦定理得 $\dfrac{CE}{\sin\angle EBC}=\dfrac{BC}{\sin\angle BEC}$，则 $BC=\dfrac{CE\times\sin\angle BEC}{\sin\angle EBC}=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$(百米). 在$\triangle ABC$中，$AC=2\sqrt{3}$ 百米，$BC=\sqrt{3}$ 百米，$\angle ACB=180°-\angle ACD-\angle BCE=60°$，由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=9$，则 $AB=3$ 百米.

13. 解：如图，延长 AD 交 BC 的延长线于 G，过 D 作 $DH\perp BG$ 于 H. 在 Rt$\triangle DHC$中，∵ 坡比为 $\sqrt{3}:1$，

∴ $\tan\angle DCH=\sqrt{3}$，∴ $\angle DCH=60°$，又 $CD=12$ 米，∴ $CH=CD\cdot\cos\angle DCH=12\times\cos 60°=6$(米)，$DH=CD\cdot\sin\angle DCH=12\times\sin 60°=6\sqrt{3}$(米).

∵ $DH\perp BG$，$G=30°$，∴ $HG=\dfrac{DH}{\tan G}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=18$(米)，∴ $CG=CH+HG=24$(米). 设 $AB=x$ 米，∵ $AB\perp BG$，$\angle BCA=45°$，∴ $\triangle ABC$是等腰直角三



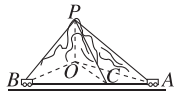
角形，∴$BC=AB=x$ 米，$BG=\dfrac{AB}{\tan G}=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x$（米）．∵$BG-BC=CG$，

∴$\sqrt{3}x-x=24$，解得 $x=12\sqrt{3}+12$，

∴信号柱 AB 的高度为$(12\sqrt{3}+12)$米．

14. 解：(1) 设 $OP=x$，在 $\triangle PAO$ 中，因为 $\tan\angle PAO=\dfrac{PO}{AO}$，所以 $AO=\dfrac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$，同理，在 $\triangle PBO$ 中，$BO=\dfrac{x}{\tan 45^\circ}=x$．在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\angle AOB=6x^2$，又 $AB=45\times\dfrac{4}{60}=3$，所以 $9=6x^2$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$（负值舍去），所以此山的高 OP 为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ km．

(2) 由 (1) 得 $BO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$AO=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$AB=3$．设 C 是线段 AB 上一动点，连接 OC，PC，如图，则在点 C 处观测 P 处的仰角为 $\angle PCO$，且 $\tan\angle PCO=\dfrac{PO}{OC}=\dfrac{\sqrt{6}}{2OC}$．



因为 $\cos\angle AOB=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$0^\circ<\angle AOB<180^\circ$，所以 $\sin\angle AOB=\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

当 $OC\perp AB$ 时，OC 最小，记最小值为 d，则 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}AO\cdot BO\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}AB\cdot d$，即 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{1}{2}\times 3d$，解得 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\tan\angle PCO=\dfrac{\sqrt{6}}{2OC}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$，所以该车从 A 到 B 行驶过程中观测 P 处的仰角正切值的最大值为 $\sqrt{3}$．

第五单元　平面向量与复数

第 31 讲　平面向量的概念及其线性运算

1. B　[解析] $2(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b}$．

2. A　[解析] ∵非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，∴$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 方向相同或相反，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，故 A 正确；当 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$ 时，满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$ 均不成立，故 B 错误；两向量共线要看其方向而不是起点与终点，故 C 错误；共线向量所在的直线可以重合，也可以平行，则 A,B,C,D 四点不一定在一条直线上，故 D 错误．故选 A．

3. ABC　[解析] 对于 A，$\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PQ}$，符合题意；对于 B，$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PQ}$，符合题意；对于 C，$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{CP})=\boldsymbol{0}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}$，符合题意；对于 D，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BQ}\neq\overrightarrow{PQ}$，不符合题意．故选 ABC．

4. C　[解析] 因为在矩形 $ABCD$ 中，M 是 CD 的中点，所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，因为 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AB}$，所以 $\lambda=1$，$\mu=\dfrac{1}{2}$，所以 $\lambda+\mu=\dfrac{3}{2}$，故选 C．

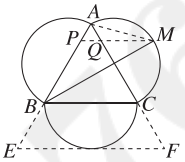
5. C　[解析] 对于 A，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，若 A,B,C 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，故 $\begin{cases}1=-3\lambda,\\2=2\lambda,\end{cases}$ 无解，所以 A,B,C 三点不共线，故 A 错误；对于 B，若 A,B,D 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{DA}$，故 $\begin{cases}1=3\mu,\\2=-6\mu,\end{cases}$ 无解，所以 A,B,D 三点不共线，故 B 错误；对于 C，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)+(-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)=-2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，因为 AC,AD 有公共点 A，所以 A,C,D 三点共线，故 C 正确；对于 D，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=(3\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2)+(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)=4\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，若 B,C,D 三点共线，则 $\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{BC}$，故 $\begin{cases}4=-3k,\\-4=2k,\end{cases}$ 无解，所以 B,C,D 三点不共线，故 D 错误．故选 C．

6. 1　[解析] 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 可以作为基底．因为 $(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b})$，所以存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b})$，所以 $x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda y\boldsymbol{b}$，所以 $\begin{cases}x=\lambda,\\1=\lambda y,\end{cases}$ 消去 λ，得 $xy=1$．

7. 2025　0　[解析] 当单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{2025}$ 方向相同时，$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2025}|$ 取得最大值，此时 $|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2025}|=|\boldsymbol{e}_1|+|\boldsymbol{e}_2|+\cdots+|\boldsymbol{e}_{2025}|=2025$；当单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{2025}$ 首尾相连时，$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2025}=\boldsymbol{0}$，所以 $|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_{2025}|$ 的最小值为 0．

8. B　[解析] 由题意知，$\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PN}=\boldsymbol{a}-(k+1)\boldsymbol{b}$，因为 M,N,Q 三点共线，所以存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{NQ}$，即 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\lambda[\boldsymbol{a}-(k+1)\boldsymbol{b}]$，整理得 $(1-\lambda)\boldsymbol{a}=[2-\lambda(k+1)]\boldsymbol{b}$，因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}1-\lambda=0,\\2-\lambda(k+1)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=1,\\k=1.\end{cases}$ 故选 B．

9. B　[解析] 如图所示，过点 M 作 $MP/\!/BC$，分别交直线 AB，AC 于点 P,Q，连接 AM，则可设 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AP}+y\overrightarrow{AQ}$，且 $x+y=1$．设 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=(kx-1)\overrightarrow{AB}+ky\overrightarrow{AC}$，因为 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda+\mu=kx-1+ky=k-1$．由图可知，当 PM（即 EF）与以 BC 为直径的半圆相切时，k 最大．由 $AB=2$，$BE=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，可得 $AE=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$，所以 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$，即 k 的最大值为 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$，所以 $\lambda+\mu$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．故选 B．

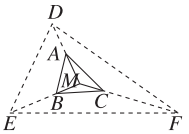


10. AC　[解析] $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$，因为点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}$，所以 $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG}$，所以 O,P,G 三点共线，故 A 正确，B 错误；$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO})+3\overrightarrow{OP}$，因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，所以 $(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO})+3\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OP}$，即 $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$，故 C 正确；因为 $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG}$，所以点 P 的位置随着点 O 位置的变化而变化，故点 P 不一定在 $\triangle ABC$ 的内部，故 D 错误．故选 AC．

11. AD　[解析] 因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不同向共线．对于 A，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时，根据向量减法的三角形法则知 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，故 A 正确；对于 B，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形为矩形，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 是这个矩形的两条对角线长，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，故 B 错误；对于 C，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则根据向量加法的平行四边形法则知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，故 C 错误；对于 D，若存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，又 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线，则 λ 为负数，故 D 正确．故选 AD．

12. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　[解析] 由题意可得 $AB/\!/CD$，$AD=1$，$CD=\sqrt{3}$，∴$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$．∵点 E 在线段 CD 上（点 E 不与点 C,D 重合），∴$\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DC}$（$0<\lambda<1$）．∵$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$，且 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+2\mu\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{2\mu}{\lambda}\overrightarrow{DE}$，∴$\dfrac{2\mu}{\lambda}=1$，即 $\mu=\dfrac{\lambda}{2}$．∵$0<\lambda<1$，∴$0<\mu<\dfrac{1}{2}$．

13. 3∶4　[解析] 根据题意，延长 MA 至点 D，延长 MB 至点 E，延长 MC 至点 F，使得 $MD=2MA$，$ME=3MB$，$MF=4MC$，如图所示．由 $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$，得 $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\boldsymbol{0}$．连接 DE,DF,EF，则点 M 是 $\triangle DEF$ 的重心，所以 $S_{\triangle MDE}=S_{\triangle MEF}=S_{\triangle MFD}$．设 $S_{\triangle MDE}=1$，则 $S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{6}$，$S_{\triangle MAC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times 1=\dfrac{1}{8}$，所以 $S_{\triangle MAC}:S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{8}:\dfrac{1}{6}=3:4$．



14. 解：(1) ∵$2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，

∴$2(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+k\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}=(1+k)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，易知 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，

∴$k+1=0$，∴$k=-1$．

(2) ∵A,B,C 三点共线，∴$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$（$\lambda\in\mathbf{R}$），即 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，

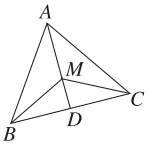
∴$(k-1)\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}+5\lambda\boldsymbol{b}$，又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，∴$\begin{cases}k-1=-\lambda,\\10=5\lambda,\end{cases}$ 解得 $k=-1$．

15. 解：(1) 证明：设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，由题意知 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=n\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}=\left(\dfrac{1}{3}-m\right)\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$．因为 P,G,Q 三点共线，所以存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PG}$，即 $n\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{a}=\lambda\left(\dfrac{1}{3}-m\right)\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\lambda\boldsymbol{b}$，所以 $\begin{cases}-m=\lambda\left(\dfrac{1}{3}-m\right),\\n=\dfrac{1}{3}\lambda,\end{cases}$ 消去 λ 可得 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=3$．

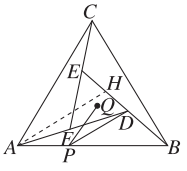
(2) 由 (1) 知 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=3$，所以 $m+n=$

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+n)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)\geqslant\frac{1}{3}\times(2+2)=\frac{4}{3}$，当且仅当 $m=n=\frac{2}{3}$ 时取等号，所以 $m+n$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

16. ACD ［解析］对于 A，由 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，得 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$，即 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$，则 M 是边 BC 的中点，所以 A 正确；对于 B，由 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，得 $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}$，则点 M 在 CB 的延长线上，所以 B 错误；对于 C，如图，设 BC 的中点为 D，则 $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$，由重心的性质可知 C 正确；对于 D，由 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $x+y=\frac{1}{2}$，得 $2\overrightarrow{AM}=2x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AC}$，且 $2x+2y=1$，设 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$，所以 $\overrightarrow{AE}=2x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AC}$，且 $2x+2y=1$，可知 B,C,E 三点共线，所以 $\triangle MBC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{2}$，所以 D 正确. 故选 ACD.



17. $\frac{3}{2}$ ［解析］由 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PA}$ 得 $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PD}$，即 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{PD}$. 取 DE 的中点 H，连接 AH，如图，因为 $BD=DE$，所以 $BD=2HD$，又 $BP=2AP$，所以 $\frac{BP}{AB}=\frac{BD}{BH}=\frac{2}{3}$，故 $DP\parallel AH$，且 $\frac{DP}{AH}=\frac{2}{3}$，所以 λ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，此时点 Q 与点 H 重合.

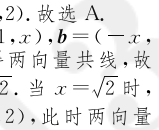


第 32 讲　平面向量基本定理及坐标表示

1. A ［解析］设 $C(x,y)$，则 $\overrightarrow{AC}=(x,y)-(-1,2)=(2,1)$，故 $\begin{cases}x+1=2,\\y-2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ 所以 $C(1,3)$，又因为 $B(3,1)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(1,3)-(3,1)=(-2,2)$. 故选 A.

2. C ［解析］向量 $\boldsymbol{a}=(-1,x)$，$\boldsymbol{b}=(-x,2)$，由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，得两向量共线，故 $-2=-x^2$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$. 当 $x=\sqrt{2}$ 时，$\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(-\sqrt{2},2)$，此时两向量方向相同；当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$\boldsymbol{a}=(-1,-\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{2},2)$，此时两向量方向相反. 故 $x=\sqrt{2}$. 故选 C.

3. C ［解析］如图所示，由题意知 E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$. 故选 C.

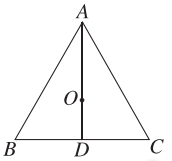


4. C ［解析］因为 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，所以 $2\overrightarrow{AO}-2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$，即 $4\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线，所以 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{4},\\\mu=\frac{1}{4},\end{cases}$ 所以 $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$. 故选 C.

5. BCD ［解析］对于 A，由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$，得 $(1,-2)=\lambda(1,1)+\mu(2,2)$，所以 $\begin{cases}1=\lambda+2\mu,\\-2=\lambda+2\mu,\end{cases}$ 无解，所以不存在实数 λ,μ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$，所以 A 错误；对于 B，由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$，得 $(1,-2)=\lambda(0,0)+\mu(-2,4)$，所以 $\begin{cases}1=-2\mu,\\-2=4\mu,\end{cases}$ 则 $\mu=-\frac{1}{2}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，所以存在实数 λ,μ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$，所以 B 正确；对于 C，由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$，得 $(1,-2)=\lambda(1,1)+\mu(1,2)$，所以 $\begin{cases}1=\lambda+\mu,\\-2=\lambda+2\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=4,\\\mu=-3,\end{cases}$ 所以存在实数 λ,μ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$，所以 C 正确；对于 D，由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$，得 $(1,-2)=\lambda(-1,2)+\mu(2,-4)$，所以 $\begin{cases}1=-\lambda+2\mu,\\-2=2\lambda-4\mu,\end{cases}$ 此方程组有无数个解，所以存在实数 λ,μ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$，所以 D 正确. 故选 BCD.

6. 2 ［解析］由 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,t)$ 可得，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,t+4)$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(3,2t+2)$. 因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $3(t+4)=3(2t+2)$，解得 $t=2$.

7. $-9\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ ［解析］如图，延长 AO，交 BC 于 D，$\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 各边上中线的交点，又 $\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{a}$，$\therefore\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，即 $\overrightarrow{DO}=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$，$\therefore\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=\frac{9}{2}\boldsymbol{a}$，故 $\overrightarrow{AD}=-\frac{9}{2}\boldsymbol{a}$. 又 D 为 BC 的中点，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{b}$，$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\therefore\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{AC}=-9\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.



8. D ［解析］设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{OP}=(x,y)$，$\overrightarrow{OA}=(-1,4)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1)$，由题意可知，$(x,y)=\lambda(-1,4)+\mu(2,1)=\lambda(-1,4)+(2-\lambda)(2,1)=(-\lambda,4\lambda)+(4-2\lambda,2-\lambda)=(4-3\lambda,2+3\lambda)$，所以 $\begin{cases}x=4-3\lambda,\\y=2+3\lambda,\end{cases}$ 消去 λ，得点 P 的轨迹方程为 $x+y=6$. 故选 D.

9. C ［解析］选择 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$ 为平面内所有向量的一个基底. 因为 D 为 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 又 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AP}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP})+\frac{3}{5}\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CB})+\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{5}[\overrightarrow{AC}+\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})]+\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2\lambda+2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3-2\lambda}{5}\overrightarrow{AC}$，所以 $\begin{cases}\frac{2\lambda+2}{5}=\frac{1}{2},\\\frac{3-2\lambda}{5}=\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\lambda=\frac{1}{4}$. 故选 C.

10. ABD ［解析］由题知，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,-1)-(1,-3)=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m+1,m-2)-(1,-3)=(m,m+1)$，假设 A,B,C 三点共线，则 $1\times(m+1)-2m=0$，即 $m=1$，所以只要 $m\neq1$，A,B,C 就能构成三角形. 故选 ABD.

11. AC ［解析］由题知，$\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1)$，所以 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=(m+2n,2m+n)$. 对于 A，若 $\overrightarrow{OP}\parallel\overrightarrow{BC}$，则 $2m+n+m+2n=0$，即 $m+n=0$，故 A 正确；对于 B，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(m+2n-2,2m+n-3)$，若点 P 在直线 BC 上，则 $\overrightarrow{BP}\parallel\overrightarrow{BC}$，即 $2m+n-3+m+2n-2=0$，即 $m+n=\frac{5}{3}$，故 B 错误；对于 C，$\overrightarrow{PA}=(1-m-2n,1-2m-n)$，$\overrightarrow{PB}=(2-m-2n,3-2m-n)$，$\overrightarrow{PC}=(3-m-2n,2-2m-n)$，若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$，则 $(6-3m-6n,6-6m-3n)=(0,0)$，即 $\begin{cases}6-3m-6n=0,\\6-6m-3n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{2}{3},\\n=\frac{2}{3},\end{cases}$ 所以 $m-n=0$，故 C 正确；对于 D，$\overrightarrow{AP}=(m+2n-1,2m+n-1)$，若 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线，则 $(m+2n-1)\times(-1)-(2m+n-1)=0$，即 $m+n=\frac{2}{3}$，故 D 错误. 故选 AC.

12. $\frac{3}{11}\boldsymbol{a}+\frac{2}{11}\boldsymbol{b}$ ［解析］$\because M,E,C$ 三点共线，$\therefore$ 设 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AM}+(1-x)\overrightarrow{AC}=\frac{x}{3}\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}(0\leqslant x\leqslant1)$. $\because B,E,N$ 三点共线，$\therefore$ 设 $\overrightarrow{AE}=y\overrightarrow{AB}+(1-y)\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(1-y)\overrightarrow{AC}(0\leqslant y\leqslant1)$，$\therefore\begin{cases}\frac{x}{3}=y,\\1-x=\frac{1}{4}(1-y),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{9}{11},\\y=\frac{3}{11},\end{cases}$ $\therefore\overrightarrow{AE}=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{11}\boldsymbol{a}+\frac{2}{11}\boldsymbol{b}$.

13. 2　$\sqrt{2}+\frac{3}{2}$ ［解析］由 $\overrightarrow{OA}=(-2,4)$，$\overrightarrow{OB}=(-a,2)$，$\overrightarrow{OC}=(b,0)$，可得 $\overrightarrow{AB}=(-a+2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(b+2,-4)$，由于 A,B,C 三点共线，故 $\overrightarrow{AB}=(-a+2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(b+2,-4)$ 共线，所以 $(-a+2)\times(-4)-(-2)(b+2)=0$，即 $2a+b=2$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}+3\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}+3\right)=\sqrt{2}+\frac{3}{2}$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=2-\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}-2$ 时取等号，故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}+\frac{3}{2}$.

14. 解：由已知得 $\boldsymbol{a}=(5,-5)$，$\boldsymbol{b}=(-6,-3)$，$\boldsymbol{c}=(1,8)$.

(1) $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=3(5,-5)+(-6,-3)-3(1,8)=(15-6-3,-15-3-24)=(6,-42)$.

(2) 方法一：$\because\boldsymbol{a}=(5,-5)$，$m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}=(-6m+n,-3m+8n)$，$\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$，$\therefore\begin{cases}-6m+n=5,\\-3m+8n=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-1,\\n=-1.\end{cases}$

方法二：$\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$\therefore\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，又 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$，$\therefore m=-1,n=-1$.

(3) $\because\overrightarrow{CM}=3\boldsymbol{c}=(3,24)$，$\overrightarrow{CN}=-2\boldsymbol{b}=(12,6)$，$\therefore\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=(12,6)-(3,24)=(9,-18)$.

$\because\overrightarrow{MN}\parallel\boldsymbol{d}$，$\therefore9k+18=0$，解得 $k=-2$.

15. 解：(1) 由点 E,F,O 三点共线，可设 $\overrightarrow{EO}=x\overrightarrow{EF}$，则 $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AE}=x(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})$，即 $\overrightarrow{AO}=(1-x)\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AF}$，

又 $\because\lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{1}{2}$，$\therefore\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(1-x)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}x\overrightarrow{AC}$.

$\because P$ 为线段 BC 上靠近点 B 的三等分点，$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

由点 A,P,O 三点共线可设 $\overrightarrow{AO}=y\overrightarrow{AP}$，

即$\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{x}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}y\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}y\overrightarrow{AC}$，故$\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{x}{3}=\frac{2}{3}y,\\ \frac{x}{2}=\frac{1}{3}y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{1}{4},\\ y=\frac{3}{8},\end{cases}$故$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AP}$，故$\frac{AO}{OP}=\frac{3}{8-3}=\frac{3}{5}$.

(2)由(1)可知$\overrightarrow{AO}=(1-x)\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AF}$，$0<x<1$，

又$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\overrightarrow{AO}=(1-x)\lambda\overrightarrow{AB}+x\mu\overrightarrow{AC}$，又$O$为$AP$的中点，$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

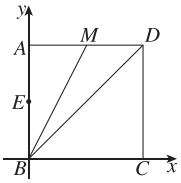
$\therefore\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，

故$\begin{cases}(1-x)\lambda=\frac{1}{3},\\ x\mu=\frac{1}{6},\end{cases}$得$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3(1-x)},\\ \mu=\frac{1}{6x},\end{cases}$

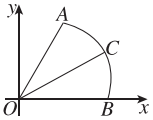
$\therefore\lambda+\mu=\frac{1}{3(1-x)}+\frac{1}{6x}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2-2x}+\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2-2x}+\frac{1}{2x}\right)(2-2x+2x)=\frac{1}{6}\left(2+\frac{4x}{2-2x}+\frac{2-2x}{2x}+1\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(2+2\sqrt{\frac{4x}{2-2x}\cdot\frac{2-2x}{2x}}+1\right)=\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$，当且仅当$\frac{4x}{2-2x}=\frac{2-2x}{2x}$，即$x=\sqrt{2}-1$时，等号成立，

故$\lambda+\mu$的最小值为$\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$.

16. ABC [解析] 以B为原点，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$的方向分别为x，y轴正方向建立平面直角坐标系，如图所示，设$BC=2$，则$B(0,0)$，$E(0,1)$，$D(2,2)$. 设$M(t,2)$，则$0\leqslant t\leqslant2$，因为$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BE}+\mu\overrightarrow{BD}$，所以$(t,2)=\lambda(0,1)+\mu(2,2)=(2\mu,\lambda+2\mu)$，所以$2\mu=t$，$\lambda+2\mu=2$，即$\lambda=2-t$，$\mu=\frac{t}{2}$. 对于选项A，因为$M$为线段$AD$的中点，所以$t=1$，故$\lambda+\mu=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，A正确；对于选项B，$\lambda\mu=(2-t)\frac{t}{2}=t-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}$，$0\leqslant t\leqslant2$，所以当$t=1$时，$\lambda\mu$取得最大值$\frac{1}{2}$，B正确；对于选项C，因为$\mu=\frac{t}{2}$，$0\leqslant t\leqslant2$，所以$0\leqslant\mu\leqslant1$，即$\mu$的取值范围为$[0,1]$，C正确；对于选项D，$\lambda+\mu=2-\frac{t}{2}$，$0\leqslant t\leqslant2$，所以$1\leqslant\lambda+\mu\leqslant2$，所以$\lambda+\mu$的取值范围为$[1,2]$，D错误. 故选ABC.



17. $\left[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ [解析] 以O为坐标原点，OB所在直线为x轴，过点O作OB的垂线，以该直线为y轴建立平面直角坐标系，如图. 设扇形AOB的半径为1，则$A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(1,0)$，$C(\cos\theta,\sin\theta)$，其中$\angle BOC=\theta$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$. 由$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，得$(\cos\theta,\sin\theta)=\lambda\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mu(1,0)$，整理得$\frac{1}{2}\lambda+\mu=\cos\theta$，$\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda=\sin\theta$，解得$\lambda=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}$，$\mu=\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$，则$\lambda+\mu=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}+\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，因为$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\theta+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，故$\lambda+\mu\in\left[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.



第33讲　平面向量的数量积

1. B [解析] $\because\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\therefore\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,1)$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0\times(-1)+1\times1=1$. 故选B.

2. C [解析] $\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{1}\cdot\frac{(1,0)}{1}=4(1,0)=(4,0)$. 故选C.

3. A [解析] 因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，又$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{3}{2}$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选A.

4. A [解析] 由题知$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{2}{3}\times36+\frac{1}{2}\times16=32$. 故选A.

5. BD [解析] 对于A，$\because\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,-4)$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+3\times(-4)=-10$，故A错误；对于B，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{20}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，又$\because0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，$\therefore$向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，故B正确；对于C，$\because\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=(1,3)+\frac{1}{2}(2,-4)=(2,1)$，$\therefore\left|\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，故C错误；对于D，$\because\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-6\times1+2\times3=0$，$\therefore\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，故D正确. 故选BD.

6. -2 [解析] 由已知条件，得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$m+2=0$，即$m=-2$.

7. -2 [解析] $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,2)$，因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，即$4+2k=0$，解得$k=-2$.

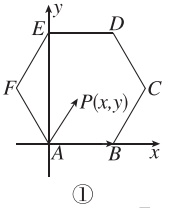
8. B [解析] 因为向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是两个单位向量，所以$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$，又$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 又$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{1+1-2\times1\times1\times\frac{1}{2}}=1$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，又$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$. 故选B.

9. A [解析] 设$\boldsymbol{b}=(x,y)$，又$\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1-x,\sqrt{3}-y)$，因为$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2}=4$，所以点$(x,y)$在以$C(1,\sqrt{3})$为圆心，4为半径的圆上，又$|OC|=2$，所以$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+y^2}\in[4-2,4+2]$，即$|\boldsymbol{b}|\in[2,6]$. 故选A.

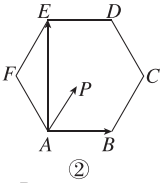
10. A [解析] 方法一：以A为原点，$\overrightarrow{AB}$的方向为x轴的正方向，建立如图①所示的平面直角坐标系，设$P(x,y)$，则$\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(x,y)$，$\because-1<x<3$，$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2x\in(-2,6)$.

方法二：如图②，以$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\rangle$为基底，则$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\pi}{2}$，且$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3}$. $\because P$为正六边形内一点，$\therefore\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE}$，$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}^2=4x$. $\because-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，$\therefore-2<\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}<6$.

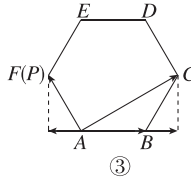
方法三：作出正六边形$ABCDEF$，如图③所示，P是正六边形内一点，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$，$|\overrightarrow{AB}|=2$. 由图可得，当$P$位于$C$处时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$最大，又$BC=2$，$\angle CAB=30^\circ$，故此时$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times3=6$；当$P$位于$F$处时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$最小，又$AF=2$，$\angle FAB=120^\circ$，故此时$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times(-1)=-2$. $\because P$在正六边形内，$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围为$(-2,6)$. 故选A.



①

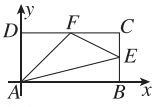


②



③

11. AC [解析] $\because$四边形$ABCD$为矩形，$\therefore$以A为原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$的方向为x轴、y轴正方向建立平面直角坐标系，如图所示，则$A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(2,1)$，$D(0,1)$，$E\left(2,\frac{1}{2}\right)$，$F(1,1)$，$\therefore\overrightarrow{AE}=\left(2,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AF}=(1,1)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$. 对于A，$|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故A正确；对于B，$\because\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AF}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\neq0$，$\therefore\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{AF}$不垂直，故B不正确；对于C，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=2+\frac{1}{2}=$

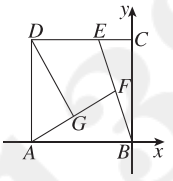


1585316561

$\frac{5}{2}$，故 C 正确；对于 D，$\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$，故 D 不正确. 故选 AC.

12. $\sqrt{3}$ ［解析］由 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$，可得 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_3$，所以 $(-\boldsymbol{F}_3)^2=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)^2$，化简可得 $\boldsymbol{F}_3^2=\boldsymbol{F}_1^2+\boldsymbol{F}_2^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2$，因为 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_3|=1$ N，所以 $2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2=-1$，所以 $|\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{(\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2)^2}=\sqrt{\boldsymbol{F}_1^2-2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_2^2}=\sqrt{1-(-1)+1}=\sqrt{3}$(N).

13. $\frac{4}{3}$ $-\frac{5}{18}$ ［解析］方法一：因为 $CE=\frac{1}{2}DE$，所以 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，可得 $\lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=1$，所以 $\lambda+\mu=\frac{4}{3}$. 由题意可知 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BA}|=1$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，因为 F 为线段 BE 上的动点，所以设 $\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}k\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}$，$k\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\left(\frac{1}{3}k-1\right)\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}$，又因为 G 为 AF 的中点，所以 $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}k-1\right)\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{2}k-1\right)\overrightarrow{BC}$，可得 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}=\left[\left(\frac{1}{3}k-1\right)\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}k-1\right)\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{2}k-1\right)\overrightarrow{BC}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}k-1\right)^2+k\left(\frac{1}{2}k-1\right)=\frac{5}{9}\left(k-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{3}{10}$. 因为 $k\in[0,1]$，所以当 $k=1$ 时，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 取得最小值 $-\frac{5}{18}$.



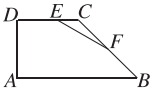
方法二：以 B 为坐标原点，BA 所在直线为 x 轴，BC 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图所示，则 $A(-1,0)$，$B(0,0)$，$C(0,1)$，$D(-1,1)$，$E\left(-\frac{1}{3},1\right)$，可得 $\overrightarrow{BA}=(-1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,1)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{3},1\right)$，因为 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}=(-\lambda,\mu)$，所以 $\begin{cases}-\lambda=-\frac{1}{3},\\ \mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3},\\ \mu=1,\end{cases}$ 所以 $\lambda+\mu=\frac{4}{3}$. 因为点 F 在线段 BE：$y=-3x$，$x\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$ 上，所以设 $F(a,-3a)$，$a\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$，又 G 为 AF 的中点，所以 $G\left(\frac{a-1}{2},-\frac{3}{2}a\right)$，可得 $\overrightarrow{AF}=(a+1,-3a)$，$\overrightarrow{DG}=\left(\frac{a+1}{2},-\frac{3}{2}a-1\right)$，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}=\frac{(a+1)^2}{2}+(-3a)\left(-\frac{3}{2}a-1\right)=5\left(a+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{3}{10}$. 因为 $a\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$，所以当 $a=-\frac{1}{3}$ 时，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 取得最小值 $-\frac{5}{18}$.

14. 解：(1) $\because\boldsymbol{a}=(4,3\cos\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(1,2\tan\alpha)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\therefore 8\tan\alpha-3\cos\alpha=0$，$\therefore 8\sin\alpha=3\cos^2\alpha=3-3\sin^2\alpha$，$\therefore 3\sin^2\alpha+8\sin\alpha-3=0$，即 $(3\sin\alpha-1)(\sin\alpha+3)=0$，可得 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

(2) $\because\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+6\cos\alpha\tan\alpha=0$，$\therefore\sin\alpha=-\frac{2}{3}$，又 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\therefore\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\therefore\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{9}$，

$\therefore\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+4\sqrt{15}}{18}$.

15. 解：(1) 如图所示，由 $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$ 可得 $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，又 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，所以 $\lambda=\frac{5}{12}$，$\mu=-\frac{1}{2}$，所以 $\lambda+\mu=-\frac{1}{12}$.

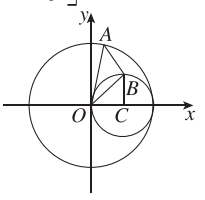


(2) 方法一：以点 A 为坐标原点，以 AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如图所示，则 $A(0,0)$，$D(0,2)$，$B(4,0)$，$C(2,2)$，$F(3,1)$. 由点 P 是线段 AF 上的动点(含端点)，可令 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AF}$，$t\in[0,1]$，所以 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AF}=(3t,t)$，又 $\overrightarrow{AD}=(0,2)$，则 $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}=(3t,t-2)$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}=10t^2-2t$，$t\in[0,1]$，由二次函数的性质可得，当 $t=\frac{1}{10}$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}$ 取得最小值 $-\frac{1}{10}$；当 $t=1$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}$ 取得最大值 8. 综上得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}\in\left[-\frac{1}{10},8\right]$.

方法二：取 AD 的中点 M，作 $MG\perp AF$，垂足为 G，如图所示，连接 PM，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MD})=\overrightarrow{PM}^2+\overrightarrow{PM}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD})+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{PM}^2-\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{PM}^2-1$，显然当点 P 位于点 F 时，PM 取得最大值 3，当点 P 位于点 G 时，PM 取得最小值 $\frac{3}{10}\sqrt{10}$，可得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}\in\left[-\frac{1}{10},8\right]$.

16. A ［解析］设与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\boldsymbol{e}_1$，与 $\overrightarrow{AD}$ 同方向的单位向量 $\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\boldsymbol{e}_2$，与 $\overrightarrow{AC}$ 同方向的单位向量 $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\boldsymbol{e}_3$，由题意知 $\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{e}_3$，所以 $(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)^2=\lambda^2\boldsymbol{e}_3^2$，即 $\boldsymbol{e}_1^2+6\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+9\boldsymbol{e}_2^2=\lambda^2\boldsymbol{e}_3^2$，所以 $1+6\times1\times1\times\cos\angle BAD+9=\lambda^2$，所以 $\cos\angle BAD=\frac{\lambda^2-10}{6}$，因为 $\lambda\in[\sqrt{7},3]$，所以 $\lambda^2\in[7,9]$，所以 $\frac{\lambda^2-10}{6}\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right]$，即 $\cos\angle BAD\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right]$. 故选 A.

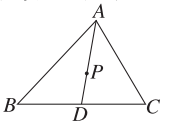
17. BCD ［解析］由题意知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=1$，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，不妨设 $C(1,0)$，如图，动点 A 在以 O 为圆心，2 为半径的圆上，动点 B 在以 C 为圆心，1 为半径的圆上，且满足 $|\overrightarrow{AB}|=1$，圆 C 的方程是 $(x-1)^2+y^2=1$. 当点 B 在圆 C 上运动时，由 $|AB|+|OB|\geqslant|OA|$，得 $|OB|\geqslant1$，当且仅当 O，A，B 三点共线且 B 在 O，A 之间时取等号. 由图易知 $|OB|\leqslant2$，即 $1\leqslant|\boldsymbol{b}|\leqslant2$，故选项 A 不可能成立，选项 B 可能成立. 设 $B(x,y)$，则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(x,y)\cdot(1,0)=x$，由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ (x-1)^2+y^2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ $\therefore x\geqslant\frac{1}{2}$，又 $x\leqslant2$，$\therefore\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$，$\therefore\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，故选项 C，D 均可能成立. 故选 BCD.



第 34 讲　平面向量的综合问题

1. D ［解析］由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，可得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，所以 $BC/\!/AD$ 且 $BC=AD$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，可得四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直，所以四边形 $ABCD$ 一定是菱形. 故选 D.

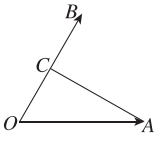
2. D ［解析］如图，设 BC 的中点为 D，连接 AD，因为点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 P 在 AD 上，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，由此可知 A，B，C 错误，D 正确，故选 D.



3. A ［解析］因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以 $b\sin 2A-a\sin B=0$，即 $2b\sin A\cos A-a\sin B=0$，由正弦定理可得 $2\sin B\sin A\cos A-\sin A\sin B=0$，又因为 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $2\cos A-1=0$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. 故选 A.

4. B ［解析］由 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$，得 $|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{AB}|$，又四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $\triangle ABD$ 是正三角形，于是 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，因此 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$. 故选 B.

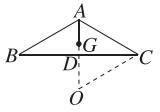
5. B ［解析］如图，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|$ 为直线 OB 上的点 C 与点 A 之间的距离. 当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|$ 取得最小值，可知此时 C 为线段 OB 的中点且 $AC\perp OB$，又 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$



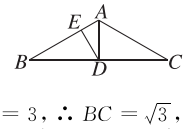
$\angle AOC=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

6. 外心 [解析] 设 M 为 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$，则有 $(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{BC}$，所以动点 O 在线段 BC 的中垂线上，则点 O 的轨迹必经过 $\triangle ABC$ 的外心.

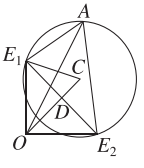
7. 1 [解析] 如图，延长 AG 交 BC 于 D，$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，$\therefore AD$ 为 $\triangle ABC$ 的中线. 由 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $\overrightarrow{AG}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，故 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即 $AD\perp BC$，故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，且 $AB=AC$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心在 AD 的延长线上，设为 O，连接 OC，则 $OA=OC$，$\because\angle OAC=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\triangle OAC$ 是等边三角形，$\therefore OA=OC=AC=AB=1$，即 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 1.



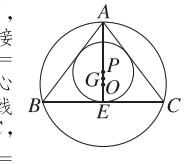
8. B [解析] 设 $AB=AC=1$，由余弦定理可知 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120°=1+1+1=3$，$\therefore BC=\sqrt{3}$，$\angle ABC=30°$. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ 且与 BC 相交于点 D，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$\therefore D$ 是 BC 的中点，$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，如图，过点 D 作 $DE\perp AB$，垂足为 E. 由图可知向量 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{BE}$，又 $|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{BD}|\cos 30°=\frac{3}{4}$，$\therefore|\overrightarrow{BE}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{BA}|$，$\therefore\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$，故选 B.



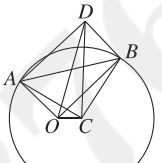
9. B [解析] 令 $\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE_1}=\overrightarrow{E_1A}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{E_2A}$，因为 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$，$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，所以 $E_1E_2=\sqrt{2}$. 因为 $\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_2\rangle=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle E_1AE_2=\frac{\pi}{3}$，所以过 E_1，A，E_2 的圆 C 的半径 $r=E_1C=\frac{E_1E_2}{2\sin\angle E_1AE_2}=\frac{\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，连接 OC 交 E_1E_2 于点 D，则 $OD=DE_1=\frac{1}{2}E_1E_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$CD=\sqrt{E_1C^2-E_1D^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以 $OC=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以 $|\overrightarrow{OA}|$ 的最大值为 $OC+r=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，故选 B.



10. ABD [解析] 如图，取 BC 的中点 E，连接 AE，因为 $AB=AC=5$，所以内心 P，外心 O，重心 G 都在中线 AE 上，且 $AE\perp BC$，$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=4$，设内切圆半径为 r. 对于 A，由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AE\times BC=\frac{1}{2}r(AB+AC+BC)$，得 $\frac{1}{2}\times4\times6=\frac{1}{2}r(5+5+6)$，解得 $r=\frac{3}{2}$，故 A 正确；对于 B，因为 $PE=\frac{3}{2}$，所以 $AP=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，所以 $\overrightarrow{PE}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{PA}$，所以 $6\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=6\overrightarrow{PA}+5(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=6\overrightarrow{PA}+10\overrightarrow{PE}=6\overrightarrow{PA}-10\times\frac{3}{5}\times\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{0}$，故 B 正确；对于 C，由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+25-36}{2\times25}=\frac{7}{25}$，又 $0<\angle BAC<\pi$，所以 $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\frac{24}{25}$，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $AO=\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=\frac{6}{2\times\frac{24}{25}}=\frac{25}{8}$，则 $OE=4-AO=4-\frac{25}{8}=\frac{7}{8}$，所以 $\overrightarrow{OE}=-\frac{7}{25}\overrightarrow{OA}$，所以 $6\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=6\overrightarrow{OA}+5(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=6\overrightarrow{OA}+10\overrightarrow{OE}=6\overrightarrow{OA}-10\times\frac{7}{25}\overrightarrow{OA}=\frac{16}{5}\overrightarrow{OA}\neq\boldsymbol{0}$，故 C 错误；对于 D，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $AO=\frac{25}{8}$，因为 $AG=\frac{2}{3}AE=\frac{8}{3}$，所以 $OG=AO-AG=\frac{25}{8}-\frac{8}{3}=\frac{11}{24}$，故 D 正确. 故选 ABD.



11. BCD [解析] 如图，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{34}$，得 $|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{34}$，可知 A，B 均在以点 C 为圆心，$\sqrt{34}$ 为半径的圆上. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，得 $OA\perp OB$，以 OA，OB 为邻边作矩形 $OADB$，由矩形的性质可知，$|\overrightarrow{CO}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2$，可得 $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{34+34-4}=8$，即点 D 在以点 C 为圆心，8 为半径的圆上，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OD}|\in[8-2,8+2]$，即 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\in[6,10]$. 故选 BCD.



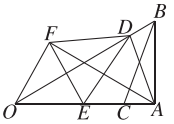
12. 重心 4 [解析] 由 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，可得 D 为 BC 的中点，所以直线 AD 一定经过 $\triangle ABC$ 的重心. 由 A，N，D 三点共线，可设 $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AD}$，故 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，又 $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{2}x-1\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}x\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BN}$ 共线，所以 $\frac{\frac{1}{2}x-1}{-1}=\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{3}}$，解得 $x=\frac{4}{5}$，故 $\overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{ND}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$，故 $\frac{AN}{ND}=4$.

13. $2\sqrt{3}$ [解析] $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 表示与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 表示与 $\overrightarrow{AC}$ 同向的单位向量，$\because\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\therefore\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\therefore$ 点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上，即 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线. 在 $\triangle ABD$ 中，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$AD=|\overrightarrow{AD}|=1$，利用正弦定理知 $BD=\frac{AD}{\sin B}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin B}$. 同理，在 $\triangle ACD$ 中，$CD=\frac{AD}{\sin C}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin C}$，$\therefore BC=BD+CD=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin B}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$，其中 $B+C=\frac{\pi}{3}$，分析可知当 $B=C=\frac{\pi}{6}$ 时，BC 取得最小值，即 $BC_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}$，$\therefore|\overrightarrow{BC}|_{\min}=2\sqrt{3}$.

14. 解：(1) $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

(2) 由题易知 $BC=2$，设 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{2}{3}$，则 $\overrightarrow{BE}=\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{AB}^2+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BE})\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE}=2+\left[\lambda\overrightarrow{BC}+\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}\right]\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}^2=2+\left(2\lambda+\frac{1}{3}\right)\times2\times\sqrt{2}\times\cos\frac{3\pi}{4}+\lambda\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\times4=4\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}$，因为 $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{2}{3}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{9},\frac{4}{3}\right]$.

15. C [解析] 如图，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=-t\boldsymbol{a}$，因为 $\forall t\in\mathbf{R}$，不等式 $|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ 恒成立，所以 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|\geqslant|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$，即 $|\overrightarrow{CB}|\geqslant|\overrightarrow{AB}|$ 恒成立，从而有 $AB\perp OA$，故 $|\overrightarrow{OA}|=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=2$. 设 $\overrightarrow{OD}=x\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，则 $f(x)=|x\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|+\left|x\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right|=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}|=|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{ED}|$. 作点 E 关于直线 OB 的对称点 F，则 $|\overrightarrow{OF}|=1$，$\angle FOA=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{FD}|\geqslant|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，当且仅当 F，D，A 三点共线时取等号. 故选 C.



16. AD [解析] 因为锐角三角形 ABC 内部的一点 O 满足 $OA=OB=OC$，所以 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，圆心 O 在 $\triangle ABC$ 内. 设外接圆的半径为 R，因为 $\frac{1}{2\cos\angle BAC}\overrightarrow{OA}+\frac{\cos\angle ABC}{\sin\angle ACB}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos\angle ACB}{\sin\angle ABC}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$，所以 $\frac{1}{2\cos\angle BAC}\overrightarrow{OA}+$

1393765567

$\frac{\cos\angle ABC}{\sin\angle ACB}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{\cos\angle ACB}{\sin\angle ABC}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\mathbf{0}$，所以 $\frac{1}{2\cos\angle BAC}\overrightarrow{OA}^2+\frac{\cos\angle ABC}{\sin\angle ACB}(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}^2)+\frac{\cos\angle ACB}{\sin\angle ABC}(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}^2)=0$，即 $\frac{1}{2\cos\angle BAC}R^2+\frac{\cos\angle ABC}{\sin\angle ACB}(R^2\cos\angle AOB-R^2)+\frac{\cos\angle ACB}{\sin\angle ABC}(R^2\cos\angle AOC-R^2)=0$，从而得 $\frac{1}{2\cos\angle BAC}+\frac{\cos\angle ABC}{\sin\angle ACB}(\cos 2\angle ACB-1)+\frac{\cos\angle ACB}{\sin\angle ABC}(\cos 2\angle ABC-1)=0$，即 $\frac{1}{2\cos\angle BAC}+\frac{\cos\angle ABC}{\sin\angle ACB}(-2\sin^2\angle ACB)+\frac{\cos\angle ACB}{\sin\angle ABC}(-2\sin^2\angle ABC)=0$，所以 $\frac{1}{2\cos\angle BAC}=2\sin\angle ACB\cos\angle ABC+2\sin\angle ABC\cos\angle ACB=2\sin(\angle ABC+\angle ACB)=2\sin\angle BAC$，即 $2\sin\angle BAC\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，所以 $\sin 2\angle BAC=\frac{1}{2}$，因为 $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$，所以 $2\angle BAC=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，所以 $\angle BAC=\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$. 故选 AD.

第 35 讲　复数

1. A ［解析］$z(1-\mathrm{i})=(-1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=(-\mathrm{i})^2-1=-2$. 故选 A.

2. B ［解析］$z=\frac{|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|}{1+\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，∴$z$ 的虚部为 -1. 故选 B.

3. B ［解析］$z=\frac{10}{-3+\mathrm{i}}=\frac{10(-3-\mathrm{i})}{(-3+\mathrm{i})(-3-\mathrm{i})}=\frac{10(-3-\mathrm{i})}{9-\mathrm{i}^2}=-3-\mathrm{i}$，所以 z 的共轭复数为 $-3+\mathrm{i}$. 故选 B.

4. C ［解析］因为 $(2+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2+b\mathrm{i}$，所以 $2+a+(1-2a)\mathrm{i}=2+b\mathrm{i}$，可得 $\begin{cases}2+a=2,\\1-2a=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=1,\end{cases}$ 所以 $a+b=1$. 故选 C.

5. A ［解析］设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$. 因为 $\mathrm{i}z+4\overline{z}-15=0$，所以 $\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})+4(a-b\mathrm{i})-15=4a-b-15+(a-4b)\mathrm{i}=0$，可得 $\begin{cases}4a-b-15=0,\\a-4b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=1,\end{cases}$ 即 $z=4+\mathrm{i}$，所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(4,1)$，位于第一象限. 故选 A.

6. $-1+2\mathrm{i}$ ［解析］$\frac{5+10\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\frac{(5+10\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=\frac{5(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{9-16\mathrm{i}^2}=\frac{(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{5}=\frac{-5+10\mathrm{i}}{5}=-1+2\mathrm{i}$.

7. $(-5,-4)$ ［解析］由题意得 $\begin{cases}a+4<0,\\-(a+5)<0,\end{cases}$ 解得 $-5<a<-4$，∴实数 a 的取值范围是 $(-5,-4)$.

8. A ［解析］设复数 $z=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{R}$，所以 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，又因为复数 z 满足 $z+2\overline{z}=3+\mathrm{i}$，所以 $a+b\mathrm{i}+2(a-b\mathrm{i})-3-\mathrm{i}=0$，可得 $\begin{cases}3a-3=0,\\-b-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 所以 $z=1-\mathrm{i}$，所以 $\frac{3+\mathrm{i}}{z}=\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}=1+2\mathrm{i}$，故选 A.

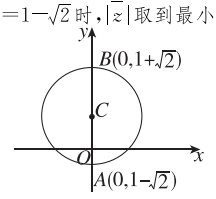
9. D ［解析］$x^2+1=x^2-(-1)=x^2-\mathrm{i}^2=(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$，若 $\begin{cases}z_1=\mathrm{i},\\z_2=-\mathrm{i},\end{cases}$ 则 $z_1-z_2=2\mathrm{i}$，所以 $(z_1-z_2)\mathrm{i}=2\mathrm{i}^2=-2<0$，不符合题意；若 $\begin{cases}z_1=-\mathrm{i},\\z_2=\mathrm{i},\end{cases}$ 则 $z_1-z_2=-2\mathrm{i}$，所以 $(z_1-z_2)\mathrm{i}=-2\mathrm{i}^2=2>0$，符合题意. 所以 $z_1=-\mathrm{i},z_2=\mathrm{i}$，所以 $\frac{z_1}{1+z_2}=\frac{-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，故复数 $\frac{z_1}{1+z_2}$ 的虚部为 $-\frac{1}{2}$. 故选 D.

10. ABC ［解析］$z=\frac{2}{\mathrm{i}(3+\mathrm{i}^3)}=\frac{2}{\mathrm{i}(3-\mathrm{i})}=\frac{2}{1+3\mathrm{i}}=\frac{2(1-3\mathrm{i})}{10}=\frac{1-3\mathrm{i}}{5}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$，故 $|\overline{z}|=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故 A 正确；$z$ 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)$，位于第四象限，故 B 正确；$\frac{3}{5}\mathrm{i}-\overline{z}=\frac{3}{5}\mathrm{i}-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}=-\frac{1}{5}<0$，故 C 正确；$z+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$，不为纯虚数，故 D 错误. 故选 ABC.

11. ACD ［解析］因为 z_1,z_2 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的两个根且 $z_1=1+\mathrm{i}$，所以 $z_2=1-\mathrm{i}$，即 $z_1=\overline{z_2}$，故 A 正确；$z_1^2=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i},z_2^2=(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$，所以 $z_1^2\neq z_2^2$，故 B 错误；因为 $z_1+z_2=(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})=2=-p$，所以 $p=-2$，故 C 正确；$z_1z_2=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=1^2-\mathrm{i}^2=2=q$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 或 $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ ［解析］依题意，$\overrightarrow{OZ_1}=(\sqrt{3},1)$，设 $\overrightarrow{OZ_2}=(x,y)$，由 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$ 得 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\sqrt{3}x+y=0$，由 $|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|$ 得 $x^2+y^2=4$，由 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\x^2+y^2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{OZ_2}=(1,-\sqrt{3})$ 或 $\overrightarrow{OZ_2}=(-1,\sqrt{3})$，所以 $z_2=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 或 $z_2=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

13. $\sqrt{2}-1$ ［解析］设 $z=x+y\mathrm{i},x,y\in\mathbf{R}$，由 $|z-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$ 两边平方整理得 $x^2+(y-1)^2=2$，即 $x^2+y^2=2y+1$，故 $|\overline{z}|=|x-y\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2y+1}$. 作出复数 z 对应的点 $Z(x,y)$ 的轨迹方程 $x^2+(y-1)^2=2$ 表示的图形，如图. 易得 $1-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{2}$，故 $|\overline{z}|=\sqrt{2y+1}\geqslant\sqrt{2(1-\sqrt{2})+1}=\sqrt{2}-1$，即当且仅当 $y=1-\sqrt{2}$ 时，$|\overline{z}|$ 取到最小值 $\sqrt{2}-1$.



14. $\sqrt{2}-1$ ［解析］$z=\lambda\left(1+\sin\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\theta(0<\theta<\pi)$ 在复平面内对应的点为 $\left(\lambda\left(1+\sin\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}\right),\sin\theta\right)$，所以 $\lambda\left(1+\sin\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)=\sin\theta$，所以 $\lambda\left(1+\sin\theta-\frac{1-2\sin^2\theta}{2}\right)=\sin\theta$，由 $\theta\in(0,\pi)$，得 $\sin\theta>0$，则 $\lambda=\frac{\sin\theta}{\frac{1}{2}+\sin\theta+\sin^2\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2\sin\theta}+\sin\theta+1}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2\sin\theta}\cdot\sin\theta}+1}=\sqrt{2}-1$，当且仅当 $\frac{1}{2\sin\theta}=\sin\theta$，即 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时等号成立，故 λ 的最大值为 $\sqrt{2}-1$.

15. C ［解析］$z=1-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2024}-\mathrm{i}^{2025}+\mathrm{i}^{2026}=\frac{1-(-\mathrm{i})^{2026+1}}{1-(-\mathrm{i})}=\frac{1-\mathrm{i}^{2024}\times(-\mathrm{i})^3}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，所以 $|z|=1$. 故选 C.

16. BD ［解析］对于 A，$|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ 表示点 (x,y) 与 $(-1,0)$ 之间的距离，$|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ 表示点 (x,y) 与 $(1,0)$ 之间的距离，记 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$，$|z+1|=|z-1|$ 表示点 $Z(x,y)$ 到 F_1,F_2 的距离相等，则点 Z 的轨迹是线段 F_1F_2 的中垂线，故 A 错误；对于 B，记 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$，由 $|z+2|+|z-2|=8$，得 $|ZF_1|+|ZF_2|=8>4=|F_1F_2|$，符合椭圆的定义，故点 Z 的轨迹是椭圆，故 B 正确；对于 C，记 $F_1(0,-2),F_2(0,2)$，由 $|z+2\mathrm{i}|-|z-2\mathrm{i}|=2$，得 $|ZF_1|-|ZF_2|=2<4=|F_1F_2|$，所以点 Z 的轨迹为双曲线的一支，故 C 错误；对于 D，若 $|z+1|=|z-1|$，则 $(x+1)^2=(x-1)^2+y^2$，整理得 $y^2=4x$，所以点 Z 的轨迹是抛物线，故 D 正确. 故选 BD.

第六单元　数列

第 36 讲　数列的概念与简单表示法

1. A ［解析］数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项依次为 $2,2\sqrt{2},2\sqrt{3},2\sqrt{4},2\sqrt{5}$，则 $a_n=2\sqrt{n}$，所以 $a_{16}=2\sqrt{16}=8$. 故选 A.

2. B ［解析］$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$，由 $a_1=-\frac{1}{4}$，得 $a_2=1-\frac{1}{a_1}=5,a_3=1-\frac{1}{a_2}=\frac{4}{5},a_4=1-\frac{1}{a_3}=-\frac{1}{4},a_5=1-\frac{1}{a_4}=5,a_6=1-\frac{1}{a_5}=\frac{4}{5}$，故选 B.

3. C ［解析］由 $a_n=S_{n-1}(n\geqslant 2)$，得 $a_{n+1}=S_n$，两式相减得 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$. 又因为 $a_1=1,a_2=a_1$，所以 $a_n\neq 0$，可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\geqslant 2)$，即 $a_n=a_2\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_2\cdot 2^{n-2}=2^{n-2}(n\geqslant 3)$. 易知 $a_2=1=2^{2-2}$，即 a_2 满足上式，所以 $a_n=2^{n-2}(n\geqslant 2)$. 故选 C.

4. A ［解析］由题意可得 $a_{n+1}-a_n>0$ 恒成立，即 $(n+1)^2+b(n+1)-n^2-bn=2n+1+b>0$，即 $b>-2n-1$，又 $n\geqslant 1$，即 $-2n-1\leqslant -3$，故 $b\in(-3,+\infty)$. 故选 A.

5. C ［解析］依题意，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3),a_1=1,a_2=2$，所以 $a_3=3,a_4=5,a_5=8,a_6=13,a_7=21,a_8=34,a_9=55,a_{10}=89$. 故选 C.

6. $a_n=\begin{cases}5,n=1,\\2^{n+1},n\geqslant 2\end{cases}$ ［解析］当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^3-3=5$；当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n=$

$S_n-S_{n-1}=(2^{n+2}-3)-(2^{n+1}-3)=2^{n+1}$. 当 $n=1$ 时，$a_1=5$ 不满足上式，所以 $a_n=\begin{cases}5,n=1,\\2^{n+1},n\geqslant 2.\end{cases}$

7. $\frac{10}{11}$ ［解析］因为 $a_{n+3}=\frac{1}{1-a_{n+2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-a_{n+1}}}=\frac{1-a_{n+1}}{-a_{n+1}}=\frac{1-\frac{1}{1-a_n}}{-\frac{1}{1-a_n}}=a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列，所以 $a_{985}=a_{328\times 3+1}=a_1$，又 $a_2=11$，所以 $11=\frac{1}{1-a_1}$，解得 $a_1=\frac{10}{11}$，故 $a_{985}=a_1=\frac{10}{11}$.

8. B ［解析］因为 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,a_n<\frac{1}{2},\\2a_n-1,a_n\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 且 $a_1=\frac{4}{5}$，所以 $a_2=2a_1-1=2\times\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$，$a_3=2a_2-1=2\times\frac{3}{5}-1=\frac{1}{5}$，$a_4=2a_3=\frac{2}{5}$，$a_5=2a_4=\frac{4}{5}$，$a_6=2a_5-1=2\times\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$，…，所以 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列，所以 $a_{2026}=a_{4\times 506+2}=a_2=\frac{3}{5}$. 故选 B.

9. B ［解析］因为 a_2 为强率，由 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{10}{3}$ 可得，$a_3=\frac{3+10}{1+3}=\frac{13}{4}>3.141\ 592\ 7$，即 a_3 为强率；由 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{13}{4}$ 可得，$a_4=\frac{3+13}{1+4}=\frac{16}{5}>3.141\ 592\ 7$，即 a_4 为强率；由 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{16}{5}$ 可得，$a_5=\frac{3+16}{1+5}=\frac{19}{6}>3.141\ 592\ 7$，即 a_5 为强率；由 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{19}{6}$ 可得，$a_6=\frac{3+19}{1+6}=\frac{22}{7}>3.141\ 592\ 7$，即 a_6 为强率；由 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{22}{7}$ 可得，$a_7=\frac{3+22}{1+7}=\frac{25}{8}=3.125<3.141\ 592\ 6$，即 a_7 为弱率，所以 $m=7$，故选 B.

10. BCD ［解析］设第 $n(n\geqslant 2)$ 项为 $\{a_n\}$ 的最大项，则 $\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1},\\a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(n+2)\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n\geqslant(n+1)\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1},\\(n+2)\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n\geqslant(n+3)\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}n\leqslant 5,\\n\geqslant 4,\end{cases}$ 又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=4$ 或 $n=5$，故数列 $\{a_n\}$ 中 a_4 与 a_5 均为最大项，且 $a_4=a_5=\frac{6^5}{7^4}$，当 $n\geqslant 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 递减，故 B,C,D 正确. 当 n 趋向于正无穷大时，$a_n=(n+2)\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$ 无限趋向于 0 且大于 0，且 $a_1=\frac{18}{7}>0$，所以 a_1 不是数列 $\{a_n\}$ 的最小项，且数列 $\{a_n\}$ 无最小项，故 A 错误. 故选 BCD.

11. ABD ［解析］因为 $a_{n+1}=4a_n+3^n$，所以 $a_{n+1}+3^{n+1}=4(a_n+3^n)$，且 $a_1+3=4\neq 0$，可知数列 $\{a_n+3^n\}$ 是首项为 4，公比为 4 的等比数列，则 $a_n+3^n=4\times 4^{n-1}=4^n$，即 $a_n=4^n-3^n$. 对于选项 A，$a_2=4^2-3^2=7$，故 A 正确；对于选项 B，因为 $a_n=4^n-3^n>0$，所以 $\{S_n\}$ 是递增数列，故 B 正确；对于选项 C，因为数列 $\{a_n+3^n\}$ 是首项为 4，公比为 4 的等比数列，所以 $\{a_n+3^n\}$ 不是等差数列，故 C 错误；对于选项 D，$a_{10}=4^{10}-3^{10}=2^{20}-3^{10}$，故 D 正确. 故选 ABD.

12. $2+\ln n$ ［解析］$\because a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，$\therefore a_n-a_{n-1}=\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\ln\frac{n}{n-1}(n\geqslant 2)$，$\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n-1}{n-2}+\cdots+\ln\frac{3}{2}+\ln 2+2=2+\ln\left(\frac{n}{n-1}\times\frac{n-1}{n-2}\times\cdots\times\frac{3}{2}\times 2\right)=2+\ln n(n\geqslant 2)$. 显然 $a_1=2$ 满足上式，$\therefore a_n=2+\ln n$.

13. $(-\infty,2)$ ［解析］因为 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$，又因为 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $a_{n+1}-a_n>0$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $a_2-a_1=2-\lambda$ 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_{n+1}-a_n=(2-\lambda)\cdot 2^{n-1}$，所以 $(2-\lambda)\cdot 2^{n-1}>0$，即 $2-\lambda>0$，解得 $\lambda<2$，则 λ 的取值范围为 $(-\infty,2)$.

14. 解：因为 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，所以 $a_{n+1}a_n+2a_{n+1}=2a_n$，则 $\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}=1$，所以数列 $\left\{\frac{2}{a_n}\right\}$ 是以 1 为公差的等差数列，

又 $a_1=1$，所以 $\frac{2}{a_n}=2+(n-1)=n+1$，

所以 $a_n=\frac{2}{n+1}$.

15. 解：因为 $S_1=a_1=1$，所以 $\frac{S_1}{a_1}=1$，

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，所以 $\frac{S_n}{a_n}=1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n+2}{3}$，所以 $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$，所以 $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，则 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\cdots\times\frac{4}{2}\times\frac{3}{1}\times 1=\frac{n(n+1)}{2}$，

又 $a_1=1$ 满足上式，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

16. 解：(1)$\because a_1=1,a_2=5,a_3=11$，$\therefore\frac{a_3}{a_2}=\frac{11}{5}<3$，不满足“$G$ 型数列”的定义，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 不是“G 型数列”.

(2)①证明：$\because$ 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 为“G 型数列”，$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}>3$，$\therefore a_{n+1}-a_n>2a_n>0$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

②设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q,q\in\mathbf{N}^*$，又数列 $\{b_n\}$ 不是“G 型数列”，$\therefore q\leqslant 3$，可得 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}+2}{a_n+2}=q$，即得 $a_{n+1}=qa_n+2q-2$. 又数列 $\{a_n\}$ 为“G 型数列”，

$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=q+\frac{2q-2}{a_n}>3$.

由①知 $\{a_n\}$ 为递增数列，因此当 n 趋向于正无穷大时，$q+\frac{2q-2}{a_n}$ 趋近于 q，可得 $q\geqslant 3$. 综上可得 $q=3$，即 $a_{n+1}=3a_n+4$，可得 $a_{n+1}+2=3(a_n+2)$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n+2\}$ 是以 $a_1+2=3$ 为首项，公比为 3 的等比数列，

则 $a_n+2=3\times 3^{n-1}=3^n$，即 $a_n=3^n-2$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^n-2$.

第 37 讲　等差数列及其前 n 项和

1. B ［解析］设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_7-a_4=2a_1$，所以 $3d=2a_1$，又 $a_2=10$，则 $a_1+d=a_1+\frac{2}{3}a_1=10$，解得 $a_1=6,d=4$，所以 $a_7=a_1+6d=6+24=30$. 故选 B.

2. A ［解析］因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_{10}=S_{20}=100$，所以 $\begin{cases}10a_1+45d=100,\\20a_1+190d=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{29}{2},\\d=-1,\end{cases}$ 则 $S_{40}=40\times\frac{29}{2}+\frac{40\times 39}{2}\times(-1)=-200$. 故选 A.

3. B ［解析］若 $a_2+a_6=2a_4$，则数列 $\{a_n\}$ 不一定是等差数列，如数列 1,2,1,4,1,6,1,1,…；若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则由等差中项可知 $a_2+a_6=2a_4$. 所以“$a_2+a_6=2a_4$”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的必要不充分条件. 故选 B.

4. A ［解析］$\because\{a_n\}$ 是等差数列，$\therefore a_3+a_9=2a_6=14$，即 $a_6=7$，$\therefore a_7=\frac{a_6a_7}{a_6}=9$，故公差 $d=a_7-a_6=2$，$\therefore a_1=a_6-5d=-3$，$\therefore S_7=7\times(-3)+\frac{6\times 7}{2}\times 2=21$，故选 A.

5. C ［解析］未使用时，可认为外层卫生纸的长度为 $a_1=2\pi\times 45=90\pi$，可认为每层纸的长度构成等差数列，使用一段时间后，相当于等差数列的项数为 $n=\frac{45-30}{0.1}=150$，且 $a_{150}=2\pi\times 30=60\pi$. 由等差数列的求和公式得 $S_{150}=\frac{150\times(90\pi+60\pi)}{2}=11\ 250\pi\approx 35\ 325(\text{mm})=35.325(\text{m})$，故选 C.

6. A ［解析］因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_5=5$，所以 $a_n=5+(n-5)d$，又数列 $\{S_n\}$ 为递增数列，所以 $\{a_n\}$ 从第二项开始各项均为正数. 由 $a_2=5+(2-5)d>0$，得 $d<\frac{5}{3}$. 因为 $a_n>0(n\geqslant 2)$ 恒成立，所以数列 $\{a_n\}$ 为常数数列或递增数列，所以 $d\geqslant 0$. 综上，$d\in\left[0,\frac{5}{3}\right)$. 故选 A.

7. 38 ［解析］该阶梯大教室的座位数按照从小到大的顺序依次成等差数列，且首项为 5，公差为 3，所以 $a_n=5+(n-1)\times 3=3n+2$. 设该阶梯大教室共有 n 排，则 $5n+\frac{n(n-1)}{2}\times 3=258$，整理得 $(3n+43)(n-12)=0$，因为 $n>0$，所以 $n=12$，所以该阶梯大教室最后一排的座位数为 $5+(12-1)\times 3=38$.

8. B ［解析］设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $S_{30}=(a_1+a_4+\cdots+a_{28})+(a_2+a_5+\cdots+a_{29})+(a_3+a_6+\cdots+a_{30})=(a_3+a_6+\cdots+a_{30})-20d+(a_3+a_6+\cdots+a_{30})-10d+(a_3+a_6+\cdots+a_{30})=180-30d$，即 $120=180-30d$，解得 $d=2$. 又 $S_{30}=30a_1+\frac{30\times 29}{2}\times 2=120$，解得 $a_1=-25$，所以 $a_n=-25+(n-1)\times 2=2n-27$，故选 B.

9. A ［解析］设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$，则 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)d}{2}$，则 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{nd}{2}-a_1-$

$\frac{(n-1)d}{2}=\frac{d}{2}$，故$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是公差为$\frac{d}{2}$的等差数列，又$\frac{S_7}{7}=1$，$\frac{S_{15}}{15}=5$，所以$8\times\frac{d}{2}=\frac{S_{15}}{15}-\frac{S_7}{7}=5-1=4$，解得$d=1$，又$7a_1+21d=7$，所以$a_1=-2$，故$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为$-2$，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，所以$T_n=-2n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n^2-9n}{4}$. 故选A.

10. ABD ［解析］设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，所以$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$. 对于A，由$a_n=dn+a_1-d$，则$a_{2n-1}=d(2n-1)+a_1-d=2dn+a_1-2d$，所以$a_{2n+1}-a_{2n-1}=2d$，即数列$\{a_{2n-1}\}$是公差为$2d$的等差数列，故A正确；对于B，由$a_n=dn+a_1-d$，所以$2a_n-1=2dn+2a_1-2d-1$，则$(2a_{n+1}-1)-(2a_n-1)=[2d(n+1)+2a_1-2d-1]-(2dn+2a_1-2d-1)=2d$，所以数列$\{2a_n-1\}$是公差为$2d$的等差数列，故B正确；对于C，由$a_n=dn+a_1-d$，可得$\frac{a_n}{n}=\frac{dn+a_1-d}{n}=d+\frac{a_1-d}{n}$，当$a_1-d\geqslant 0$时，数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$不是递增数列，故C不正确；对于D，由$a_n=dn+a_1-d$，可得$a_n+3nd=4dn+a_1-d$，所以$[a_{n+1}+3d(n+1)]-(a_n+3nd)=4d>0$，所以数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列，故D正确. 故选ABD.

11. ABD ［解析］$\because S_{2023}>0$，$S_{2024}<0$，$\therefore\frac{2023(a_1+a_{2023})}{2}=\frac{2023\times 2a_{1012}}{2}=2023a_{1012}>0$，$\frac{2024(a_1+a_{2024})}{2}=\frac{2024\times(a_{1012}+a_{1013})}{2}=1012(a_{1012}+a_{1013})<0$，$\therefore a_{1012}>0$，$a_{1012}+a_{1013}<0$，$\therefore a_{1012}>0$，$a_{1013}<0$，且$|a_{1012}|<|a_{1013}|$，B中结论错误；由上述易得公差$d<0$，$\therefore$等差数列$\{a_n\}$是递减数列，A中结论错误；$\because a_{1012}>0$，$a_{1013}<0$，$\therefore$当$n=1012$时，$S_n$取得最大值，C中结论正确；对于D选项，$S_{1013}=S_{1010}+a_{1011}+a_{1012}+a_{1013}=S_{1010}+3a_{1012}>S_{1010}$，D中结论错误. 故选ABD.

12. $\frac{11}{27}$ ［解析］因为$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+2}{5n+3}$，且$\frac{S_{21}}{T_{21}}=\frac{\frac{21(a_1+a_{21})}{2}}{\frac{21(b_1+b_{21})}{2}}=\frac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\frac{2a_{11}}{2b_{11}}=\frac{a_{11}}{b_{11}}$，所以由等差数列前$n$项和的性质得$\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\frac{2a_{11}}{2b_{11}}=\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{S_{21}}{T_{21}}=\frac{2\times 21+2}{5\times 21+3}=\frac{11}{27}$.

13. $4n-2$（答案不唯一） ［解析］若$\{a_n\}$为等差数列，设公差为d，则$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，则$\sqrt{S_n}=\sqrt{\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n}$，若$\{\sqrt{S_n}\}$也为等差数列，则$a_1-\frac{d}{2}=0$，即$d=2a_1$，且$d\geqslant 0$，取$a_1=2$，则$d=4$，此时$a_n=4n-2$，$\{a_n\}$具有性质$P$. 故$a_n=4n-2$（答案不唯一）.

14. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}5a_1+10d+5(a_1+8d)=0,\\ a_1+3d=(a_1+4d)(a_1+6d),\end{cases}$因为$d\neq 0$，所以$a_1=-10$，$d=2$，所以$a_n=2n-12$.

(2)$S_n=\frac{-10+2n-12}{2}\times n=n^2-11n$，由$S_n<a_n$得$n^2-11n<2n-12$，即$n^2-13n+12<0$，解得$1<n<12$，因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以使$S_n<a_n$成立的$n$的最大值是11.

15. 解：(1)由题意，设等差数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的公差为$d$，又$\frac{S_1}{1}=8$，$\frac{S_4}{4}=5$，$\therefore 3d=5-8=-3$，$\therefore d=-1$，$\therefore\frac{S_n}{n}=8+(n-1)\times(-1)=9-n$，$\therefore S_n=-n^2+9n$，则$S_{n-1}=-(n-1)^2+9(n-1)=-n^2+11n-10$，$n\geqslant 2$，$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=-2n+10$，$n\geqslant 2$，又$a_1=8$符合上式，$\therefore a_n=-2n+10$.

(2)由(1)得，$a_1>a_2>\cdots>a_5=0>a_6>\cdots$，当$n\leqslant 5$时，$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(8+10-2n)}{2}=-n^2+9n$，当$n\geqslant 6$时，$T_n=a_1+a_2+\cdots+a_5-a_6-a_7-\cdots-a_n=2S_5-S_n=2\times(-5^2+5\times 9)-(-n^2+9n)=n^2-9n+40$，$\therefore T_n=\begin{cases}-n^2+9n,n\leqslant 5,\\ n^2-9n+40,n\geqslant 6.\end{cases}$

16. ACD ［解析］设等差数列2，5，8，11，14，…的通项公式为$b_n=3n-1$. 数阵中前7行共$1+2+3+\cdots+7=28$(个)数，所以数阵中前7行所有数的和为$2\times 28+\frac{28\times 27\times 3}{2}=1190$，故A正确. 令$b_n=3n-1=101$，解得$n=34$，前7行共28个数，第8行有8个数，所以101是数阵中第8行从左至右的第6个数，故B错误. 记每一行的第1个数组成数列$\{a_n\}$，则$a_1=2$，$a_2-a_1=3$，$a_3-a_2=6=3\times 2$，$a_4-a_3=9=3\times 3$，…，$a_n-a_{n-1}=3\times(n-1)(n\geqslant 2)$，累加得$a_n-a_1=3\times(1+2+3+\cdots+n-1)=\frac{3n(n-1)}{2}(n\geqslant 2)$，所以$a_n=\frac{3n^2-3n+4}{2}(n\geqslant 2)$，则$a_{10}=137$，故C正确. 数阵中第10行从左至右的第4个数是$137+(4-1)\times 3=146$，故D正确. 故选ACD.

17. (1)3 (2)210 ［解析］(1)由题可知，$a_n=2^n<10$，又因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n\leqslant 3$，所以$b_{10}=3$. (2)由题可知$a_1\geqslant 1$，所以$B_1=\varnothing$，所以$b_1=0$. 若$a_1=m\geqslant 2$，则$B_2=\varnothing$，$B_{m+1}=\{1\}$，所以$b_2=0$，$b_{m+1}=1$，与$\{b_n\}$是等差数列矛盾，所以$a_1=1$. 设$d_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，因为$\{a_n\}$是各项均为正整数的递增数列，所以$d_n\in\mathbf{N}^*$. 假设存在$k\in\mathbf{N}^*$使得$d_k\geqslant 2$，设$a_k=t$，由$a_{k+1}-a_k\geqslant 2$得$a_{k+1}\geqslant t+2$. 由$a_k=t<t+1<t+2\leqslant a_{k+1}$，得$b_t<k$，$b_{t+1}=b_{t+2}=k$，与$\{b_n\}$为等差数列矛盾. 所以对任意$n\in\mathbf{N}^*$都有$d_n=1$，所以数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_n=1+(n-1)=n$，所以数列$\{a_n\}$的前20项和$S_{20}=\frac{20\times(1+20)}{2}=210$.

第38讲　等比数列及其前n项和

1. A ［解析］设数列$\{a_n\}$的公比为q，由题意可得$\begin{cases}a_1(1+q^2)=10,\\ a_1q(1+q^2)=20,\end{cases}$解得$\begin{cases}q=2,\\ a_1=2,\end{cases}$则$S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=-2\times(1-32)=62$. 故选A.

2. C ［解析］因为数列$\{a_n\}$为等比数列，且$a_2a_5=16$，所以$a_2a_5=a_3a_4=16$，所以$\log_2a_3+\log_2a_4=\log_2(a_3a_4)=\log_216=\log_22^4=4$，故选C.

3. D ［解析］设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$(a_1+a_3+a_5)q=a_2+a_4+a_6$，解得$q=2$. $S_{12}-S_6=a_7+a_8+\cdots+a_{12}=(a_1+a_2+\cdots+a_6)\times 2^6=3\times 2^6=192$. 故选D.

4. B ［解析］对数列$\{a_n\}$，$a_{n+1}=2a_n$，若$a_1=0$，则可得$a_2=a_3=\cdots=a_n=0$，此时$\{a_n\}$不是公比为2的等比数列；若$\{a_n\}$是公比为2的等比数列，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，即$a_{n+1}=2a_n$. 故“$a_{n+1}=2a_n$”是“$\{a_n\}$是公比为2的等比数列”的必要而不充分条件，故选B.

5. B ［解析］因为等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，所以S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$成等比数列，则$(S_8-S_4)^2=S_4\cdot(S_{12}-S_8)$，即$(8-S_4)^2=S_4\cdot(26-8)$，解得$S_4=32$或$S_4=2$. 设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$，则$q\neq 1$，$\frac{S_8}{S_4}=\frac{1-q^8}{1-q^4}=1+q^4>1$，则$S_8>S_4>0$，得$S_4=2$. 故选B.

6. 32 ［解析］因为$a_n\cdot a_{n+1}=2^n$，所以$a_{n+1}\cdot a_{n+2}=2^{n+1}$，两式相除得$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2$，故数列$\{a_{2k}\}$是公比为2的等比数列，由$a_2=2$，得$a_{10}=a_2\cdot 2^{5-1}=2^5=32$.

7. -3 ［解析］设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由$a_3a_5=a_2a_6$，$a_1a_3a_5=a_2a_6$，得$a_1=1$，由$a_1a_{13}=-27$，得$q^3\cdot q^{12}=q^{15}=-27$，所以$a_6=q^5=-3$.

8. B ［解析］由题意得$a_5=a_1q^4=5q^4$，$a_{15}=a_5+10d=5q^4+10d=240$. 当$q=1$时，$d$不是正整数；当$q=2$时，$d=16$；当$q\geqslant 3$时，$5q^4\geqslant 405$，$d$不是正整数. 所以$q=2$，$d=16$，所以该数列前5项的和为$\frac{5\times(1-2^5)}{1-2}=155$. 故选B.

9. C ［解析］设数列$\{a_n\}$的公比为q，由$a_3=a_1q^2\geqslant 1$，得$a_1>0$，则$a_5=a_1q^4>0$，所以$a_1+a_5\geqslant 2\sqrt{a_1a_5}=2a_3\geqslant 2$，当且仅当$a_1=a_5$，即$q^2=1$时取等号，故充分性成立；$a_1+a_5\geqslant 2$，即$\frac{a_3}{q^2}+a_3q^2\geqslant 2$，若$q^2=\frac{1}{2}$，则$a_3\geqslant\frac{4}{5}$，故必要性不成立. 故选C.

10. BCD ［解析］当$a_n=0$时，满足$a_5^2=a_3a_7$，但$\{a_n\}$不是等比数列，故A错误. 由等比数列的性质可知$a_5^2=a_3a_7$，故B正确. 由$S_n=3^n-1$，得$S_{n-1}=3^{n-1}-1$，则$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times 3^{n-1}(n\geqslant 2)$，当$n=1$时，$a_1=S_1=2$，则$a_n=2\times 3^{n-1}$，从而可知$\{a_n\}$是等比数列，故C正确. 由$S_n=3^n+a$，得$a_1=3+a$，$S_2=9+a$，$S_3=27+a$，由等比数列的性质可知$a_2^2=a_1a_3$，又$a_2=S_2-S_1=6$，$a_3=S_3-S_2=18$，所以$6^2=18(3+a)$，解得$a=-1$，结合C选项可知此时$\{a_n\}$为等比数列，故D正确. 故选BCD.

11. BCD ［解析］若$T_8=T_{12}$，则$\frac{T_{12}}{T_8}=a_9a_{10}a_{11}a_{12}=(a_{10}a_{11})^2=1$，可得$a_{10}a_{11}=\pm 1$，即选项A错误. 而$T_{20}=a_1a_2\cdots a_{19}a_{20}=(a_{10}a_{11})^{10}=1$，即选项B正确. 若$a_1=1024$，且$T_{10}$是数列$\{T_n\}$中唯一最大项，当$q<0$时，$T_{10}=a_1a_2\cdots a_9a_{10}=(a_1a_{10})^5=(a_1a_1q^9)^5<0$，不合题意；当$q>0$时，由$\begin{cases}T_{10}>T_9,\\ T_{10}>T_{11},\end{cases}$可得$\begin{cases}a_{10}>1,\\ a_{11}<1,\end{cases}$即$\begin{cases}1024q^9>1,\\ 1024q^{10}<1,\end{cases}$解得$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{9}}<q<\frac{1}{2}$，即选项C正确. 若$T_{10}>T_{11}>T_9$，当$q<0$时，$T_9=a_1a_2\cdots a_9=a_1(a_2a_9)^4=a_1(a_1a_1q^9)^4>0$，$T_{10}<0$，不满足$T_{10}>T_9$，不合题意；当$q>0$时，

由 $\begin{cases}T_{10}>T_{11},\\T_{10}>T_9,\\T_{11}>T_9,\end{cases}$ 可得 $a_{11}<1$，$a_{10}>1$，$a_{10}a_{11}>1$，所以 $a_1>0$，$1>q>0$，则 $\{a_n\}$ 为递减数列，因此当 $n\leqslant 10$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n>1$，当 $n>10$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n<1$，因此当 $n\leqslant 10$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\{T_n\}$ 为递增数列，当 $n>10$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\{T_n\}$ 为递减数列，又 $T_1>1$，$T_{20}=a_1a_2\cdots a_{20}=(a_{10}a_{11})^{10}>1$，$T_{21}=a_1a_2\cdots a_{21}=(a_{11})^{21}<1$，所以使得 $T_n>1$ 成立的 n 的最大值为 20，即选项 D 正确. 故选 BCD.

12. 2 ［解析］依题意，$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}=85$，即 $a_2q+a_4q+\cdots+a_{2n}q=84$，而 $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=42$，所以 $q=2$.

13. 20 ［解析］由 $S_6-2S_3=5$，得 $S_6-S_3=S_3+5$. 因为 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，所以 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 也成等比数列，所以 $(S_6-S_3)^2=S_3\times(S_9-S_6)$，则 $S_9-S_6=\dfrac{(S_3+5)^2}{S_3}=\dfrac{S_3^2+10S_3+25}{S_3}=S_3+\dfrac{25}{S_3}+10\geqslant 2\sqrt{S_3\times\dfrac{25}{S_3}}+10=20$，当且仅当 $S_3=\dfrac{25}{S_3}$，即 $S_3=5$ 时取等号，又 $S_9-S_6=a_7+a_8+a_9$，所以 $a_7+a_8+a_9$ 的最小值为 20.

14. 解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q. 由题设得 $a_1q+a_1q^3=20$，$a_1q^2=8$，解得 $q=\dfrac{1}{2}$（舍去），$q=2$. 由题设得 $a_1=2$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$.

(2) 由题设及 (1) 知 $b_1=0$，且当 $2^n\leqslant m<2^{n+1}$ 时，$b_m=n$，所以 $S_{100}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{63})+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{100})=0+1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+5\times 2^5+6\times(100-63)=480$.

15. 解：(1) 证明：因为 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{3a_n}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3a_n}$，所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3a_n}-1=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$，又 $\dfrac{1}{a_1}-1=\dfrac{5}{3}-1=\dfrac{2}{3}$，所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以 $\dfrac{2}{3}$ 为首项，$\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

(2) 由 (1) 知 $\dfrac{1}{a_n}-1=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，得 $\dfrac{1}{a_n}=2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1$，所以 $S_n=2\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]+n=2\times\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}+n=1-\dfrac{1}{3^n}+n$.

16. AD ［解析］对于 A，因为 $a_{n+1}a_n=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^n=(-1)^{2n+1}=-1$，所以数列 $\{(-1)^n\}$ 是 2 级等积数列，故 A 正确；对于 B，设 $a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n=\sin\dfrac{(n+4)\pi}{4}\sin\dfrac{(n+3)\pi}{4}\sin\dfrac{(n+2)\pi}{4}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}=f(n)$，若数列 $\left\{\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}\right\}$ 是 4 级等积数列，则 $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{a_{n+4}}{a_n}=1$，但 $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{a_{n+4}}{a_n}=\dfrac{\sin\dfrac{(n+5)\pi}{4}}{\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}}=\dfrac{\sin\left[\dfrac{(n+1)\pi}{4}+\pi\right]}{\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}}=-1\neq 1$，矛盾，故 B 错误；对于 C，由题意，若 $\{a_n^2\}$ 为 k 级等积数列，则 $\dfrac{a_{n+k}^2}{a_n^2}=1$，即 $\dfrac{a_{n+k}}{a_n}=1$ 或 $\dfrac{a_{n+k}}{a_n}=-1$，所以 $\{a_n\}$ 不一定是 k 级等积数列，故 C 错误；对于 D，由题意，若 $\{a_n\}$ 为 k 级等积数列，则 $\dfrac{a_{n+k}}{a_n}=1$，从而 $\dfrac{a_{n+k}^3}{a_n^3}=1^3=1$，所以 $\{a_n^3\}$ 也是 k 级等积数列，故 D 正确. 故选 AD.

17. 50 ［解析］记第 n 个正方形的面积为 S_n，第 n 个正方形的边长为 a_n，则第 n 个正方形的对角线长为 $\sqrt{2}a_n$，所以第 $n+1$ 个正方形的边长为 $a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_n$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=5$，公比为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n=5\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$，所以 $S_n=a_n^2=25\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{25\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{25\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，所以数列 $\{S_n\}$ 是首项为 $S_1=25$，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $S_1+S_2+\cdots+S_n=\dfrac{25\times\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=50\times\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$，所以若这个作图过程可以一直继续下去，则所有正方形的面积之和将趋近于常数 50.

第 39 讲　数列求和

1. A ［解析］因为 $a_n=(-1)^{n-1}(4n-3)$，所以 $S_6=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)=(1-5)+(9-13)+(17-21)=3\times(-4)=-12$，故选 A.

2. B ［解析］因为 $a_n=\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，所以 $S_9=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right)=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$，故选 B.

3. C ［解析］$\because a_n=\begin{cases}2n-1,n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*,\\5n+1,n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ $\therefore S_{10}=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=(1+5+9+13+17)+(11+21+31+41+51)=45+155=200$. 故选 C.

4. A ［解析］$S_7=a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3+a_4+b_4+a_5+b_5+a_6+b_6+a_7+b_7=a_1+b_1+(a_2+b_3)+(b_2+a_3)+(a_4+b_5)+(b_4+a_5)+(a_6+b_7)+(b_6+a_7)=1+1+2\times 2+2^2+2\times 4+2^4+2\times 6+2^6=2+4+4+8+16+12+64=110$. 故选 A.

5. B ［解析］由 $S_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{n+2}{2^n}$，得 $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$，两式相减可得 $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\dfrac{1}{2^2}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}=2-\dfrac{n+4}{2^{n+1}}$，所以 $S_n=4-\dfrac{n+4}{2^n}$，因为 $\dfrac{n+4}{2^n}>0$，所以 $4-\dfrac{n+4}{2^n}<4$，即 $S_n<4$ 恒成立，故 $k\geqslant 4$. 故选 B.

6. $2^{n+1}-2-n$ ［解析］因为 $a_n=1+2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=(2-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^n-1)=(2+2^2+\cdots+2^n)-(1+1+\cdots+1)=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$.

7. 2 ［解析］因为 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=(-1)^n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$，所以 $S_8=a_1+a_2+\cdots+a_8=-(\sqrt{2}+\sqrt{1})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\cdots-(\sqrt{8}+\sqrt{7})+(\sqrt{9}+\sqrt{8})=\sqrt{9}-\sqrt{1}=2$.

8. C ［解析］因为 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=2$，$2024=3\times 674+2$，所以 $a_3+a_4+a_5=2$，$a_6+a_7+a_8=2$，$a_9+a_{10}+a_{11}=2$，…，$a_{2022}+a_{2023}+a_{2024}=2$，又 $S_{2024}=a_1+a_2+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+\cdots+(a_{2022}+a_{2023}+a_{2024})$，$a_1=2$，$a_2=4$，所以 $S_{2024}=2+4+674\times 2=1354$. 故选 C.

9. D ［解析］数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，由 $a_{n+1}\cdot a_n=2^n$，得 $a_2=2$，$a_{n+2}\cdot a_{n+1}=2^{n+1}$，则有 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=2$，因此数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $S_{2024}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2023})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2024})=\dfrac{1-2^{1012}}{1-2}+\dfrac{2(1-2^{1012})}{1-2}=3\times 2^{1012}-3$. 故选 D.

10. C ［解析］依题意可得 $a_{n+1}=2a_n+1$（$n\in\mathbf{N}^*$），所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)>0$，即 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，故数列 $\{a_n+1\}$ 为等比数列，其首项为 $a_1+1=2$，公比也为 2，所以 $a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$，所以 $na_n=n\cdot 2^n-n$，所以 $T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^n-(1+2+\cdots+n)=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^n-\dfrac{n(n+1)}{2}$. 令 $H_n=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$，则 $2H_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$，两式相减得 $-H_n=2^1+2^2+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$，所以 $H_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$，所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2-\dfrac{n(n+1)}{2}$. 故选 C.

11. BCD ［解析］由 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=\dfrac{\pi}{4}$，公差为 $\dfrac{\pi}{2}$，得 $a_n=\dfrac{\pi}{4}+(n-1)\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}(2n-1)$，$S_n=n\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{n^2}{4}\pi$，则 $b_n=\tan a_n=\tan\left(\dfrac{n\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}1,n=2k-1,\\-1,n=2k\end{cases}$（$k\in\mathbf{Z}$）. 当 $n=1$ 时，$b_1=1$，故选项 A 不正确. 当 n 为偶数时，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=0$；当 n 为奇数时，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=1$，故 $b_1+b_2+b_3+\cdots+$

$b_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$，所以选项 B 正确. $c_n=a_nb_n=\begin{cases}a_n,n=2k-1,\\-a_n,n=2k\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，则 $c_{2k}+c_{2k-1}=-a_{2k}+a_{2k-1}=-\frac{\pi}{2}$. 当 n 为偶数时，$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=-\frac{n}{4}\pi$；当 n 为奇数时，$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=-\frac{n-1}{4}\pi+\frac{\pi}{4}(2n-1)=\frac{n}{4}\pi$，所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\frac{(-1)^{n-1}n}{4}\pi$，故选项 C 正确. $d_n=b_nS_n=\begin{cases}S_n,n=2k-1,\\-S_n,n=2k\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，$d_{2k-1}+d_{2k}=S_{2k-1}-S_{2k}=\frac{\pi}{4}[(2k-1)^2-(2k)^2]=-\frac{\pi}{4}(4k-1)$，所以 $d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{2n}=(d_1+d_2)+(d_3+d_4)+\cdots+(d_{2n-1}+d_{2n})=-\frac{\pi}{4}[3+7+\cdots+(4n-1)]=-\frac{\pi}{4}\times\frac{3+4n-1}{2}\times n=-\frac{\pi}{4}(2n^2+n)$，所以选项 D 正确. 故选 BCD.

12. 2023 ［解析］设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $\frac{1}{a_{m-1}a_m}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{m-1}}-\frac{1}{a_m}\right)$，可得 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_ma_{m-1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}}-\frac{1}{a_m}\right)=\frac{1}{d}\times\frac{a_m-a_1}{a_1a_m}=\frac{1}{d}\times\frac{(m-1)d}{a_1a_m}=\frac{m-1}{a_1a_m}=1011$，因为 $a_1a_m=2$，所以 $m=2023$.

13. $\frac{1012}{2025}$ ［解析］$\because a_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2+2n},n=2k-1,\\\sin\frac{n\pi}{4},n=2k\end{cases}(k\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore S_{2024}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2024}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{2023\times2025}+\sin\frac{2\pi}{4}+\sin\frac{4\pi}{4}+\sin\frac{6\pi}{4}+\sin\frac{8\pi}{4}+\cdots+\sin\frac{2024\pi}{4}$，$\therefore S_{2024}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2025}\right)\right]+253\left(\sin\frac{2\pi}{4}+\sin\frac{4\pi}{4}+\sin\frac{6\pi}{4}+\sin\frac{8\pi}{4}\right)$，$\therefore S_{2024}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2025}\right)+253\times[1+0+(-1)+0]=\frac{1012}{2025}$.

14. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d，数列$\{b_n\}$的公比为 q，由 $a_1=1,q=3,a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$，得$(1+d)-3b_1=(1+2d)-9b_1=27b_1-(1+3d)$，解得 $d=2,b_1=\frac{1}{3}$，

所以 $a_n=2n-1,b_n=3^{n-2}$.

(2)由(1)可得 $S_n=\frac{1}{2}n(1+2n-1)=n^2$，所以$\frac{1}{\sqrt{S_n}\sqrt{S_{n+1}}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $c_n=3^{n-2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $T_n=\frac{\frac{1}{3}(1-3^n)}{1-3}+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3^n-1}{6}+1-\frac{1}{n+1}=\frac{3^n}{6}+\frac{5}{6}-\frac{1}{n+1}$.

15. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由题设有 $\begin{cases}5a_1+10d=3(3a_1+3d),\\a_2=a_1+d=2a_1+3,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=4,\end{cases}$即 $a_n=4n-3$.

(2)由(1)及已知得 $c_n=a_nb_n=(4n-3)\cdot3^{n+1}$，则 $T_n=1\times3^2+5\times3^3+\cdots+(4n-3)\times3^{n+1}$①，

$3T_n=1\times3^3+5\times3^4+\cdots+(4n-7)\times3^{n+1}+(4n-3)\times3^{n+2}$②，

②－①得 $2T_n=-9-36(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})+(4n-3)\times3^{n+2}=-9-36\times\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}+(4n-3)\times3^{n+2}=45+(4n-5)\times3^{n+2}$，所以 $T_n=\left(2n-\frac{5}{2}\right)\times3^{n+2}+\frac{45}{2}$.

16. 解：(1)设递增的等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $d>0$，因为 $a_{n+1}^2-2a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=2a_{n+1}+2a_n$，

即$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$，因为 $a_1=2,d>0$，所以 $a_{n+1}+a_n>0$，所以 $a_{n+1}-a_n=2$，所以 $d=2$，

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times2=2n$.

(2)方法一：$T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}=(1-a_1)+(a_2+1)+\cdots+(1-a_{2n-1})+(a_{2n}+1)=-(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+n+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})+n=-\left[2n+\frac{n(n-1)}{2}\times4\right]+\left[4n+\frac{n(n-1)}{2}\times4\right]+2n=4n$.

方法二：$T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}=(1-a_1)+(a_2+1)+\cdots+(1-a_{2n-1})+(a_{2n}+1)=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})+n+n=2n+2n=4n$.

第 40 讲　数列的综合问题

1. C ［解析］$\because$数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，$\therefore a_1=a_2-2,a_4=a_2+4$，$\because a_1,a_2,a_4$ 成等比数列，$\therefore a_2^2=a_1a_4$，即 $a_2^2=(a_2-2)(a_2+4)$，解得 $a_2=4$，故选 C.

2. B ［解析］设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $B-A=15d=45$，所以 $d=3$. 因为 $2A=B+615$，所以 $2A=A+45+615$，则 $A=660$. 等差数列$\{a_n\}$的奇数项是以 a_1 为首项，$2d$ 为公差的等差数列，等差数列$\{a_n\}$的前 30 项中奇数项有 15 项，所以 $A=15a_1+\frac{15\times14}{2}\times6=660$，得 $a_1=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+3(n-1)=3n-1$. 故选 B.

3. C ［解析］因为$\{a_n\}$既是等差数列又是等比数列，且 $a_1=1$，所以 $a_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$(常数数列)，所以其前 2026 项和为 2026，故选 C.

4. B ［解析］因为 $a_1=1,2S_n=a_{n+1}a_n$，$a_1=S_1$，所以当 $n=1$ 时，可得 $a_2=2$，当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=a_na_{n-1}$，与 $2S_n=a_{n+1}a_n$ 相减可得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2(n\geqslant2)$，所以当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，数列$\{a_{2k-1}\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，则 $a_{2k-1}=2k-1$，当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，数列$\{a_{2k}\}$是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，则 $a_{2k}=2k$，所以当 n 为正整数时，$a_n=n$，则 $S_{20}=1+2+3+\cdots+20=210$. 故选 B.

5. A ［解析］数列$\{a_n\}$满足 $a_n=n$，在 a_n，a_{n+1} 之间插入 n 个 1，构成数列$\{b_n\}$：a_1，1，a_2，1，1，a_3，1，1，1，a_4，…，所以数列$\{b_n\}$中从 a_1 到 a_k 的项数为 $k+[1+2+\cdots+(k-1)]=k+\frac{(k-1)(1+k-1)}{2}=\frac{1}{2}k(k+1)$，当 $k=13$ 时，$\frac{1}{2}\times13\times14=91$，当 $k=14$ 时，$\frac{1}{2}\times14\times15=105$，因为 $a_k=k$，所以 $S_{100}=(a_1+a_2+\cdots+a_{13})+(100-13)\times1=\frac{(1+13)\times13}{2}+87=178$. 故选 A.

6. 5 ［解析］由 $T_k\in\left(-\frac{1}{1000},0\right)$，可得 $|T_k|<\frac{1}{1000}$，易知 $|a_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$|T_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$，当 $n\geqslant4$ 时，$|T_n|<\frac{1}{1000}$，又 n 为偶数时，$T_n>0$，n 为奇数时，$T_n<0$，所以满足 $T_k\in\left(-\frac{1}{1000},0\right)$ 的正整数 k 的最小值为 5.

7. 7,8 ［解析］设 n 月份的需求量为 a_n，因为 $S_n=\frac{n}{90}(21n-n^2-5)(n=1,2,\cdots,12)$，所以当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1}{6}$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{90}(21n-n^2-5)-\frac{n-1}{90}[21(n-1)-(n-1)^2-5]=\frac{-3n^2+45n-27}{90}$，由 $a_n>1.5$，可得 $n^2-15n+54<0$，解得 $6<n<9$，可知当 $n=7$ 或 8 时需求量超过 1.5 万件.

8. B ［解析］设九枚“环权”的重量(铢)按从小到大的顺序构成数列$\{a_n\}$，可得 $a_1=1,a_9=192$，由 $a_3,a_4,\cdots,a_9$ 成等比数列，公比为 2，得 $a_9=a_3\times2^6=192$，可得 $a_3=3$，所以 $a_n=3\cdot2^{n-3},3\leqslant n\leqslant9$，$n\in\mathbf{N}^*$. 由 a_1,a_2,a_3 成等差数列，可得公差 $d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=1$，所以 $a_n=n,n\leqslant3,n\in\mathbf{N}^*$，所以需要放置一枚 2 两，一枚 12 铢，一枚 1 铢的“环权”，故选 B.

9. C ［解析］设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q $(q\neq1)$，则 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=7$，$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=63$，解得 $q=2$，$a_1=1$，$\therefore a_n=2^{n-1}$，$S_{2n}=2^{2n}-1$. 关于 n 的不等式 $S_{2n}-ta_n+33\geqslant0$ 即为 $2^{2n}-t\times2^{n-1}+32\geqslant0$，即 $t\leqslant2^{n+1}+\frac{32}{2^{n-1}}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

方法一：设 $f(n)=2^{n+1}+\frac{32}{2^{n-1}},n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(n+1)-f(n)=2^{n+2}+\frac{32}{2^n}-\left(2^{n+1}+\frac{32}{2^{n-1}}\right)=2^{n+1}-\frac{32}{2^n}$，当 $n=2$ 时，$f(n+1)-f(n)=0$，当 $n=1$ 时，$f(n+1)-f(n)<0$，当 $n\geqslant3$ 时，$f(n+1)-f(n)>0$，又 $f(2)=f(3)=24$，$\therefore$ 当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，$f(n)$ 取得最小值 24，$\therefore t\leqslant24$，$\therefore t_{\max}=24$. 故选 C.

方法二：由 $2^{n+1}+\frac{32}{2^{n-1}}\geqslant2\sqrt{2^{n+1}\cdot\frac{32}{2^{n-1}}}=16\sqrt{2}$，当且仅当 $2^{n+1}=\frac{32}{2^{n-1}}$，即 $n=\frac{5}{2}$ 时等号成立，又 $n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore$ 当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，$2^{n+1}+\frac{32}{2^{n-1}}$ 取得最小值 24，$\therefore t\leqslant24$，$\therefore t_{\max}=24$. 故选 C.

10. BC ［解析］对于A，取$a_n=2^n$，$b_n=1$，此时$a_n+b_n=2^n+1$，显然$\{2^n+1\}$不是等比数列，故A错误；对于B，C，设$a_n=a_1p^{n-1}$，$b_n=b_1q^{n-1}$，则$a_n\cdot b_n=a_1b_1(pq)^{n-1}$，$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1}{b_1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}$，显然$\{a_n\cdot b_n\}$和$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$均为等比数列，故B，C均正确；对于D，取$a_n=b_n=2^{n-1}$，此时$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2=2$，$a_3=b_3=4$，数列$\{a_n^{b_n}\}$的前3项为1，4，256，不可能为等比数列的前3项，故D错误．故选BC．

11. CD ［解析］由$\{a_n\}$为等比数列，其前n项和$S_n=2^{n+1}+m=2\cdot2^n+m$，则$m=-2$，故A不正确．由$S_n=2^{n+1}-2$得$S_{n-1}=2^n-2(n\geqslant2)$，所以$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n(n\geqslant2)$，又$\{a_n\}$为等比数列，所以$a_n=2^n$，由$f(n)=a_n+\frac{36}{a_n}=2^n+\frac{36}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，令$t=2^n$，可得$y=t+\frac{36}{t}$，当$t=4$，即$n=2$时，$y=13$，当$t=8$，即$n=3$时，$y=12.5$，则$f(n)_{\min}=f(3)=12.5$，故B不正确．由$b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\cdots+\frac{b_n}{n}=n$，可得$\frac{b_n}{n}=1$，则$b_n=n$，若$ta_n>b_n-2$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，则$t\cdot2^n>n-2$，即$t>\frac{n-2}{2^n}$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，令$g(n)=\frac{n-2}{2^n}$，则$g(n+1)-g(n)=\frac{n-1}{2^{n+1}}-\frac{n-2}{2^n}=\frac{-n+3}{2^{n+1}}$，当$1\leqslant n\leqslant2$时，$g(n+1)>g(n)$，当$n=3$时，$g(3)=g(4)$，当$n\geqslant4$时，$g(n+1)<g(n)$，则$g(n)_{\max}=g(3)=g(4)=\frac{1}{8}$，则$t>\frac{1}{8}$，故C正确．$c_n=\frac{a_n(1-b_n)}{b_nb_{n+1}}=\frac{2^n(1-n)}{n(n+1)}=\frac{2^n}{n}-\frac{2^{n+1}}{n+1}$，则$T_n=\frac{2}{1}-\frac{2^2}{2}+\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}-\frac{2^{n+1}}{n+1}=2-\frac{2^{n+1}}{n+1}<2$，故D正确．故选CD．

12. $\frac{1}{16}$ ［解析］将$a_3=2S_2+1$与$a_4=2S_3+1$作差，可得$a_4-a_3=2a_3$，即$a_4=3a_3$，所以等比数列$\{a_n\}$的公比$q=\frac{a_4}{a_3}=3$．因为$a_1=1$，$q=3$，所以$a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$，所以$b_n=\log_3a_n=\log_33^{n-1}=n-1$，所以$\frac{b_n+1}{(n+9)(b_n+2)}=\frac{n}{(n+9)(n+1)}=\frac{1}{n+\frac{9}{n}+10}$．因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n+\frac{9}{n}\geqslant6$，当且仅当$n=3$时等号成立，所以$\frac{b_n+1}{(n+9)(b_n+2)}=\frac{1}{n+\frac{9}{n}+10}\leqslant\frac{1}{16}$，故$k$的最小值为$\frac{1}{16}$．

13. 2026 ［解析］设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则$S_n=\log_2\frac{1+2}{1+1}+\log_2\frac{2+2}{2+1}+\cdots+\log_2\frac{n+2}{n+1}=\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{n+2}{n+1}=\log_2\frac{n+2}{2}=\log_2(n+2)-\log_22=\log_2(n+2)-1$．所以$S_k=\log_2(k+2)-1$，因为$S_k$为正整数，所以$\log_2(k+2)-1>0$，即$k+2>2$，可得$k>0$．令$m=\log_2(k+2)$，则$k=2^m-2$，因为$k\in[1,2023]$，所以$2^m\in[3,2025]$，$m\in\mathbf{N}^*$，因为$y=2^x$为增函数，且$2^1=2$，$2^2=4$，…，$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$，所以$m\in[2,10]$，$m\in\mathbf{N}^*$，所以所有“好数”的和为$2^2-2+2^3-2+\cdots+2^{10}-2=\frac{2^2-2^{10}\times2}{1-2}-2\times9=2026$．

14. 解：(1)设$\{a_n\}$的公差为d，

由$\begin{cases}a_3=7,\\a_5+a_6=29,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1+2d=7,\\2a_1+9d=29,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=3,\end{cases}$所以$a_n=1+3(n-1)=3n-2$．

(2)由(1)可知$a_1=1$，$a_2=4$，则$a_1+b_1=1$，$a_2+b_2=2$，因为$\{b_n+a_n\}$是等比数列，所以公比为$\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}=\frac{2}{1}=2$，所以$b_n+a_n=2^{n-1}$，所以$b_n=2^{n-1}-(3n-2)=2^{n-1}+2-3n$，所以$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+2n-\frac{3n(n+1)}{2}=2^n-1-\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$．

15. 解：(1)方法一(从终值来考虑)：若全款购置，则25万元10年后的价值为$25(1+2.5\%)^{10}\approx32.00$(万元)．

若分期付款，每年年初所付金额为3万元，10年后的总价值为$S=3(1+2.5\%)^{10}+3(1+2.5\%)^9+\cdots+3(1+2.5\%)\approx34.44$(万元)．因此付全款较好，即方案一更好．

方法二(从现值来考虑)：每年年初付款3万元，10年后现值之和为$A=3+\frac{3}{1+2.5\%}+\frac{3}{(1+2.5\%)^2}+\cdots+\frac{3}{(1+2.5\%)^9}$，可得$1.025^{10}A=3\times1.025\times\frac{1-1.025^{10}}{1-1.025}$，故$A\approx\frac{3\times41\times0.28}{1.28}\approx26.91$(万元)，

比一次性付全款多，故方案一更好．

(2)设第十年房租到期后小明所获得全部租金的终值为T万元，

则$T=2\times(1+2.5\%)^{10}+2.1\times(1+2.5\%)^9+\cdots+2.9\times(1+2.5\%)$，

记$1+2.5\%=q$，$a_n=-0.1n+3$，

则$T=a_1q+a_2q^2+\cdots+a_{10}q^{10}$，

则$qT=a_1q^2+a_2q^3+\cdots+a_9q^{10}+a_{10}q^{11}$，两式作差可得$(1-q)T=2.9q-0.1(q^2+q^3+\cdots+q^{10})-2q^{11}$，故$(1-q)T=3q-0.1(q+q^2+q^3+\cdots+q^{10})-2q^{11}$，可得$T=3\cdot\frac{q}{1-q}-0.1\cdot\frac{q(1-q^{10})}{(1-q)^2}-2\cdot\frac{q^{11}}{1-q}\approx27.88$(万元)．

故预计第十年房租到期后小明所获得全部租金的终值为27.88万元．

16. 解：(1)证明：由$S_n=3a_n-2^n$知$a_1=S_1=3a_1-2$，得$a_1=1$．

由已知得$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(3a_{n+1}-2^{n+1})-(3a_n-2^n)=3a_{n+1}-3a_n-2^n$，

故$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+2^{n-1}$，得$a_{n+1}-2^{n+1}=\frac{3}{2}a_n+2^{n-1}-2^{n+1}=\frac{3}{2}a_n-3\cdot2^{n-1}=\frac{3}{2}(a_n-2^n)$，而$a_1-2^1=1-2=-1\neq0$，故数列$\{a_n-2^n\}$是首项为$-1$，公比为$\frac{3}{2}$的等比数列．

(2)根据(1)的结论有$a_n-2^n=-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，即$a_n=2^n-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，则$b_n=a_n+\lambda\cdot2^n-(\lambda+1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=(\lambda+1)\cdot2^n-(\lambda+2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，

由题知$b_{n+1}>b_n$恒成立，即$(\lambda+1)\cdot2^{n+1}-(\lambda+2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n>(\lambda+1)\cdot2^n-(\lambda+2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，

即$2(\lambda+1)\cdot2^n-(\lambda+2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n>(\lambda+1)\cdot2^n-\frac{2}{3}(\lambda+2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$，化简得到$3(\lambda+1)\cdot4^n>(\lambda+2)\cdot3^n$．

一方面，对该不等式取$n=1$，可得到$3(\lambda+1)\cdot4>(\lambda+2)\cdot3$，即$\lambda>-\frac{2}{3}$；

另一方面，若$\lambda>-\frac{2}{3}$，则$\lambda+1>0$，$4\lambda+4>\lambda+2$，故恒有$3(\lambda+1)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\geqslant3(\lambda+1)\cdot\frac{4}{3}=4\lambda+4>\lambda+2$，即$3(\lambda+1)\cdot4^n>(\lambda+2)\cdot3^n$．

所以$\lambda>-\frac{2}{3}$．

第41讲　双数列问题

1. D ［解析］因为数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列，而数列$\{b_n\}$是首项为1，公差为3的等差数列，所以这两个数列的公共项从小到大排列构成的新数列$\{c_n\}$是首项为1，公差为6的等差数列，故$c_n=1+(n-1)\times6=6n-5$．故选D．

2. B ［解析］设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，由$b_1=1$且$T_3=3$知，当$q=1$时，则$T_3=3b_1=3$，符合题意，则$b_n=1$，又$a_2+b_2=4$，所以$a_2=3$，所以$S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=9$；当$q\neq1$时，则$T_3=\frac{b_1(1-q^3)}{1-q}=3$，即$1+q+q^2=3$，解得$q=1$(舍去)或$q=-2$，所以$b_n=(-2)^{n-1}$，则$b_2=-2$，又$a_2+b_2=4$，所以$a_2=6$，所以$S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=18$．综上可得，$S_3=9$或18．故选B．

3. B ［解析］令数列1，7，15，27，45，71，107，…为数列$\{a_n\}$，于是$a_7=107$，依题意，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为6，8，12，18，26，36，…，于是$a_7-a_6=36$．数列$\{(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)\}$为2，4，6，8，10，…，是等差数列，$(a_8-a_7)-(a_7-a_6)=12$，则$a_8-a_7=(a_7-a_6)+12=36+12=48$，因此$a_8=a_7+48=107+48=155$，所以该数列的第8项为155．故选B．

4. C ［解析］将在a_k与a_{k+1}之间插入的k个相同的数看成一组，则插入的n组数共$\frac{n(n+1)}{2}$个，因为$\frac{12\times13}{2}=78$，$78+13+9=100$，所以数列$\{b_n\}$的前100项依次为1，$\underbrace{-1}_{1个}$，2，$\underbrace{2,2}_{2个}$，2^2，$\underbrace{-3,-3,-3}_{3个}$，$2^3$，…，$2^{11}$，$\underbrace{12,\cdots,12}_{12个}$，$2^{12}$，$\underbrace{-13,\cdots,-13}_{9个}$．

因为$-n^2+(n+1)^2=2n+1$，所以$-1+2^2-3^2+4^2-\cdots-11^2+12^2-9\times13=3+7+11+15+19+23-9\times13=\frac{(3+23)\times6}{2}-117=-39$，又数列$\{a_n\}$的前13项和为$a_1+a_2+\cdots+a_{13}=\frac{1\times(2^{13}-1)}{2-1}=2^{13}-1=2^{10}\times8-1=1024\times8-1=8191$，所以$T_{100}=8191-39=8152$．故选C．

5. ACD ［解析］对于B，依题意，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=2b_n+a_n$，则$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$，而$a_1+b_1=1$，因此数列$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为3的等比数列，则$a_n+b_n=3^{n-1}$，故B错误．又$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$，因此$a_n-b_n=a_1-b_1=1$，结合$a_n+b_n=3^{n-1}$，可得$a_n=\frac{3^{n-1}+1}{2}$，$b_n=\frac{3^{n-1}-1}{2}$．对于A，$a_4=$

$\frac{3^3+1}{2}=14$，故A正确；对于C，$\sum_{i=1}^{5}b_i=0+1+4+13+40=58$，故C正确；对于D，$a_1+\lambda b_1=1$，$a_2+\lambda b_2=2+\lambda$，$a_3+\lambda b_3=5+4\lambda$，由$\{a_n+\lambda b_n\}$为等比数列，得$(2+\lambda)^2=5+4\lambda$，解得$\lambda=1$或$\lambda=-1$，当$\lambda=1$时，$a_n+\lambda b_n=a_n+b_n=3^{n-1}$，显然数列$\{a_n+\lambda b_n\}$是等比数列，当$\lambda=-1$时，$a_n+\lambda b_n=a_n-b_n=1$，显然数列$\{a_n+\lambda b_n\}$是等比数列，因此当数列$\{a_n+\lambda b_n\}$是等比数列时，$\lambda=1$或$\lambda=-1$，故D正确．故选ACD.

6. ACD ［解析］对于A，$a_2=a_1+2=4$，$a_3=2a_2=8$，$a_4=a_3+4=12$，则$a_5=2a_4=24$，故A正确；对于B，由题意，$b_1=a_2=4$，当$n\geqslant 2$时，$b_n=a_{2n}=a_{2n-1}+(\sqrt{2})^{2n}=2a_{2n-2}+2^n=2b_{n-1}+2^n$，所以$\frac{b_n}{2^n}-\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}=1$，则$\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$是以1为公差，$\frac{b_1}{2}=2$为首项的等差数列，则$\frac{b_n}{2^n}=2+(n-1)=n+1$，则$b_n=(n+1)\cdot 2^n$，故B错误；对于C，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，即$T_n=2\times 2^1+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^n$，所以$2T_n=2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n+(n+1)\times 2^{n+1}$，两式相减得$-T_n=4+(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(n+1)\times 2^{n+1}=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\times 2^{n+1}=-n\times 2^{n+1}$，所以$T_n=n\cdot 2^{n+1}$，故C正确；对于D，$S_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=[a_2-(\sqrt{2})^2]+[a_4-(\sqrt{2})^4]+\cdots+[a_{2n}-(\sqrt{2})^{2n}]+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=2(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})-(2+2^2+\cdots+2^n)=2(b_1+b_2+\cdots+b_n)-\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2T_n+2-2^{n+1}=2n\times 2^{n+1}+2-2^{n+1}=2^{n+1}(2n-1)+2$，故D正确．故选ACD.

7. $\frac{4^{n-1}}{3}+\frac{2}{3}$ ［解析］设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq 0$，由已知得$a_{k_2}^2=a_{k_1}\cdot a_{k_3}$，$\therefore a_2^2=a_1\cdot a_6$，即$(a_1+d)^2=a_1\cdot(a_1+5d)$，得$3a_1=d$，于是在等比数列$a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3},\cdots,a_{k_n}$中，公比$q=\frac{a_{k_2}}{a_{k_1}}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{a_1+3a_1}{a_1}=4$．由$a_{k_n}$为数列$\{a_{k_n}\}$的第$n$项，知$a_{k_n}=a_{k_1}\cdot 4^{n-1}=a_1\times 4^{n-1}$；由$a_{k_n}$为数列$\{a_n\}$的第$k_n$项，知$a_{k_n}=a_1+(k_n-1)d=a_1(3k_n-2)$，$\therefore a_1\times 4^{n-1}=a_1(3k_n-2)$，故$k_n=\frac{4^{n-1}}{3}+\frac{2}{3}$．

8. 29 ［解析］由题意，数列$\{b_n\}$为$a_1,\underbrace{3,3}_{2^1\text{个}},a_2,\underbrace{3,\cdots,3}_{2^2\text{个}},a_3,\underbrace{3,\cdots,3}_{2^3\text{个}},a_4,\cdots$，在$a_1$到$a_5$之间3的个数为$2^1+2^2+2^3+2^4=30$，故数列$\{b_n\}$到$a_5$处共有35项，所以数列$\{b_n\}$前30项中含$a_1,a_2,a_3,a_4$及26个3，故$S_{29}=a_1+a_2+a_3+a_4+25\times 3=2+2^2+2^3+2^4-4+75=2+4+8+16-4+75=101$，而$S_{28}=S_{29}-3=98<100$，故使$S_n\geqslant 100$成立的$n$的最小值为29.

9. $(-1)^n\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ ［解析］$\because b_n=(-1)^n n^2$，$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^n\cdot n^2$．当$n$为偶数时，$T_n=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^n\cdot n^2=1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$；当$n$为奇数时，$T_n=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots+(-1)^n\cdot n^2=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-n^2=-1^2+(2^2-3^2)+(4^2-5^2)+\cdots+[(n-1)^2-n^2]=-\frac{n(n+1)}{2}$．故数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n=(-1)^n\cdot\frac{n(n+1)}{2}$.

10. 2　3985 ［解析］由题意，将数列$\{b_n\}$的各项按如下数阵排列：其中第n（$n\in\mathbf{N}^*$）行有$n+1$项，则该数阵中第n行最后一项对应数列$\{b_n\}$中第$2+3+4+\cdots+(n+1)=\frac{n(n+3)}{2}$项．因为$\frac{62\times 65}{2}=2015<2024<\frac{63\times 66}{2}=2079$，且$2024=2015+9$，所以$b_{2024}$位于数阵的第63行第9项，故$b_{2024}=2$．数列$\{b_n\}$的前2024项中，值为1的共63项，值为2的共$2024-63=1961$（项），因此$S_{2024}=1\times 63+2\times 1961=3985$.

1　2
1　2　2
1　2　2　2
1　2　2　2　2
…

11. 解：(1)设$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，由题意知$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=16,\\ a_2^2=a_1a_5,\end{cases}$即$\begin{cases}4a_1+6d=16,\\ (a_1+d)^2=a_1(a_1+4d),\end{cases}$即$\begin{cases}2a_1+3d=8,\\ d=2a_1,\end{cases}$可得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$所以$a_n=2n-1$.

(2)设数列$\{b_n\}$的前$2n$项中的奇数项之和为A，偶数项之和为B，则$A=2^{a_1}+2^{a_3}+\cdots+2^{a_{2n-1}}=2^1+2^5+\cdots+2^{4n-3}=\frac{2(1-16^n)}{1-16}=\frac{2-2^{4n+1}}{1-16}=\frac{2^{4n+1}-2}{15}$，

$B=\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_4a_6}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}a_{2n+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_6}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}}-\frac{1}{a_{2n+2}}\right)=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{2n+2}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{16n+12}$，

所以$T_{2n}=A+B=\frac{2^{4n+1}-2}{15}+\frac{1}{12}-\frac{1}{16n+12}=\frac{2^{4n+1}}{15}-\frac{1}{20}-\frac{1}{16n+12}$.

12. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，$\because a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$，$\therefore 1+d-q=1$，$1+2d-q^2=1$，解得$d=q=2$，

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$.

(2)证明：$\because b_{n+1}=2b_n\neq 0$，$\therefore$要证明$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$，即证明$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=2S_{n+1}\cdot b_n-S_nb_n$，即证明$S_{n+1}+a_{n+1}=2S_{n+1}-S_n$，即证明$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，

由数列的通项公式和前n项和的关系得$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，

$\therefore(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$.

13. 解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由题意知，当$n=1$时，$a_1q=2a_1+2$①，

当$n=2$时，$a_1q^2=2(a_1+a_1q)+2$②，

联立①②，解得$a_1=2$，$q=3$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\times 3^{n-1}$.

(2)由(1)知$a_n=2\times 3^{n-1}$，$a_{n+1}=2\times 3^n$，所以$a_{n+1}=a_n+(n+2-1)d_n$，所以$d_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{4\times 3^{n-1}}{n+1}$.

设数列$\{d_n\}$中存在不同的3项d_m,d_k,d_p（其中m,k,p成等差数列）成等比数列，则$d_k^2=d_m\cdot d_p$，

所以$\left(\frac{4\times 3^{k-1}}{k+1}\right)^2=\frac{4\times 3^{m-1}}{m+1}\times\frac{4\times 3^{p-1}}{p+1}$，

即$\left(\frac{4\times 3^{k-1}}{k+1}\right)^2=\frac{4^2\times 3^{m+p-2}}{(m+1)(p+1)}$，

又因为m,k,p成等差数列，所以$2k=m+p$，所以$(k+1)^2=(m+1)(p+1)$，化简得$k^2+2k=mp+m+p$，所以$k^2=mp$，又$2k=m+p$，所以$k=m=p$，与已知矛盾，所以在数列$\{d_n\}$中不存在不同的3项d_m,d_k,d_p成等比数列.

14. 解：(1)由A,B,C三点共线，设$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{BC}=m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$，化简得$\overrightarrow{OA}=(m+1)\overrightarrow{OB}-m\overrightarrow{OC}$，所以$\lambda=m+1$，$\mu=-m$，所以$\lambda+\mu=1$.

(2)由题设得$a_n+b_n=(\lambda+\mu)(a_{n-1}+b_{n-1})+2=a_{n-1}+b_{n-1}+2(n\geqslant 2)$，

即$c_n=c_{n-1}+2(n\geqslant 2)$，所以$\{c_n\}$是首项为$a_1+b_1=3$，公差为2的等差数列，其通项公式为$c_n=2n+1$.

(3)由题设得$a_n-b_n=(\lambda-\mu)(a_{n-1}-b_{n-1})=\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})(n\geqslant 2)$，

令$d_n=a_n-b_n$，则$d_n=\frac{1}{2}d_{n-1}(n\geqslant 2)$，所以$\{d_n\}$是首项为$a_1-b_1=1$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，其通项公式为$d_n=\frac{1}{2^{n-1}}$．由$\begin{cases}a_n+b_n=2n+1,\\ a_n-b_n=\frac{1}{2^{n-1}},\end{cases}$可得$a_n=\frac{1}{2^n}+n+\frac{1}{2}$.

培优专训（四）　数列中的交汇与创新问题

1. B ［解析］由一次函数$y=f(x)$的图象在坐标轴上的截距相等且不为零，可设$x+y=a(a\neq 0)$，又$f(x)$的图象经过点$P(1,-2)$，则$1+(-2)=a$，解得$a=-1$，所以$x+y=-1$，即$f(x)=-x-1$，可得$a_n=f(n)f(n+1)=(n+1)(n+2)$，则$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，则$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$，由$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{5}{11}$，解得$n=20$．故选B.

2. B ［解析］记第n行的第一个数为a_n，则$a_1=1$，$a_2=3=2a_1+1$，$a_3=8=2a_2+2$，$a_4=20=2a_3+4$，…，$a_n=2a_{n-1}+2^{n-2}$，$\therefore\frac{a_n}{2^{n-2}}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-3}}+1$，即$\left\{\frac{a_n}{2^{n-2}}\right\}$是以$\frac{a_1}{2^{-1}}=2$为首项，1为公差的等差数列，

$\therefore\frac{a_n}{2^{n-2}}=2+(n-1)\times 1=n+1$，$\therefore a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$，又每行比上一行的数字少1个，$\therefore$最后一行为第2018行，$\therefore M=a_{2018}=2019\times 2^{2016}$．故选B.

3. BC ［解析］对于A，由$a_n=n^2+n$，得$\Delta a_n=(n+1)^2+(n+1)-(n^2+n)=2n+2$，显然$\Delta a_n$有最小值4，无最大值，因此不存在$M>0$，使得$\Delta a_n<M$恒成立，A错误；对于B，由选项A知，$\Delta a_n=2n+2$，则$\Delta^2 a_n=2(n+1)+2-(2n+2)=2$，显然当$M>2$时，$\Delta^2 a_n<M$恒成立，B正确；对于C，由$\Delta b_n=(n+2)\cdot 2^{n-1}$，得$b_{n+1}-b_n=(n+2)\cdot 2^{n-1}$，当$n\geqslant 2$时，$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$，即$b_n=1+3\times 2^0+4\times 2^1+5\times 2^2+\cdots+(n+1)\times 2^{n-2}$，于是$2b_n=2\times 2^0+3\times 2^1+4\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-2}+(n+1)\times 2^{n-1}$，两式相减得$-b_n=1+1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}-(n+1)\times 2^{n-1}=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-(n+1)\times 2^{n-1}=-n\times 2^{n-1}$，因此$b_n=n\cdot 2^{n-1}$，显然$b_1=1$满足上式，则$b_n=n\cdot 2^{n-1}$，由$b_{n+1}-b_n=(n+2)\cdot 2^{n-1}>0$，得数列$\{b_n\}$是递增数列，$b_n$有最小值1，无最大值，从而对任意$M>0$，总存在$n\in$

$\mathbf{N}^*$，使得 $b_n>M$，C 正确；对于 D，$\Delta^2 b_n=(n+3)\cdot 2^n-(n+2)\cdot 2^{n-1}=(n+4)\cdot 2^{n-1}$，由选项 C 得 $\frac{\Delta^2 b_n}{b_n}=1+\frac{4}{n}$，显然数列 $\left\{1+\frac{4}{n}\right\}$ 是递减数列，$0<1+\frac{4}{n}\leqslant 5$，因此对任意 $M>0$，不存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $\frac{\Delta^2 b_n}{b_n}>M$ 成立，D 错误. 故选 BC.

4. 解：(1)因为 $7=1+2+2^2$，所以 $\varphi(7)=1+1+1=3$.

(2)证明：设 $2n+1=a_0+a_1\cdot 2+\cdots+a_k\cdot 2^k$，即 $\varphi(2n+1)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，则 $4n+3=2(2n+1)+1=1+a_0\cdot 2+a_1\cdot 2^2+\cdots+a_k\cdot 2^{k+1}$，所以 $\varphi(4n+3)=1+a_0+a_1+\cdots+a_k=\varphi(2n+1)+1$.

(3)因为 $3\cdot 2^n-1=2^{n+1}+2^n-1=2^{n+1}+1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$，所以 $\varphi(3\cdot 2^n-1)=n+1$，因此数列 $\{\varphi(3\cdot 2^n-1)\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{2+(n+1)}{2}\cdot n=\frac{n^2+3n}{2}$.

5. 解：(1)因为 $4\notin A$，$4\notin B$，所以 $4\notin A\cup B$，从而 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 不是无穷互补数列.

(2)因为 $a_4=16$，所以 $b_{16}=16+4=20$，所以数列 $\{b_n\}$ 的前 16 项和为 $(1+2+\cdots+20)-(2+2^2+2^3+2^4)=\frac{1+20}{2}\times 20-(2^5-2)=180$.

(3)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$d\in\mathbf{N}^*$，则 $a_{16}=a_1+15d=36$.

由 $a_1=36-15d\geqslant 1$，得 $d=1$ 或 2.

若 $d=1$，则 $a_1=21$，$a_n=n+20$，与“$\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列”矛盾；若 $d=2$，则 $a_1=6$，$a_n=2n+4$，$b_n=\begin{cases}n,n\leqslant 5,\\2n-5,n>5.\end{cases}$

综上，$a_n=2n+4$，$b_n=\begin{cases}n,n\leqslant 5,\\2n-5,n>5.\end{cases}$

6. 解：(1)由“杨辉三角”的定义可知，$a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=n$.

因为 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$，所以 $a_n=n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$，

上式对 $a_1=1$ 也成立，所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)证明：由题意可得 $b_n=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$，所以 $b_n=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

设 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$，则 $T_n=1\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$①，所以 $\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$②，

由①－②可得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

所以 $\frac{1}{2}T_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，即 $\frac{1}{2}T_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{2}n\right)$，

即 $T_n=2-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，又因为 $\frac{n+2}{2^n}>0$，

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<2$.

7. 解：(1)将点 $A_n(a_n,\sqrt{a_{n+1}})$ 的坐标代入抛物线方程 $y^2=x+1$ 中，得 $a_{n+1}=a_n+1$，$\therefore a_{n+1}-a_n=1(n\geqslant 1)$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\therefore$

$a_n=6+(n-1)\times 1$，即 $a_n=n+5$.

$\because \boldsymbol{m}=(1,2)$ 为直线 l 的方向向量，$\therefore$ 直线 l 的斜率 $k=2$，$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=2x+1$，

$\because$ 点 $B_n(n,b_n)$ 在直线 l 上，

$\therefore b_n=2n+1$.

(2)由(1)知 $f(n)=\begin{cases}n+5(n\text{ 为奇数}),\\2n+1(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$

①当 k 是偶数时，$k+27$ 是奇数，

由 $f(k+27)=4f(k)$ 得 $k+27+5=4(2k+1)$，即 $k=4$；

②当 k 是奇数时，$k+27$ 是偶数，

由 $f(k+27)=4f(k)$ 得 $2(k+27)+1=4(k+5)$，即 $k=\frac{35}{2}$（舍去）.

故存在唯一的 $k=4$ 满足题意.

(3)由题知 $\frac{a}{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$，

即 $a\leqslant\frac{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)}{\sqrt{2n+3}}$.

设 $g(n)=\frac{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)}{\sqrt{2n+3}}$，

则 $g(n+1)=\frac{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)\left(1+\frac{1}{b_{n+1}}\right)}{\sqrt{2n+5}}$，

$\therefore\frac{g(n+1)}{g(n)}=\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}\left(1+\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{2n+4}{\sqrt{2n+5}\cdot\sqrt{2n+3}}=\frac{\sqrt{4n^2+16n+16}}{\sqrt{4n^2+16n+15}}>1$，$\therefore g(n+1)>g(n)$，即数列 $\{g(n)\}$ 是递增数列，

$\therefore g(n)_{\min}=g(1)=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，$\therefore 0<a\leqslant\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

第七单元　立体几何

第 42 讲　空间几何体

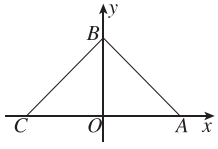
1. D ［解析］因为该正四棱台上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，所以该正四棱台的高 $h=\sqrt{2^2-(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，下底面面积 $S_1=16$，上底面面积 $S_2=4$，所以该正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times(16+4+\sqrt{64})=\frac{28\sqrt{2}}{3}$. 故选 D.

2. A ［解析］由题可知圆锥的底面半径 $R=1$，母线长 $l=2$，高 $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\therefore$ 圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. 故选 A.

3. B ［解析］因为圆柱的轴截面是正方形，且面积为 8，所以圆柱的高为 $2\sqrt{2}$，底面直径为 $2\sqrt{2}$，所以圆柱的表面积 $S=2\pi\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}+2\times\pi\times(\sqrt{2})^2=12\pi$. 故选 B.

4. D ［解析］上、下两圆台的高之比是 3∶4，故上圆台的高为 $14\times\frac{3}{3+4}=6$（厘米），下圆台的高为 $14\times\frac{4}{3+4}=8$（厘米），故上圆台的体积 $V_1=6\times\frac{\pi(4^2+10^2+\sqrt{16\times 100})}{3}=312\pi$（立方厘米），下圆台的体积 $V_2=8\times\frac{\pi(6^2+10^2+\sqrt{36\times 100})}{3}=\frac{1568}{3}\pi$（立方厘米），故该汝窑双耳罐的体积 $V=V_1+V_2=312\pi+\frac{1568}{3}\pi=\frac{2504\pi}{3}$（立方厘米）. 故选 D.

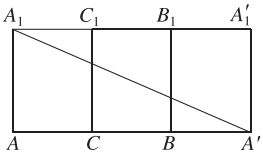
5. ABC ［解析］根据题意作出 $\triangle ABC$，如图所示. 对于 A，在 $\triangle ABC$ 中，$OC=OA=OB=2$，$AC\perp OB$，所以 $BC=AB=2\sqrt{2}$，$AC=4$，故 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，A 中说法错误；对于 B，$\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}AC\times OB=4$，$\triangle A'B'C'$ 的高为 $O'B'\times\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\triangle A'B'C'$ 的面积为 $\frac{1}{2}A'C'\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，则 $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle A'B'C'$ 的面积的 $2\sqrt{2}$ 倍，B 中说法错误；对于 C，因为 $OB=2$，所以点 B 的坐标为 $(0,2)$，C 中说法错误；对于 D，$\triangle ABC$ 的周长为 $BC+AB+AC=4+4\sqrt{2}$，D 中说法正确. 故选 ABC.



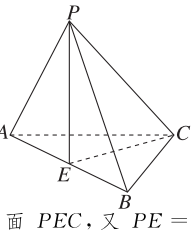
6. $\frac{2}{3}$　1 ［解析］设圆锥的底面半径为 r，则其高为 $\sqrt{3}r$，母线长为 $2r$. 设球 O 的半径为 R，则 $2R=\sqrt{3}r$，即 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，故 $\frac{V_{圆锥}}{V_{球}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot\sqrt{3}r}{\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^3}=\frac{2}{3}$. 圆锥的表面积 $S_1=\pi r^2+\pi r\cdot 2r=3\pi r^2$，球 O 的表面积 $S_2=4\pi R^2=4\pi\cdot\frac{3}{4}r^2=3\pi r^2$，故 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi r^2}{3\pi r^2}=1$.

7. $8\sqrt{\pi}$ ［解析］设圆柱的母线长和底面半径分别为 l，r，根据已知得 $2lr=4$，由题意可得圆柱侧面展开图的周长可以表示为 $L_{侧}=4\pi r+2l\geqslant 2\sqrt{4\pi r\times 2l}=8\sqrt{\pi}$，当且仅当 $4\pi r=2l$，即 $r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$，$l=2\sqrt{\pi}$ 时等号成立，故 $(L_{侧})_{\min}=8\sqrt{\pi}$.

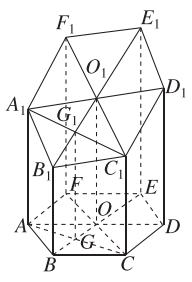
8. C ［解析］正三棱柱的侧面展开图为矩形 $AA'A_1'A_1$，如图所示，连接 $A'A_1$，因为正三角形 ABC 的边长为 3，侧棱 $AA_1=4$，所以 $AA'=9$，所以 $A'A_1=\sqrt{AA'^2+AA_1^2}=\sqrt{81+16}=\sqrt{97}$，即小虫爬行的最短路程为 $\sqrt{97}$，故选 C.



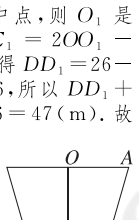
9. A ［解析］取 AB 的中点 E，连接 PE，CE，如图. ∵△ABC 是边长为 2 的等边三角形，$PA=PB=2$，∴$PE\perp AB$，$CE\perp AB$，又 PE，$CE\subset$ 平面 PEC，$PE\cap CE=E$，∴$AB\perp$ 平面 PEC，又 $PE=CE=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$PC=\sqrt{6}$，∴$PC^2=PE^2+CE^2$，即 $PE\perp CE$，故 $V_{P\text{-}ABC}=V_{B\text{-}PEC}+V_{A\text{-}PEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PEC}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times2=1$. 故选 A.



10. A ［解析］依题意可知 A_1，B_1，C_1，D_1，E_1，F_1 六点共面，连接 AD，BE，CF，由正六边形 $ABCDEF$ 的性质知 AD，BE，CF 交于一点，设为 O，连接 A_1D_1，B_1E_1，C_1F_1，由题意知 A_1D_1，B_1E_1，C_1F_1 交于一点，设为 O_1，连接 OO_1，则 $OO_1\perp$ 平面 $ABCDEF$，所以 OO_1，AA_1，BB_1，CC_1，DD_1，EE_1，FF_1 两两平行. 连接 AC 交 OB 于 G，连接 A_1C_1 交 O_1B_1 于 G_1，连接 GG_1，根据正六边形的性质可知四边形 $ABCO$ 是菱形，所以 AC，OB 相互平分，则 A_1C_1，O_1B_1 相互平分，根据梯形中位线定理有 $GG_1=\frac{AA_1+CC_1}{2}=\frac{BB_1+OO_1}{2}$，即 $\frac{12+10}{2}=\frac{9+OO_1}{2}$，可得 $OO_1=13$，在梯形 BEE_1B_1 中，O 是 BE 的中点，则 O_1 是 B_1E_1 的中点，所以 $EE_1=2OO_1-BB_1=26-9=17$，同理可得 $DD_1=26-12=14$，$FF_1=26-10=16$，所以 $DD_1+EE_1+FF_1=14+17+16=47$(m). 故选 A.



11. BCD ［解析］作圆锥的轴截面如图，设 $SO_1=h_1$，$SO=h$，$O_1B=r_1$，$OA=r$，由相似三角形的性质可得 $\frac{h_1}{h}=\frac{r_1}{r}$，所以 $\frac{V_{圆锥SO_1}}{V_{圆锥SO}}=\frac{\frac{1}{3}\times\pi r_1^2h_1}{\frac{1}{3}\times\pi r^2h}=\frac{h_1^3}{h^3}$. 对于 A，由于液体高度与圆锥高度的比值为 $\frac{15}{25}$，所以容器内液体的体积与容器的容积的比值为 $\left(\frac{15}{25}\right)^3=\frac{27}{125}$，A 错误. 对于 B，设容器内液体倒去一半后液体的高度为 h'cm，则 $\left(\frac{h'}{15}\right)^3=\frac{1}{2}$，解得 $h'=\frac{15\sqrt[3]{4}}{2}$，B 正确. 对于 C，因为 $\frac{15}{25}\times\frac{10}{2}=3$，$\frac{15+5}{25}\times\frac{10}{2}=4$，所以当容器内液体的高度增加 5 cm 时，需要增加的液体的体积为 $\frac{\pi}{3}\times5\times(3^2+3\times4+4^2)=\frac{185\pi}{3}$(cm^3)，C 正确. 对于 D，当容器内沉入一个棱长为 $\sqrt[3]{\pi}$ cm 的正方体铁块时，设容器内液体的高度为 H cm，体积 $V=\frac{\pi}{3}\times3^2\times15+(\sqrt[3]{\pi})^3=46\pi$(cm^3)，则 $\frac{46\pi}{45\pi}=\left(\frac{H}{15}\right)^3$，所以 $H=15\times\sqrt[3]{\frac{46}{45}}=\sqrt[3]{\frac{46}{45}\times15^3}=\sqrt[3]{3450}$(cm)，D 正确. 故选 BCD.



12. CD ［解析］设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则 $ED=2$，$FB=1$，$AC=2\sqrt{2}$，∴$V_1=V_{E\text{-}ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot ED=\frac{4}{3}$. ∵$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB\parallel ED$，∴$FB\perp$ 平面 $ABCD$，∴$V_2=V_{F\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot FB=\frac{2}{3}$. 连接 BD 交 AC 于 M，连接 EM，FM，∵$AC\perp ED$，$AC\perp BD$，$BD\cap ED=D$，∴$AC\perp$ 平面 $BDEF$. 过 F 作 $FN\perp DE$，垂足为 N，则 $FN\parallel BD$，且 $FN=BD=2\sqrt{2}$，在 Rt△ENF 中，$EF=\sqrt{EN^2+FN^2}=3$. 在 Rt△MBF 中，$FM=\sqrt{BF^2+BM^2}=\sqrt{3}$. 在 Rt△$EDM$ 中，$EM=\sqrt{ED^2+DM^2}=\sqrt{6}$，∴$EM^2+FM^2=EF^2$，即 $EM\perp FM$，故 $V_3=V_{F\text{-}ACE}=\frac{1}{3}S_{\triangle EMF}\cdot AC=2$. 故选项 A，B 错误，选项 C，D 正确，故选 CD.

13. $\frac{224}{3}\pi$ ［解析］由题意可知，几何体体积为大球的体积减去小球的体积，所以几何体体积为 $\frac{4}{3}\pi\times4^3-\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{256}{3}\pi-\frac{32}{3}\pi=\frac{224}{3}\pi$.

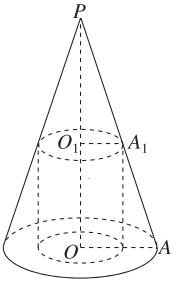
14. $(5+\sqrt{2})\pi$ ［解析］由 $AB=1$，$AC=3$，得 $BC=2$，则圆锥的母线长为 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times2\pi\times1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$，圆柱的侧面积为 $2\pi\times1\times2=4\pi$，故该陀螺的表面积 $S=\sqrt{2}\pi+4\pi+\pi\times1^2=(5+\sqrt{2})\pi$.

15. 解：(1)设圆锥的母线长为 l，由半径 $r=1$，高 $h'=3$，得 $l=\sqrt{10}$，∴$S_{侧}=\pi rl=\sqrt{10}\pi$，$S_{底}=\pi r^2=\pi$，故 $S_{表}=(\sqrt{10}+1)\pi$，$V=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot h'=\pi$.

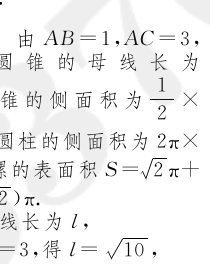
(2) 如图，连接 O_1A_1，OA，由三角形相似可得 $\frac{3-h}{3}=\frac{x}{1}$，得 $h=3(1-x)(0<x<1)$.

(3)记圆柱的表面积为 S，则 $S=2\pi x\cdot3(1-x)+2\pi x^2=2\pi(-2x^2+3x)=-4\pi\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9\pi}{4}$.

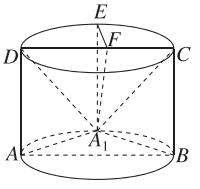
∵$0<x<1$，∴当 $x=\frac{3}{4}$ 时，$S_{max}=\frac{9\pi}{4}$.



16. 32π ［解析］由曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$y=\pm4$ 围成的图形为图中实线所围成的图形(关于 x 轴对称). 设直线 $y=h$ $(0\leqslant h\leqslant4)$ 与直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 在第一象限分别交于点 A，B，易得 $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}h,h\right)$，$B\left(2\sqrt{\frac{h^2}{3}+1},h\right)$，截面上底面的小圆面积 $S_1=\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}h\right)^2=\frac{4}{3}\pi h^2$，大圆面积 $S_2=\pi\left(2\sqrt{\frac{h^2}{3}+1}\right)^2=\frac{4}{3}\pi h^2+4\pi$，则圆环面积 $S=S_2-S_1=4\pi$. 由祖暅原理知，旋转体的体积 V 与底面积为 4π，高为 8 的圆柱体积相等，故所求旋转体的体积 $V=32\pi$.



17. $\sqrt{2}$ ［解析］设圆柱 O_1O 的母线长为 l，如图，A_1 在上底面的正投影为点 E，可知 A_1E 即为母线且和上底面垂直，所以 $A_1E\perp CD$，过 E 作 CD 的垂线，垂足记为 F，连接 A_1F，又 $EF\cap A_1E=E$，且 EF，A_1E 都在平面 A_1EF 内，所以 $CD\perp$ 平面 A_1EF，又 $A_1F\subset$ 平面 A_1EF，所以 $CD\perp A_1F$，所以当 A_1F 最大时，△A_1CD 的面积取得最大值，结合 $A_1F^2=A_1E^2+EF^2$，可知 EF 最大时 A_1F 最大，易知 $EF\leqslant1$，所以当 E 为圆弧 CD 的中点，F 为 CD 的中点时，A_1F 最大，最大值为 $\sqrt{l^2+1}$，所以△A_1CD 面积的最大值为 $\frac{2\sqrt{l^2+1}}{2}=\sqrt{3}$，解得 $l=\sqrt{2}$.

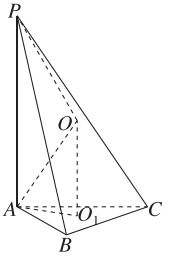


增分微练 6　与球有关的切、接问题

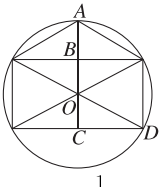
1. C ［解析］棱长为 4 的正方体的内切球的半径 $r=2$，则表面积 $S=4\pi r^2=16\pi$. 故选 C.

2. C ［解析］设圆锥底面的半径为 r，则 $2\pi r=\frac{1}{2}\times2\pi\times1$，解得 $r=\frac{1}{2}$，所以圆锥的轴截面是边长为 1 的正三角形，可得此正三角形内切圆的半径为 $\frac{1}{3}\times\sqrt{1-r^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，则圆锥内切球的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以圆锥内切球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{1}{12}=\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

3. A ［解析］设△ABC 的外心为 O_1，三棱锥外接球的球心为 O，半径为 R，连接 O_1A，OA，OO_1，OP，由题意知 $O_1A=\frac{3}{2\sin60^\circ}=\sqrt{3}$，又 $PA\perp$ 平面 ABC，$OO_1\perp$ 平面 ABC，∴$OO_1\parallel PA$，又 $OA=OP$，∴$OO_1=\frac{1}{2}PA=\sqrt{5}$，∴$R^2=3+5=8$，∴$S_{球}=4\pi R^2=32\pi$. 故选 A.

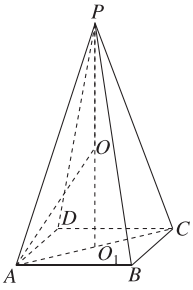


4. A ［解析］作出轴截面如图，设该组合体外接球的球心为 O，半径为 R，易知球心为 BC 的中点，则 $R=AO=2+2=4$，则圆柱的底面半径 $r=\sqrt{4^2-(4-2)^2}=2\sqrt{3}$，则该组合体的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times(2\sqrt{3})^2\times2+\pi\times(2\sqrt{3})^2\times4=56\pi$. 故选 A.

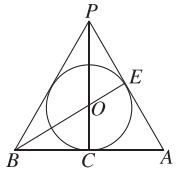


5. $\frac{81\pi}{4}$ ［解析］如图，正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的外接球的球心 O 在它的高 PO_1 上，记外接球半径为 R，$PO=AO=R$，$PO_1=4$，$OO_1=4-R$，底面正方形的边长为 2. 在 Rt△AO_1O 中，$AO_1=\sqrt{2}$，可得 $R^2=2+$

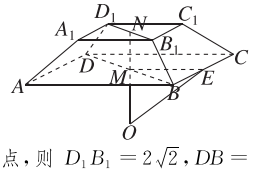
$(4-R)^2$，解得 $R=\frac{9}{4}$，故球的表面积 $S=4\pi\times\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81\pi}{4}$.



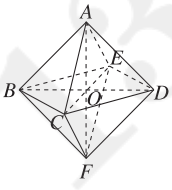
6. C ［解析］由圆锥的性质易知 $\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰三角形，又 $\tan\angle APB=\sqrt{3}$，所以 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$，则 $\triangle PAB$ 为正三角形，边长为 $2\sqrt{3}$. 如图所示，作出圆锥及其内切球的轴截面，设 AB，AP 的中点分别为 C，E，内切球的球心为 O，连接 BE，PC，且 O 为 BE 与 PC 的交点，由正三角形内心的性质易知 $OC=OE=\frac{1}{2}PO=\frac{1}{3}PC=\frac{1}{3}\times\sqrt{AP^2-AC^2}=\frac{1}{3}\times\sqrt{12-3}=1$，即内切球半径为 1，所以内切球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi$. 故选 C.



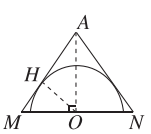
7. C ［解析］设棱台上、下底面的中心分别为 N，M，连接 MN，D_1B_1，DB，则 M，N 分别为 DB，D_1B_1 的中点，则 $D_1B_1=2\sqrt{2}$，$DB=4\sqrt{2}$，所以棱台的高 $MN=\sqrt{B_1B^2-(MB-NB_1)^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=1$. 设球的半径为 R，根据正四棱台的结构特征可知，球 O 与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 相切于 N，与棱 AB，BC，CD，DA 均相切于各棱中点处，设 BC 的中点为 E，连接 OE，OM，ME，所以 $OE^2=OM^2+ME^2$，即 $R^2=(R-1)^2+2^2$，解得 $R=\frac{5}{2}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=25\pi$. 故选 C.



8. C ［解析］根据图形，由正方体的棱长为 2，可知正八面体的棱长为正方体面对角线长的一半，即为 $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}=\sqrt{2}$. 如图，在正八面体中连接 AF，DB，CE，且交于一点 O，可得 AF，DB，CE 互相垂直平分，O 为正八面体的中心，所以 $OA\perp$ 平面 $BCDE$，又 $OD\subset$ 平面 $BCDE$，所以 $AO\perp OD$，又 $AD=\sqrt{2}$，$OD=1$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$AO=\sqrt{AD^2-OD^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$，设正八面体的内切球半径为 r.

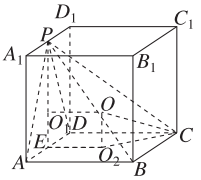


方法一：分别记 BC，DE 的中点为 M，N，内切球与平面 ABC 的切点为 H，显然 O 为球心，$H\in AM$，如图，由 $\triangle AOH\backsim\triangle AMO$ 知 $\frac{r}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$，所以 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $S_{球}=4\pi r^2=\frac{4\pi}{3}$. 故选 C.

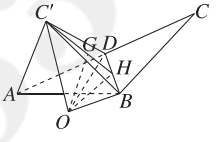


方法二：该正八面体的体积 $V=2\times\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{4}{3}$，该正八面体的表面积 $S=8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=4\sqrt{3}$，因为 $\frac{1}{3}Sr=V$，即 $\frac{1}{3}\times4\sqrt{3}\cdot r=\frac{4}{3}$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $S_{球}=4\pi r^2=\frac{4\pi}{3}$. 故选 C.

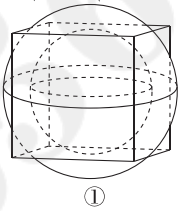
9. C ［解析］设四棱锥 P-$ABCD$ 的外接球球心为 O，取 AD 的中点 E，连接 PE，取三角形 PAD，四边形 $ABCD$ 的外心 O_1，O_2，连接 OO_1，OO_2，EO_2，O_2C，OC，易得四边形 OO_1EO_2 为矩形. 因为正方体的棱长为 1，点 P 为中点，所以 $PA=PD=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$PE=1$，$O_2C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\angle PAD=\sin\angle APA_1=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，则 $O_1P=\frac{1}{2}\cdot\frac{PD}{\sin\angle PAD}=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{5}{8}$，则 $O_1E=OO_2=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$，所以 $OC=\sqrt{OO_2^2+O_2C^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{41}}{8}$，故外接球的表面积 $S=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{41}}{8}\right)^2=\frac{41\pi}{16}$. 故选 C.



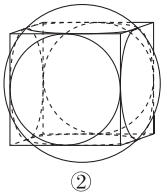
10. A ［解析］因为 $A=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{2}$，$BC=1$，所以 $AC=2$，又 D 为 AC 的中点，所以 $AD=CD=BD=1$，则 $BC'=C'D=BD=1$，即 $\triangle BC'D$ 为等边三角形. 设 $\triangle BC'D$ 的外接圆圆心为 G，$\triangle ABD$ 的外接圆圆心为 O，取 BD 的中点 H，连接 $C'H$，OH，OG，OB，OC'，OD，因为 $A=\frac{\pi}{6}$，$BD=1$，所以由正弦定理可得 $OB=\frac{1}{2}\times\frac{BD}{\sin A}=1$，即 $\triangle ABD$ 的外接圆半径为 1，又四面体 C'-ABD 的外接球半径为 1，所以 O 为外接球球心，由球的性质可知，$OG\perp$ 平面 $BC'D$，因为 $C'H\subset$ 平面 $BC'D$，所以 $OG\perp C'H$. 因为 $C'G=\frac{2}{3}C'H=\frac{2}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$OC'=1$，所以 $OG=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 设 C' 到平面 ABD 的距离为 d，因为 $\triangle BC'D$ 和 $\triangle BOD$ 都是边长为 1 的正三角形，所以由 $V_{C'\text{-}OBD}=V_{O\text{-}C'BD}$ 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle OBD}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle C'BD}\cdot OG$，即 $d=\frac{\sqrt{6}}{3}$，记直线 BC' 与平面 ABD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{d}{BC'}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.



11. BCD ［解析］对于 A，依题意得棱切球的半径为 $\sqrt{2}$，则球 O 的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$，A 错误；对于 B，记球 O 的内接圆柱的底面半径为 r，则内接圆柱的高为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(2r)^2}=\sqrt{8-4r^2}$，则内接圆柱的侧面积 $S=2\pi r\cdot\sqrt{8-4r^2}=4\pi\sqrt{r^2\cdot(2-r^2)}\leqslant4\pi\cdot\frac{r^2+2-r^2}{2}=4\pi$，等号成立时 $r=1$，故球 O 的内接圆柱的侧面积的最大值为 4π，B 正确；对于 C，如图①，球 O 在正方体外部的体积小于球 O 体积与正方体内切球体积之差，即 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi$，C 正确；对于 D，如图②，球 O 在正方体外部的面积等于正方体外 6 个球冠的表面积，每一个球冠的表面积大于这个球冠中内接圆锥的侧面积，则内接圆锥的底面半径为 1，高为 $\sqrt{2}-1$，得圆锥的母线长为 $\sqrt{1^2+(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$，所以内接圆锥的侧面积为 $\pi\times1\times\sqrt{4-2\sqrt{2}}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}\pi$，所以 6 个球冠的表面积大于 $6\sqrt{4-2\sqrt{2}}\pi$，D 正确. 故选 BCD.



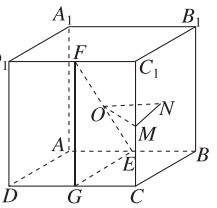
①



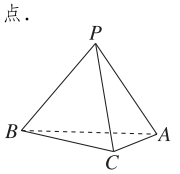
②

12. 41π ［解析］由 $3^2+4^2=5^2$，得 $\angle BAC=90°$，又 $DB\perp$ 底面 ABC，AB，$AC\subset$ 平面 ABC，故 $DB\perp AB$，$DB\perp AC$，故三棱锥 D-ABC 的外接球即为以 AB，AC，DB 为棱的长方体的外接球，其中 DC 为该长方体的体对角线，即该三棱锥的外接球的半径 $r=\frac{DC}{2}$，又 $DC=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，故 $r=\frac{DC}{2}=\frac{\sqrt{41}}{2}$，则三棱锥的外接球的表面积 $S_{表}=4\pi r^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2=41\pi$.

13. 12 ［解析］不妨设正方体的棱长为 2，EF 的中点为 O，分别取 CD，CC_1 的中点 G，M，设侧面 BB_1C_1C 的中心为 N，连接 FG，EG，OM，ON，MN，如图. 由题意可知，O 为球心，在正方体中，$EF=\sqrt{FG^2+EG^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，即以 EF 为直径的球的半径 $R=\sqrt{2}$，球心 O 到 CC_1 的距离为 $OM=\sqrt{ON^2+MN^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以球 O 与棱 CC_1 相切，球面与棱 CC_1 只有 1 个公共点，根据正方体的对称性知，其余各棱和球面也只有 1 个公共点，所以以 EF 为直径的球的球面与该正方体的棱共有 12 个公共点.

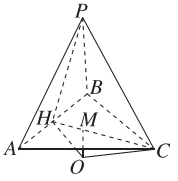


14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{16\pi}{3}$ ［解析］如图，由余弦定理可得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$，故 $4=AB^2+AC^2-AB\cdot AC\geqslant2AB\cdot AC-AB\cdot AC$，所以 $AB\cdot AC\leqslant4$，当且仅当 $AB=AC$ 时取等号，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin60°=$



$\frac{\sqrt{3}}{4}AB\cdot AC\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\times4=\sqrt{3}$，故$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$，设四面体$P\text{-}ABC$的高为$h$，则$V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h\leqslant\frac{1}{3}\times\sqrt{3}h=\frac{\sqrt{3}}{3}h$，由于$BP\perp PC$，所以点$P$在以$BC$为直径的球面上（不包括平面$ABC$），故当平面$PBC\perp$平面$ABC$时$h$最大，即为球的半径$\frac{1}{2}BC=1$，故$V_{P\text{-}ABC}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}h\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$. 由正弦定理可得$\frac{2}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sqrt{3}}=2r$，其中$r$为$\triangle ABC$外接圆的半径. 设四面体$P\text{-}ABC$外接球的半径为$R$，则$R^2=r^2+O_1O^2=\frac{4}{3}+O_1O^2$，其中$O,O_1$分别为球心和$\triangle ABC$外接圆的圆心，故当$OO_1=0$时$R^2$最小，即为$\frac{4}{3}$，故外接球的表面积的最小值为$4\pi\times\frac{4}{3}=\frac{16\pi}{3}$.

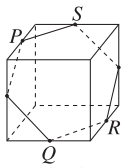
15. $\frac{17\pi}{3}$ ［解析］设AB的中点为H，$\triangle ABC$外接圆的圆心为M，球心为O，连接PH，CH，且M在CH上，因为$PA=PB$，所以$PH\perp AB$，又$\triangle ABC$是边长为2的正三角形，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，结合题设有$S_{\triangle PAB}=1$，所以$\frac{1}{2}\times2\times PH=1$，得$PH=1$，所以$\triangle PAB$是等腰直角三角形，其外接圆圆心为$H$，又因为$CH\perp AB$，所以$\angle PHC$为二面角$P\text{-}AB\text{-}C$的平面角，结合已知该角为锐角，由题意可知，$\cos\angle CHP=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 过$H,M$分别作平面$PAB$，平面$ABC$的垂线，相交于一点，由截面圆的性质可知，两垂线的交点为球心O，连接OC，如图所示，所以$\sin\angle OHM=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\angle OHM=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，可得$\tan\angle OHM=\frac{OM}{HM}=\frac{1}{2}$，又易知$MH=\frac{CH}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$CM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$OM=\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以外接球的半径$R=OC=\sqrt{OM^2+MC^2}=\sqrt{\frac{17}{12}}$，所以外接球的表面积$S=4\pi R^2=\frac{17\pi}{3}$.



第43讲　空间点、直线、平面之间的位置关系

1. D ［解析］根据题意，两点确定一条直线，由于直线上有两个点在平面外，则直线在平面外，只能是直线与平面相交或者直线与平面平行，所以直线上至多有一个点在平面内. 故选D.

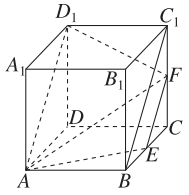
2. D ［解析］在A选项的图中分别连接PS,QR，易证$PS/\!/QR$，$\therefore P,Q,R,S$这四点共面；在C选项的图中分别连接PQ,RS，易证$PQ/\!/RS$，$\therefore P,Q,R,S$这四点共面；如图所示，在B选项的图中过P,Q,R,S可作一正六边形，故P,Q,R,S这四点共面；在D选项的图中分别连接PS,QR，PS与QR为异面直线，$\therefore P,Q,R,S$这四点不共面. 故选D.



3. B ［解析］依题意，m,n,l是空间中不过同一点的三条直线，当m,n,l在同一平面时，可能有$m/\!/n/\!/l$，故不能得出m,n,l两两相交. 当m,n,l两两相交时，设$m\cap n=A$，$m\cap l=B$，$n\cap l=C$，根据基本事实的推论2可知m,n确定一个平面α，而$B\in m\subset\alpha$，$C\in n\subset\alpha$，根据基本事实2可知，直线$BC\subset\alpha$，即$l\subset\alpha$，所以m,n,l在同一平面. 综上所述，“m,n,l在同一平面”是“m,n,l两两相交”的必要不充分条件. 故选B.

4. C ［解析］若$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则$l/\!/m$或l与m相交，故A错误；若$l/\!/m$，则$\alpha/\!/\beta$或α与β相交，故B错误；若$\alpha\perp\beta$，$\gamma\perp\beta$，则$l\perp m$，故C正确；若$l\perp m$，则α与β相交，不一定是垂直，故D错误. 故选C.

5. B ［解析］如图，连接AD_1，BC_1，D_1F，因为E,F分别为BC，CC_1的中点，所以$EF/\!/BC_1$，又在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AD_1/\!/BC_1$，所以$EF/\!/AD_1$，则A,D_1,F,E四点共面，则平面AEF截正方体所得的截面为四边形$AEFD_1$. 故选B.

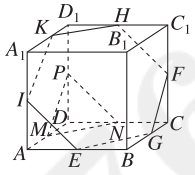


6. ①相交或异面　②$a/\!/\alpha$或$a\subset\alpha$

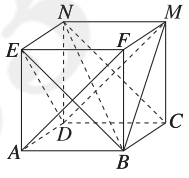
［解析］①$\because a/\!/b$，$b\cap c=A$，$\therefore$直线a与直线c的位置关系是相交或异面.

②$\because a\perp b$，$b\perp\alpha$，$\therefore$直线a与平面α的位置关系是$a/\!/\alpha$或$a\subset\alpha$.

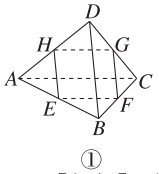
7. $3\sqrt{3}$ ［解析］分别取BC,C_1D_1,A_1D_1，AA_1的中点G,H,K,I，连接HF,HK,KI,EI,EG,FG，易证平面$EGFHKI/\!/$平面PMN，则存在过点E,F的平面α与平面PMN平行，即正六边形$EGFHKI$是平面α截该正方体得到的截面，截面的面积是$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=3\sqrt{3}$.



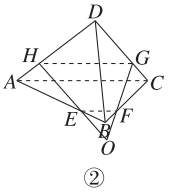
8. C ［解析］由正方体的平面展开图复原得空间正方体如图所示. 由图可知，BM和ED是异面直线，故①不正确；CN和BE是平行直线，故②不正确；CN和BE平行，BE与BM的夹角是60°，故CN与BM所成的角也是60°，故③正确；DM与BN异面垂直，故④正确. 所以正确结论的序号为③④. 故选C.



9. D ［解析］因为$EF/\!/GH$，所以E,F,G,H四点确定一个平面$EFGH$，因此直线EH与FG一定共面，故D正确，C不正确；如图①，只有当$EF/\!/GH$，$EF=GH$时，四边形$EFGH$为平行四边形，此时$EH/\!/GF$，故A不正确；如图②，只有当$EF/\!/GH$但$EF\neq GH$时，四边形$EFGH$为梯形，此时EH,GF相交于一点，故B不正确. 故选D.



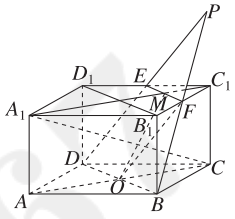
①



②

10. AB ［解析］对于A，当$m\perp\beta$，$m\subset\alpha$时，$\alpha\perp\beta$；当$n\perp\alpha$，$n\subset\beta$时，$\alpha\perp\beta$，故A正确. 对于B，当$m/\!/\beta$，$n/\!/\alpha$时，因为m,n为异面直线，所以$\alpha/\!/\beta$，故B正确. 对于C，当$\alpha\perp\beta$时，由$m\subset\alpha$，得$m/\!/\beta$或m与β相交；当$\alpha\perp\beta$时，由$n\subset\beta$，得$n/\!/\alpha$或n与α相交，故C错误. 对于D，当α,β不平行时，可能$m/\!/\beta$或m与β相交，$n/\!/\alpha$或n与α相交，故D错误. 故选AB.

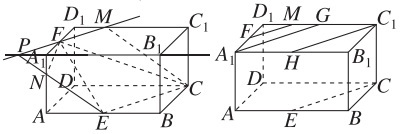
11. ABD ［解析］如图，对于选项A，连接B_1D_1，因为$BB_1/\!/DD_1$，$BB_1=DD_1$，所以四边形BB_1D_1D为平行四边形，则$B_1D_1/\!/BD$，又因为E,F分别为C_1D_1，B_1C_1的中点，所以$B_1D_1/\!/EF$，可得$BD/\!/EF$，所以B,D,E,F四点在同一平面内，故A正确；对于选项B，延长BF,DE，使BF与DE相交于点P，即$P\in BF$，$P\in DE$，又因为$BF\subset$平面BCC_1B_1，$DE\subset$平面DD_1C_1C，所以$P\in$平面BCC_1B_1，$P\in$平面DD_1C_1C，且平面$BCC_1B_1\cap$平面$DD_1C_1C=CC_1$，所以$P\in CC_1$，即三条直线BF,DE,CC_1有公共点，故B正确；对于选项C，连接A_1C_1，AC，因为$A_1C\subset$平面AA_1C_1C，$OF\cap$平面$AA_1C_1C=O$，$O\notin A_1C$，所以直线A_1C与直线OF是异面直线，故C错误；对于选项D，因为A_1,O,C,M均在平面AA_1C_1C内，连接OM，则OM与A_1C相交，所以直线A_1C上存在点N使M,N,O三点共线，故D正确. 故选ABD.



12. p_1,p_4 ［解析］对于命题p_1，可设l_1与l_2相交，这两条直线确定的平面为α，若l_3与l_1相交，则交点A在平面α内，同理，l_3与l_2的交点B也在平面α内，所以$AB\subset\alpha$，即$l_3\subset\alpha$，故命题p_1为真命题. 对于命题p_2，若三点共线，则过这三个点的平面有无数个，故命题p_2为假命题. 对于命题p_3，空间中两条直线的位置关系有相交、平行或异面，故命题p_3为假命题. 对于命题p_4，若直线$m\perp$平面α，则m垂直于平面α内所有直线，因为直线$l\subset$平面α，所以$m\perp l$，故命题p_4为真命题. 综上可知，p_1,p_4为真命题，p_2,p_3为假命题.

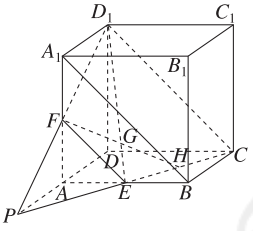
13. 五 $\frac{11\sqrt{17}}{6}$ ［解析］如图①，过F作EC的平行线交D_1C_1于M，交直线A_1B_1于P，连接PE，交A_1A于N，连接FN,CM，则直线FM与直线EC共面，且$N\in PE$，$P\in MF$，$E\in EC$，则点N也在直线FM与直线EC确定的平面上，所以可得五边形$ECMFN$为平面CEF截该长方体所得的截面. 如图②，设H为A_1B_1的中点，G为D_1C_1的中点，连接A_1G,C_1H，显然有$CE/\!/C_1H/\!/A_1G$，所以$FM/\!/A_1G$，所以M为D_1C_1上靠近D_1的四等分点. 又$D_1M/\!/A_1P$，且F为A_1D_1的中点，所以$D_1M=PA_1$，又$AE/\!/A_1P$，所以$\frac{A_1N}{NA}=\frac{PA_1}{AE}=\frac{D_1M}{AE}=\frac{1}{2}$，即$N$为$A_1A$上靠近$A_1$的三等分点，所以$FM=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$MC=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$FC=\sqrt{1+4^2+2^2}=\sqrt{21}$，$FN=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$NE=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+2^2}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$，$EC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{2^2+2^2+1}=3$，所以$\cos\angle FMC=\frac{2+13-21}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{13}}=-\frac{3}{\sqrt{26}}$，$\cos\angle EFC=\frac{9+21-8}{2\times3\times\sqrt{21}}=\frac{11}{3\sqrt{21}}$，$\cos\angle NFE=\frac{\frac{13}{9}+9-\frac{4\times13}{9}}{2\times\frac{\sqrt{13}}{3}\times3}=\frac{7}{3\sqrt{13}}$，所以$\sin\angle FMC=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{26}}\right)^2}=$

$\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$，$\sin\angle EFC=\sqrt{1-\left(\frac{11}{3\sqrt{21}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{21}}$，$\sin\angle NFE=\sqrt{1-\left(\frac{7}{3\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{13}}$，所以截面面积为 $S_{\triangle FMC}+S_{\triangle EFC}+S_{\triangle NEF}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}+\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{21}\times\frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{21}}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{3}\times3\times\frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{13}}=\frac{11\sqrt{17}}{6}$.

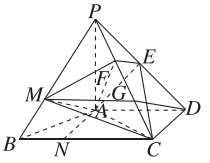


① ②

14. 证明：(1)如图，连接 A_1B，CD_1，EF，
∵在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 AB，AA_1 的中点，∴$EF/\!/A_1B$ 且 $EF\neq A_1B$.
∵$CD_1/\!/A_1B$ 且 $CD_1=A_1B$，
∴$EF/\!/CD_1$ 且 $EF\neq CD_1$，
∴EC 与 D_1F 相交，设交点为 K.
∵$K\in EC$，$EC\subset$ 平面 $ABCD$，∴$K\in$ 平面 $ABCD$. 又∵$K\in FD_1$，$FD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，∴$K\in$ 平面 ADD_1A_1，
∴K 为两平面的公共点.
∵平面 $ABCD\cap$ 平面 $ADD_1A_1=AD$，
∴$K\in AD$，故 K 与 P 重合，
∴CE，D_1F，DA 三条直线交于点 P.
(2)∵$FH\subset$ 平面 PCD_1，∴$H\in$ 平面 PCD_1，又 $H\in$ 平面 $ABCD$，
∴H 在平面 PCD_1 和平面 $ABCD$ 的交线上.
同理，P 在平面 PCD_1 和平面 $ABCD$ 的交线上，E 在平面 PCD_1 和平面 $ABCD$ 的交线上，∴P，E，H 都在平面 PCD_1 与平面 $ABCD$ 的交线上，
∴P，E，H 三点共线.

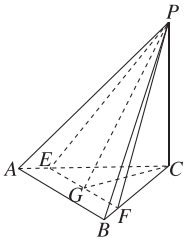


15. 解：(1)证明：如图所示，取 CF 的中点 G，连接 MG，DG，因为 E，F 分别是 PD，PG 的中点，所以 $DG/\!/EF$.
因为 $PM=\frac{2}{3}PB$，$PG=\frac{2}{3}PC$，所以 $MG/\!/BC$ 且 $MG=\frac{2}{3}BC=2$，
又 $AD/\!/BC$，$AD=2$，所以 $MG/\!/AD$，且 $MG=AD$，所以四边形 $ADGM$ 为平行四边形，所以 $AM/\!/DG$.
因为 $DG/\!/EF$，所以 $AM/\!/EF$，则 E，F，A，M 四点共面.
(2)如图所示，过点 A 作 $AN/\!/CD$ 交 BC 于点 N，则 $AN\perp BC$，$AN=2$，可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times2=3$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.



连接 CM，CE，则 $V_{P\text{-}AMFE}=V_{P\text{-}AMF}+V_{P\text{-}AEF}=V_{F\text{-}AMP}+V_{F\text{-}PAE}=\frac{1}{3}V_{C\text{-}AMP}+\frac{1}{3}V_{C\text{-}PAE}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}V_{C\text{-}PAB}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}V_{C\text{-}PAD}=\frac{2}{9}V_{P\text{-}ABC}+\frac{1}{6}V_{P\text{-}ACD}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PA+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot PA=\frac{2}{27}\times3\times2+\frac{1}{18}\times2\times2=\frac{2}{3}$.

16. B [解析] 过 P 作 $PG\perp EF$，垂足为 G，连接 CG，易证得 $EF\perp CG$，∴$\angle PGC$ 即为二面角 $P\text{-}EF\text{-}C$ 的平面角，∴$\angle PGC=60°$，又 $PC=2$，∴$PG=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$CG=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 设 $CE=a$，$CF=b$，则 $EF=\sqrt{a^2+b^2}$，在 $\triangle CEF$ 中，$ab=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2+b^2}$，又 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{2ab}$，所以 $ab\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{2ab}=\frac{2\sqrt{6ab}}{3}$，所以 $ab\geqslant\frac{8}{3}$，当且仅当 $a=b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立，所以 $\triangle PEF$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{a^2+b^2}=ab\geqslant\frac{8}{3}$，故截面 PEF 的面积的最小值为 $\frac{8}{3}$. 故选 B.



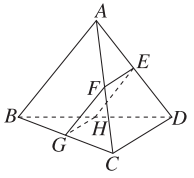
第 44 讲　直线、平面平行的判定与性质

1. B [解析] ∵平面 $\alpha/\!/$ 平面 β，∴平面 α 与平面 β 没有公共点，又 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，∴直线 a，b 没有公共点，∴直线 a，b 的位置关系是平行或异面. 故选 B.

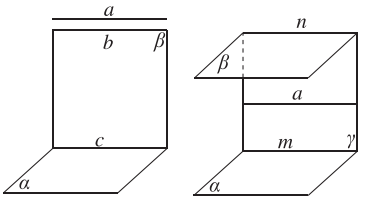
2. A [解析] 由于 $\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=l$，$\beta\cap\gamma=m$，由面面平行的性质定理可得 $l/\!/m$，所以 $\alpha/\!/\beta$ 是 $l/\!/m$ 的充分条件；但由 $l/\!/m$，$\alpha\cap\gamma=l$，$\beta\cap\gamma=m$ 不能推出 $\alpha/\!/\beta$，也有可能 α，β 相交，所以 $\alpha/\!/\beta$ 不是 $l/\!/m$ 的必要条件. 故选 A.

3. D [解析] 由于直线 a 不平行于平面 α，所以直线 a 与平面 α 相交或直线 a 在平面 α 内，当直线 a 在平面 α 内时，平面 α 内存在与 a 平行的直线，故 A 错误；当直线 a 与平面 α 相交时，平面 α 内存在直线与 a 异面，故 B 错误；当直线 a 在平面 α 内时，平面 α 内存在与 a 平行的直线，故 C 错误；由直线 a 与平面 α 相交或直线 a 在平面 α 内，得直线 a 与平面 α 至少存在一个公共点，故 D 正确. 故选 D.

4. C [解析] 如图所示，在三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，平面 α 即平面 $EFGH$，则四边形 $EFGH$ 为平行四边形，∴$EF/\!/GH$.
∵$EF\not\subset$ 平面 BCD，$GH\subset$ 平面 BCD，∴$EF/\!/$ 平面 BCD，又 $EF\subset$ 平面 ACD，平面 $BCD\cap$ 平面 $ACD=CD$，∴$EF/\!/CD$，又 $EF\subset$ 平面 $EFGH$，$CD\not\subset$ 平面 $EFGH$，∴$CD/\!/$ 平面 $EFGH$. 同理，$AB/\!/$ 平面 $EFGH$，故与平面 α(平面 $EFGH$)平行的棱有 2 条.



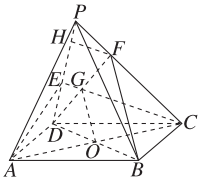
5. BCD [解析] 对于 A 选项，若 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，则 a，b 平行、相交或异面，A 错误；对于 B 选项，若 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，由线面垂直的性质可知 $a/\!/b$，B 正确；对于 C 选项，因为 $a/\!/b$，$b/\!/\alpha$，$a\not\subset\alpha$，过直线 b 作平面 β，使得 $\alpha\cap\beta=c$，如图①所示，因为 $b/\!/\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=c$，所以 $b/\!/c$，则 $a/\!/c$，因为 $a\not\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，所以 $a/\!/\alpha$，C 正确；对于 D 选项，过直线 a 作平面 γ，使得 $\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，如图②所示，因为 $\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，所以 $m/\!/n$，因为 $a/\!/\alpha$，$a\subset\gamma$，$\alpha\cap\gamma=m$，所以 $m/\!/a$，则 $a/\!/n$，因为 $a\not\subset\beta$，$n\subset\beta$，所以 $a/\!/\beta$，D 正确. 故选 BCD.



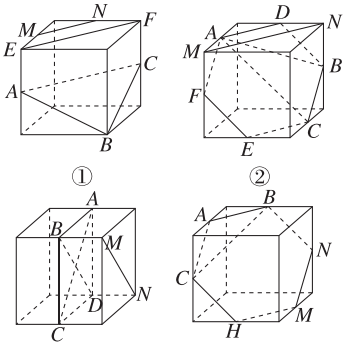
① ②

6. 平行 [解析] 因为过 A_1，C_1，B 三点的平面与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线为 A_1C_1，与平面 $ABCD$ 的交线为 l，且平面 $ABCD/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $l/\!/A_1C_1$.

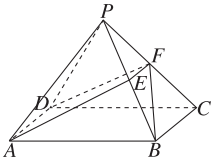
7. $\frac{1}{2}$ [解析] 连接 BD，与 AC 交于点 O，连接 DF，交 CE 于 G，连接 OG，由于 $BF/\!/$ 平面 AEC，$BF\subset$ 平面 BDF，平面 $BDF\cap$ 平面 $AEC=OG$，所以 $BF/\!/OG$，由于 O 是 BD 的中点，所以 $\frac{OB}{OD}=\frac{GF}{GD}=1$，过 F 作 $FH/\!/CE$，交 PD 于 H，则 $\frac{ED}{EH}=\frac{DG}{GF}=1$，因为 $\frac{PE}{ED}=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{PH}{HE}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{PF}{FC}=\frac{PH}{HE}=\frac{1}{2}$.



8. D [解析] 对于 A，如图①，由正方体的性质可得 $MN/\!/EF/\!/AC$，因为 $MN\not\subset$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，所以直线 $MN/\!/$ 平面 ABC，故 A 满足；对于 B，作出完整的截面 $ADBCEF$，如图②，由正方体的性质可得 $MN/\!/AD$，因为 $MN\not\subset$ 平面 ABC，$AD\subset$ 平面 ABC，所以直线 $MN/\!/$ 平面 ABC，故 B 满足；对于 C，作出完整的截面 $ABCD$，连接 BD，如图③，由正方体的性质可得 $MN/\!/BD$，因为 $MN\not\subset$ 平面 ABC，$BD\subset$ 平面 ABC，所以直线 $MN/\!/$ 平面 ABC，故 C 满足；对于 D，作出完整的截面，如图④中六边形 $ABNMHC$，可得 MN 在平面 ABC 内，不能得出 $MN/\!/$ 平面 ABC，故 D 不满足. 故选 D.

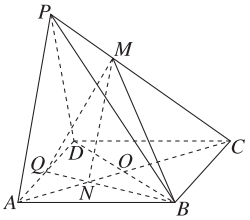


9. B [解析] 由题意知，该几何体是底面为正方形的四棱锥，如图所示，因为 $F\in$ 平面 $AEFD$，$B\notin$ 平面 $AEFD$，F 不在直线 AE 上，所以直线 AE 与直线 BF 异面，故 A 中结论正确；易得 $EF/\!/BC$，$BC/\!/AD$，所以 $EF/\!/AD$，所以 EF 与 AD 共面，AE 与 DF 共面，故 B 中结论错误；因为 $EF/\!/AD$，$EF\not\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，所以直线 $EF/\!/$ 平面 PAD，故 C 中结论正确；因为 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以直线 $EF/\!/$ 平面 $ABCD$，故 D 中结论正确. 故选 B.



10. C [解析] 如图，连接 AC 与 BD，AC 交 BQ，BD 分别于点 N，O，因为底面 $ABCD$ 为平行四边形，所以点 O 是 AC 的中点，也是 BD 的中点，又点 Q 是 AD 的中点，所以点 N 是 $\triangle ABD$ 的重心，所以 $AN=\frac{2}{3}AO=\frac{1}{3}AC$. 连接 MN，因

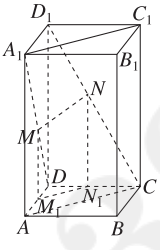
为 PA∥平面 MQB，$PA\subset$平面 PAC，平面 $PAC\cap$平面 $MQB=MN$，所以 PA∥MN，所以 $t=\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{1}{3}$. 故选 C.



11. ABC ［解析］由 MB_1 平行且等于 DG 知，四边形 B_1GDM 为平行四边形，$\therefore B_1G$∥DM，选项 A 正确；由 A_1M 平行且等于 EB 知，四边形 $MBEA_1$ 为平行四边形，$\therefore BM$∥A_1E，又 $A_1E\not\subset$平面 MBD，$BM\subset$平面 MBD，$\therefore A_1E$∥平面 MBD，又 EF∥BD，$EF\not\subset$平面 MBD，$BD\subset$平面 MBD，$\therefore EF$∥平面 MBD，$\because EF\cap A_1E=E$，$\therefore$平面 A_1EF∥平面 MBD，选项 C 正确；又 B_1G∥平面 MBD，$B_1G\not\subset$平面 A_1EF，$\therefore B_1G$∥平面 A_1EF，选项 B 正确；B_1G 与 A_1F 异面，选项 D 错误. 故选 ABC.

12. ACD ［解析］对于 A 选项，在旋转过程中有水的部分有两个平面相互平行且是全等的多边形，其余每相邻两个面的交线也相互平行，而这些面都是平行四边形，所以有水的部分始终是棱柱，故 A 正确；对于 B 选项，易知四边形 $EFGH$ 始终为矩形，从题图中可以发现，矩形 $EFGH$ 的边 EH 的长不变，EF 是变化的，故矩形 $EFGH$ 的面积不是定值，故 B 错误；对于 C 选项，因为 A_1D_1 始终与 BC 平行，而 BC 始终与水面平行，所以棱 A_1D_1 始终与水面平行，故 C 正确；对于 D 选项，当点 H 在棱 CD 上且点 G 在棱 CC_1 上（均不含端点）时，水体（三棱柱）的底面为三角形，因为水的体积是不变的，高始终是 BC，也是不变的，所以底面面积即 $\dfrac{1}{2}BE\cdot BF$ 也是不变的，即 $BE\cdot BF$ 为定值，故 D 正确. 故选 ACD.

13. $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ［解析］如图，作 $MM_1\perp AD$ 于点 M_1，作 $NN_1\perp CD$ 于点 N_1，则 MM_1∥平面 ACC_1A_1，连接 M_1N_1，$\because MN$∥平面 ACC_1A_1，$MM_1\cap MN=M$，$\therefore$平面 MM_1N_1N∥平面 ACC_1A_1，又平面 $MM_1N_1N\cap$平面 $ABCD=M_1N_1$，平面 $ACC_1A_1\cap$平面 $ABCD=AC$，$\therefore M_1N_1$∥AC. $\because AD=DC$，$\therefore DM_1=DN_1$，设 $DM_1=DN_1=x$，则 $MM_1=\sqrt{3}x$，$NN_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}x$，在直角梯形 MNN_1M_1 中，$N_1M_1=\sqrt{2}x$，$MN^2=(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3}-2\sqrt{3}x)^2=14\left(x-\dfrac{3}{7}\right)^2+\dfrac{3}{7}$，$\therefore$当 $x=\dfrac{3}{7}$ 时，MN 取得最小值 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

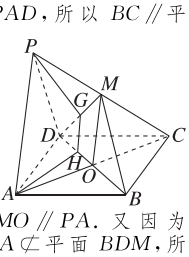


14. 证明：(1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 BC∥AD，又 $BC\not\subset$平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD，所以 BC∥平面 PAD.

(2) 如图，连接 AC，交 BD 于 O，连接 MO.

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

所以 O 是 AC 的中点，又因为 M 是 PC 的中点，所以 MO∥PA. 又因为 $MO\subset$平面 BDM，$PA\not\subset$平面 BDM，所以 PA∥平面 BDM. 又因为 $PA\subset$平面 $PAHG$，平面 $PAHG\cap$平面 $BDM=GH$，所以 AP∥GH.



15. 解：(1) 证明：因为 E，F 分别为 AC_1，A_1C_1 的中点，所以 EF∥A_1A. 因为 B_1B∥A_1A，所以 EF∥B_1B.

又因为 $EF\not\subset$平面 BCC_1B_1，$B_1B\subset$平面 BCC_1B_1，所以 EF∥平面 BCC_1B_1.

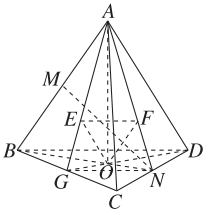
(2) 存在. 当 G 为 BC_1 的中点时，平面 EFG∥平面 ABB_1A_1. 理由如下：取 BC_1 的中点 G，连接 GE，GF.

因为 E 为 AC_1 的中点，所以 GE∥AB. 因为 $GE\not\subset$平面 ABB_1A_1，$AB\subset$平面 ABB_1A_1，所以 GE∥平面 ABB_1A_1.

同理可得，EF∥平面 ABB_1A_1. 又因为 $EF\cap EG=E$，EG，$EF\subset$平面 EFG，所以平面 EFG∥平面 ABB_1A_1.

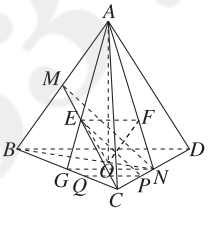
故在线段 BC_1 上存在一点 G，使平面 EFG∥平面 ABB_1A_1.

16. 解：(1) 证明：如图，连接 GN，GD，易知 G，O，D 三点共线. 因为 O，E，F 分别为 $\triangle BCD$，$\triangle ABC$，$\triangle ACD$ 的重心，所以在 $\triangle AGN$ 中，$\dfrac{AE}{AG}=\dfrac{AF}{AN}=\dfrac{2}{3}$，所以 EF∥GN. 在 $\triangle CBD$ 中，因为 G，N 分别是棱 BC，CD 的中点，所以 GN∥BD，所以 EF∥BD. 又 $EF\not\subset$平面 ABD，$BD\subset$平面 ABD，所以 EF∥平面 ABD. 在 $\triangle GAD$ 中，$\dfrac{GO}{GD}=\dfrac{GE}{GA}=\dfrac{1}{3}$，所以 EO∥AD，又 $EO\not\subset$平面 ABD，$AD\subset$平面 ABD，所以 EO∥平面 ABD.



又因为 $EF\cap OE=E$，EF，$OE\subset$平面 OEF，所以平面 OEF∥平面 ABD.

(2) 如图，取线段 CN 上靠近点 N 的三等分点 P，连接 CM，易知 C，E，M 三点共线，连接 EP，因为点 E 为等边三角形 ABC 的重心，$\dfrac{CE}{CM}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{CP}{CN}$，所以 EP∥MN，所以当点 O 在点 P 位置时，满足题意.



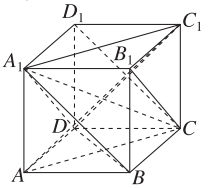
取线段 CG 上靠近点 G 的三等分点 Q，连接 PQ，易知 PQ∥GN，又 GN∥EF，所以 EF∥PQ，所以 EF，PQ 共面，即当 O 在线段 PQ 上运动时，均满足题意，所以 PQ 即为点 O 的轨迹长度，

又 $PQ=\dfrac{2}{3}GN=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{2}{3}$，所以点 O 的轨迹长度为 $\dfrac{2}{3}$.

第 45 讲　直线、平面垂直的判定与性质

1. C ［解析］$\because b$∥α，$\therefore b$ 平行于 α 内的某一条直线，设为 b'，$\because a\perp$平面 α，且 $b'\subset$平面 α，$\therefore a\perp b'$，$\therefore a\perp b$，但 a 与 b 可能相交，也可能异面. 故选 C.

2. D ［解析］如图，对于 A 选项，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，AD∥BC，显然 BC 与 B_1C 不垂直，故 AD 与 B_1C 不垂直，故 A 错误；对于 B 选项，连接 A_1B，可知 $\triangle A_1BD$ 为等边三角形，故 A_1D 与 BD 成 60°角，故 B 错误；对于 C 选项，连接 A_1C_1，AC，易知四边形 ACC_1A_1 为矩形，故 AC_1 与 A_1C 不垂直，故 C 错误；对于 D 选项，连接 C_1D，因为 $AD\perp$平面 CDD_1C_1，$CD_1\subset$平面 CDD_1C_1，所以 $AD\perp CD_1$，又 $CD_1\perp C_1D$，$C_1D\cap AD=D$，C_1D，$AD\subset$平面 ADC_1，所以 $CD_1\perp$平面 ADC_1，又 $AC_1\subset$平面 ADC_1，所以 $AC_1\perp CD_1$，故 D 正确. 故选 D.



3. A ［解析］若 $a\perp\beta$，由 $b\subset\beta$ 可知 $a\perp b$ 成立；若 $a\perp b$，可能 a∥β 或 a 与 β 相交，故不一定有 $a\perp\beta$. 所以“$a\perp\beta$”是“$a\perp b$”的充分不必要条件. 故选 A.

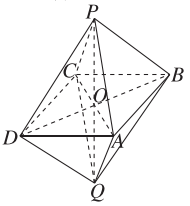
4. C ［解析］若 m 垂直于 AB，由平面 $ABCD\perp$平面 ABB_1A_1，得平面 ABB_1A_1 内的所有直线均与 m 垂直，无法证明 AB 和 n 的关系，故 A，B 错误；若 m 不垂直于 AB，因为 $BB_1\perp m$，所以当 $m\perp n$ 时，BB_1∥n，又因为 $BB_1\perp AB$，所以 n 垂直于 AB，故 C 正确，D 错误. 故选 C.

5. B ［解析］显然，在荡秋千的过程中，秋千绳与墙面始终平行，但与道路所成的角在变化，秋千板与墙面垂直，故也与道路始终垂直. 故选 B.

6. $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha\perp\beta\Rightarrow m\perp n$（或 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$） ［解析］由 α，β 是两个不同的平面，m，n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线，构造命题：$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha\perp\beta\Rightarrow m\perp n$. 由面面垂直的性质定理得 $m\perp n$. 构造命题：$m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$，由面面垂直的判定定理得 $\alpha\perp\beta$. 构造命题：$\alpha\perp\beta$，$n\perp\beta$，$m\perp n\Rightarrow m\perp\alpha$，但这里 m 与 α 相交、平行或 $m\subset\alpha$，故得不出 $m\perp\alpha$. 构造命题：$m\perp n$，$\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\beta$，但这里 n 与 β 相交、平行或 $n\subset\beta$，故得不出 $n\perp\beta$.

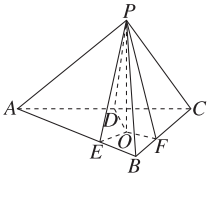
7. ③ ［解析］对于①，设 $\alpha\cap\beta=l$，当 a∥l，$a\not\subset\alpha$，$a\not\subset\beta$ 时，a∥α，a∥β，所以 α 与 β 不一定平行，所以①不正确；对于②，若 a∥b，a∥α，则 b∥α 或 $b\subset\alpha$，所以②不正确；对于③，由 $a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，根据垂直于同一直线的两个平面平行，得 α∥β，所以③正确；对于④，若 $\alpha\perp\beta$，a∥α，则 a 与 β 的位置关系不确定，所以④不正确.

8. C ［解析］因为四棱锥 P-$ABCD$ 与四棱锥 Q-$ABCD$ 的所有侧棱长均为 2，所以点 P，Q 在底面 $ABCD$ 上的射影都是四边形 $ABCD$ 的外心，所以两射影重合，即有 $PQ\perp$平面 $ABCD$，且四边形 $ABCD$ 有外接圆. 对于选项 A，当四边形 $ABCD$ 是 $AB=AC=2$ 的菱形时，四边形 $ABCD$ 没有外接圆，所以选项 A 错误；对于选项 B，当四边形 $ABCD$ 是矩形时，显然满足题意，所以选项 B 错误；对于选项 C，因为直角梯形没有外接圆，所以选项 C 正确；对于选项 D，因为 $PQ\perp$平面 $ABCD$，又 $PQ\subset$平面 APQ，所以平面 $APQ\perp$平面 $ABCD$，所以选项 D 错误. 故选 C.



9. D ［解析］对于 A，因为二面角 A-BC-D 为直二面角，所以平面 $ABC\perp$平面 BCD，又因为平面 $ABC\cap$平面 $BCD=BC$，$CD\perp BC$，且 $CD\subset$平面 BCD，所以 $CD\perp$平面 ABC，所以 A 中判断正确；对于 B，由 $CD\perp$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，可得 $CD\perp AB$，又因为 $AB\perp AC$，且 $AC\cap CD=C$，AC，$CD\subset$平面 ACD，所以 $AB\perp$平面 ACD，故 B 中判断正确；对于 C，因为 $AB\perp$平面 ACD，且 $AB\subset$平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$平面 ACD，故 C 中判断正确；对于 D，因为 $CD\perp$平面 ABC，$CD\subset$平面 BCD，所以平面 $ABC\perp$平面 BCD，若平面 $ABD\perp$平面 BCD，且平面 $ABC\cap$平面 $ABD=AB$，则 $AB\perp$平面 BCD，又 $BC\subset$平面 BCD，可得 $AB\perp BC$，因为 AB 与 BC 不垂直，矛盾，所以平面 ABD 与平面 BCD 不垂直，故 D 中判断不正确. 故选 D.

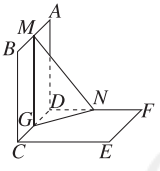
10. A ［解析］如图，过 P 作 $PE\perp AB$ 于 E，$PF\perp BC$ 于 F，$PD\perp AC$ 于 D，则 $PE=PF=PD$，连接 OD，OE，OF，



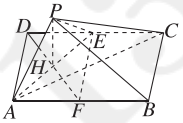
∵$PO\perp$平面ABC，$AC\subset$平面ABC，$AB\subset$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，∴$PO\perp AC$，$PO\perp AB$，$PO\perp BC$，又$PO\cap PD=P$，$PO\cap PE=P$，$PO\cap PF=P$，∴$AC\perp$平面POD，$AB\perp$平面POE，$BC\perp$平面POF，又$OD\subset$平面POD，$OE\subset$平面POE，$OF\subset$平面POF，∴$AC\perp OD$，$AB\perp OE$，$BC\perp OF$.在Rt△POD，Rt△POE，Rt△POF中，$OD=\sqrt{PD^2-PO^2}$，$OE=\sqrt{PE^2-PO^2}$，$OF=\sqrt{PF^2-PO^2}$，∵$PE=PF=PD$，∴$OD=OE=OF$，故O一定是△ABC的内心.故选A.

11. ACD［解析］要成为“$AC_1=A_1C$”的必要条件，则该条件可由“$AC_1=A_1C$”推出.对于A，因为在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1\parallel CC_1$，$AA_1=CC_1$，所以四边形ACC_1A_1为平行四边形，又$AC_1=A_1C$，所以四边形ACC_1A_1为矩形，故A正确；对于B，假设平面$ABB_1A_1\perp$平面ACC_1A_1，由选项A可知四边形ACC_1A_1为矩形，则$AC\perp AA_1$，又平面$ABB_1A_1\cap$平面$ACC_1A_1=AA_1$，$AC\subset$平面ACC_1A_1，所以$AC\perp$平面ABB_1A_1，因为$AB\subset$平面ABB_1A_1，所以$AC\perp AB$，与四边形$ABCD$为正方形矛盾，故B错误；对于C，因为四边形$ABCD$是正方形，所以$AC\perp BD$，因为$AC\perp AA_1$，$AA_1\parallel BB_1$，所以$AC\perp BB_1$，又$BB_1\cap BD=B$，BB_1，$BD\subset$平面BDD_1B_1，所以$AC\perp$平面BDD_1B_1，又$AC\subset$平面$ABCD$，所以平面$BDD_1B_1\perp$平面$ABCD$，故C正确；对于D，因为四边形ACC_1A_1为矩形，O为A_1C_1的中点，易得$OA=OC$，又正方形$ABCD$中，$AD=CD$，OD是公共边，所以△$OAD\cong$△OCD，则$\angle OAD=\angle OCD$，又$BC\parallel AD$，$AB\parallel CD$，所以$\angle OAD$，$\angle OCD$分别为直线OA，BC所成的角(或其补角)与直线OC，AB所成的角(或其补角)，则直线OA，BC所成的角与直线OC，AB所成的角相等，故D正确.故选ACD.

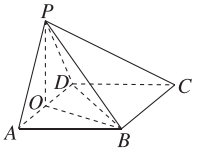
12. $\sqrt{6}$ ［解析］如图，取CD的中点G，连接MG，NG.因为四边形$ABCD$，四边形$DCEF$均为正方形，且边长为2，所以$MG\perp CD$，$MG=2$，$NG=\sqrt{2}$.因为平面$ABCD\perp$平面$DCEF$，平面$ABCD\cap$平面$DCEF=CD$，$MG\subset$平面$ABCD$，所以$MG\perp$平面$DCEF$，又$NG\subset$平面$DCEF$，所以$MG\perp NG$，所以$MN=\sqrt{MG^2+NG^2}=\sqrt{6}$.



13. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ［解析］如图，取AB的中点F，连接DF交AE于点H，连接PH，EF.易知四边形$DEFA$为正方形，则$DF\perp AE$，由翻折前后的不变性可知，$PH\perp AE$，当平面$PAE\perp$平面$ABCE$时，又平面$PAE\cap$平面$ABCE=AE$，$PH\subset$平面PAE，所以$PH\perp$平面$ABCE$.由题意可知，$S_{\triangle ABC}=4$，$PH=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$，所以$V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times4=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.



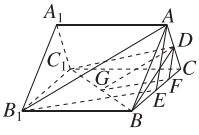
14. 证明：连接OP，BD，如图.由底面$ABCD$为菱形，$\angle BAD=60°$，得$AD=AB=BD$，又因为O为AD的中点，所以$OB\perp AD$.因为在△APD中，$\angle APD=90°$，O为AD的中点，所以$PO=\frac{1}{2}AD=AO$.



设$AD=PB=2a$，则$OB=\sqrt{3}a$，$PO=OA=a$，即$PO^2+OB^2=4a^2=PB^2$，所以$OB\perp OP$，
又因为$OP\cap AD=O$，$OP\subset$平面PAD，$AD\subset$平面PAD，
所以$OB\perp$平面PAD.

15. 解：当点G为DE的中点时，平面$ABC\perp$平面AFG，证明如下：
因为四棱锥$A\text{-}BCDE$是正四棱锥，所以$AD=AE$，$AG\perp DE$，又因为在正方形$BCDE$中，$DE\parallel BC$，所以$AG\perp BC$.
在正方形$BCDE$中，$CD\perp BC$，因为$AF\parallel CD$，所以$AF\perp BC$，因为$AF\cap AG=A$，AF，$AG\subset$平面AFG，所以$BC\perp$平面AFG，因为$BC\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面AFG.

16. 解：(1)证明：如图，取BC的中点E，连接B_1E，AE，则$AE\perp BC$，又因为$ABC\text{-}A_1B_1C_1$为正三棱柱，所以平面$ABC\perp$平面B_1BCC_1，



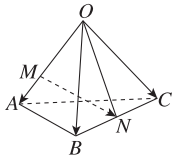
又平面$ABC\cap$平面$B_1BCC_1=BC$，所以$AE\perp$平面B_1BCC_1，又$BC_1\subset$平面B_1BCC_1，所以$AE\perp BC_1$.又$AB=2$，$BB_1=\sqrt{2}$，所以$\tan\angle EB_1B=\frac{BE}{B_1B}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle B_1C_1B=\frac{BB_1}{B_1C_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，
所以$\tan\angle EB_1B=\tan\angle B_1C_1B$，所以$\angle EB_1B=\angle B_1C_1B$，又$\angle B_1C_1B+\angle B_1BC_1=90°$，所以$B_1E\perp BC_1$，
又$AE\cap B_1E=E$，所以$BC_1\perp$平面AB_1E，所以$AB_1\perp BC_1$.
(2)过点D作$DF\perp BC$于点F，如图，由(1)知$AE\perp$平面B_1BCC_1，所以$AE\parallel DF$，所以$DF\perp$平面B_1BCC_1.
又D为AC的中点，所以$AE=2DF$，因为$AB=2$，所以$AE=\sqrt{3}$，所以$DF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$S_{\triangle BCC_1}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，
所以$V_{D\text{-}BCC_1}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCC_1}\times DF=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.
(3)过点F作$FG\perp BC_1$于点G，连接DG，如图，因为$DF\perp$平面B_1BCC_1，且$FG\perp BC_1$，所以$\angle DGF$即为平面DBC_1与平面BCC_1的夹角.
又$\sin\angle FBG=\frac{GF}{BF}=\frac{CC_1}{BC_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$，且$BF=\frac{3}{2}$，所以$GF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
所以$\tan\angle DGF=\frac{DF}{GF}=1$，所以平面$DBC_1$与平面$BCC_1$夹角的大小为$\frac{\pi}{4}$.

第46讲　空间向量及其运算和空间位置关系

1. B ［解析］由题知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1+2x-5=2$，解得$x=4$.故选B.

2. A ［解析］因为$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}=2+0-2=0$，所以$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{a}$，所以直线$l$与平面$\alpha$的位置关系是平行或直线在平面内.故选A.

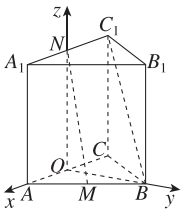
3. B ［解析］连接ON，因为N为BC的中点，所以$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，因为$M$在$OA$上，且$OM=2MA$，所以$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$，所以



$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，故选B.

4. C ［解析］∵$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$，∴$\overrightarrow{OC}$与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不能构成空间的一个基底.故选C.

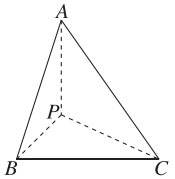
5. CD ［解析］取AC的中点O，连接ON，OB，由题意可知$ON\parallel AA_1$，$OB\perp AC$，因为$AA_1\perp$平面ABC，且AC，$OB\subset$平面ABC，所以$AA_1\perp AC$，$AA_1\perp OB$，则$ON\perp AC$，$ON\perp OB$，即ON，AC，OB两两垂直，以O为坐标原点，OA，OB，ON所在直线分别为x，y，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，则$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,0,0)$，$C_1(-1,0,2)$，$M\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$N(0,0,2)$，可得$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,-\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{3},0)$.设平面$BCC_1B_1$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-x-\sqrt{3}y+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$



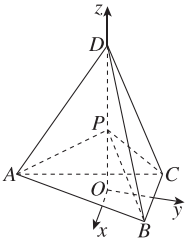
令$x=\sqrt{3}$，则$y=-1$，$z=0$，可得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,0)$.对于选项A，因为$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CA}=-1\neq0$，所以$MN$与$AC$不垂直，故A错误；对于选项B，因为$\frac{-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}}\neq\frac{2}{2}$，所以$MN$与$BC_1$不平行，故B错误；对于选项C，$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{5}$，故C正确；对于选项D，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+0\times2=0$，又$MN\not\subset$平面$BCC_1B_1$，所以$MN\parallel$平面$BCC_1B_1$，故D正确.故选CD.

6. $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ［解析］因为$A(2,1,3)$，$B(2,-2,6)$，$C(3,3,6)$，所以$\overrightarrow{AC}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{AB}=(0,-3,3)$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-6+9=3$，所以向量$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影向量的坐标为$\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{(0,-3,3)}{3\sqrt{2}}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

7. $\frac{1}{2}$ ［解析］如图，因为$PB=PC=1$，$\angle APB=\angle APC=90°$，$\angle BPC=60°$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=1\times1\times\cos60°=\frac{1}{2}$.



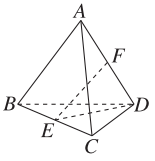
8. D ［解析］由题意知△ABC是边长为$\sqrt{3}$的等边三角形，且$DA=DB=DC=2$，等边三角形ABC的高为$\sqrt{3-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$.以$O$为原点，过点$O$且平行于$BC$的直线为$x$轴，过点$O$且垂直于$BC$的直线为$y$轴，$OD$所在直线为$z$轴建立空间直角坐标系，如图所示，则



$A(0,-1,0)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$D(0,0,\sqrt{3})$，且 $P(0,0,\sqrt{3}\lambda)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{3}\lambda\right)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},0,0)$. 设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PBC 的法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\sqrt{3}\lambda z=0,\\ \overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{m}=\sqrt{3}x=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $\boldsymbol{m}=(0,2\sqrt{3}\lambda,1)$，因为 $PA\perp$ 平面 PBC，所以 $\overrightarrow{AP}=k\boldsymbol{m}$，$k$ 为实数，则 $\begin{cases}2\sqrt{3}\lambda k=1,\\ k=\sqrt{3}\lambda,\\ 0\leqslant\lambda\leqslant1,\end{cases}$ 得 $\lambda=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 D.

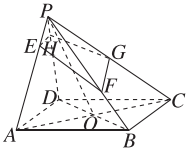
9. C ［解析］$\because\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{SB}=(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB})+(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB})=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，$\therefore(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{BS})\cdot(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA})=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BA}^2=0$，$\therefore|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BA}|$，即 $BC=BA$，$\therefore\triangle ABC$ 是等腰三角形. 故选 C.

10. D ［解析］如图，取 BC 的中点 E，AD 的中点 F，连接 ED，EF，则 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=|2\overrightarrow{PE}|=2\sqrt{2}$，所以 $|\overrightarrow{PE}|=\sqrt{2}$，故点 P 的轨迹是以 E 为球心，以 $\sqrt{2}$ 为半径的球面. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PD}=-(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FA})\cdot(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FD})=-(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FA})\cdot(\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{FA})=|\overrightarrow{FA}|^2-|\overrightarrow{PF}|^2=4-|\overrightarrow{PF}|^2$. 因为 $ED=\sqrt{DC^2-CE^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$，$EF=\sqrt{DE^2-DF^2}=\sqrt{12-4}=2\sqrt{2}$，所以 $|\overrightarrow{PF}|_{\min}=EF-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{PF}|_{\max}=EF+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的取值范围为 $[-14,2]$. 故选 D.



11. BC ［解析］对于 A，连接 A_1C_1，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\parallel CC_1$，$AA_1=CC_1$，所以四边形 A_1ACC_1 为平行四边形，所以 $AC/\!/A_1C_1$，则 A，C，C_1，A_1 四点共面，则平面 ACC_1 即为平面 A_1ACC_1，而直线 A_1B 显然与该平面相交于点 A_1，故 A 错误. 对于 B，$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=-6^2+6^2+6\times6\times\frac{1}{2}-6\times6\times\frac{1}{2}=0$，所以 $\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{DB}$，即 $AC_1\perp DB$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0$，所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $AC\perp BD$，因为 $AC\cap AC_1=A$，AC，$AC_1\subset$ 平面 ACC_1，所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1，故 B 正确. 对于 C，$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$，所以 $\overrightarrow{AC_1}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=36+36+36+2\times6\times6\times\cos60^\circ+2\times6\times6\times\cos60^\circ+2\times6\times6\times\cos60^\circ=216$，所以 $AC_1=\sqrt{216}=6\sqrt{6}$，故 C 正确. 对于 D，$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $|\overrightarrow{BD_1}|^2=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=72$，所以 $|\overrightarrow{BD_1}|=6\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=108$，所以 $|\overrightarrow{AC}|=6\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2=6^2+6\times6\times\frac{1}{2}+6\times6\times\frac{1}{2}-6^2=36$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD_1}|}=\frac{36}{6\sqrt{3}\times6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故 D 错误. 故选 BC.

12. $\frac{2}{9}$ ［解析］连接 AC，BD 交于点 O，则 O 为 AC，BD 的中点，连接 PO，则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$. 设 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{PH}$，则 $4\overrightarrow{PE}+2\overrightarrow{PG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PF}+\lambda\overrightarrow{PH}$，即 $\overrightarrow{PE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PG}+\frac{3}{8}\overrightarrow{PF}+\frac{\lambda}{4}\overrightarrow{PH}$，因为 E，F，G，H 四点共面，所以 $-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{\lambda}{4}=1$，所以 $\lambda=\frac{9}{2}$，所以 $PH=\frac{2}{9}PD$.



13. $\frac{1}{2}$ ［解析］以 A 为坐标原点，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，设正方体的棱长为 1，则 $A(0,0,0)$，$O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$N\left(\frac{1}{2},0,1\right)$. 设 $M(0,1,a)(0\leqslant a\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{ON}=(0,1,a)\cdot\left(0,-\frac{1}{2},1\right)=-\frac{1}{2}+a=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$. 故当 $\frac{DM}{DD_1}=\frac{1}{2}$ 时，$ON\perp AM$.

14. 证明：(1) 连接 BG，$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$，由共面向量定理的推论知，$E$，$F$，$G$，$H$ 四点共面.

(2) $\because E$，H 分别为 AB，AD 的中点，$\therefore\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\therefore\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，$\therefore EH/\!/BD$.

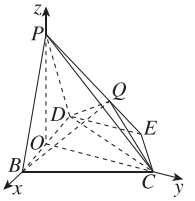
又 $EH\subset$ 平面 $EFGH$，$BD\not\subset$ 平面 $EFGH$，$\therefore BD/\!/$ 平面 $EFGH$.

(3) $\because\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，$\therefore\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形. 又 $\because M$ 是 EG 和 FH 的交点，$\therefore M$ 为 EG，FH 的中点，$\therefore\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right]=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

15. 解：(1) 证明：因为 DE 垂直平分 AB，所以 $DE\perp AD$，$DE\perp BD$，即 $DE\perp PD$，$DE\perp BD$，又 $PD\cap BD=D$，PD，$BD\subset$ 平面 PBD，所以 $DE\perp$ 平面 PBD，又因为 $DE\subset$ 平面 $BCED$，所以平面 $PBD\perp$ 平面 $BCED$.

(2) 由 (1) 可知 $DE\perp PD$，$DE\perp BD$，则 $\angle PDB$ 为二面角 $P\text{-}DE\text{-}B$ 的平面角，即 $\angle PDB=\frac{\pi}{3}$，又因为 $PD=BD$，所以 $\triangle PDB$ 为等边三角形.

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$BC=2$，$B=\frac{\pi}{3}$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B}=2\sqrt{3}$，则 $AB^2=AC^2+BC^2$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$.



连接 CD，因为 D 为 AB 的中点，所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形.

取 BD 的中点 O，连接 PO，OC，则 $PO\perp BD$，$OC\perp BD$，又因为平面 $PBD\perp$ 平面 $BCED$，平面 $PBD\cap$ 平面 $BCED=BD$，$PO\subset$ 平面 PBD，所以 $PO\perp$ 平面 $BCED$，又 $OC\subset$ 平面 $BCED$，所以 $PO\perp OC$，故以 O 为坐标原点，OB，OC，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$E\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$，可得 $\overrightarrow{BD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$，$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right)$. 设 $Q(x_1,y_1,z_1)$，由 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PE}(0<\lambda<1)$，得 $(x_1,y_1,z_1-\sqrt{3})=\lambda\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right)$，则 $\begin{cases}x_1=-\lambda,\\ y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\lambda,\\ z_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,\end{cases}$ 故 $Q\left(-\lambda,\frac{2\sqrt{3}}{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$，所以 $\overrightarrow{BQ}=\left(-\lambda-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$.

设平面 BDQ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x(-\lambda-1)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\lambda y+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z=0,\\ -2x=0,\end{cases}$ 令 $y=3$，则 $x=0$，$z=\frac{2\lambda}{\lambda-1}$，则 $\boldsymbol{m}=\left(0,3,\frac{2\lambda}{\lambda-1}\right)$. 设平面 EDQ（即平面 PDE）的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{2\sqrt{3}}{3}b=0,\\ a+\sqrt{3}c=0,\end{cases}$ 令 $a=-\sqrt{3}$，则 $b=0$，$c=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},0,1)$. 由题意可得 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{2|\lambda|}{|\lambda-1|}}{2\cdot\sqrt{9+\frac{4\lambda^2}{(\lambda-1)^2}}}=\frac{2}{5}$，整理得 $3\lambda^2-8\lambda+4=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$ 或 $\lambda=2$（舍），所以 $\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PE}$，故 $V_{Q\text{-}BCED}=\frac{1}{3}V_{P\text{-}BCED}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}S_{\text{四边形}BCED}\cdot PO=\frac{\sqrt{3}}{9}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4}{9}$，

所以四棱锥 $Q\text{-}BCED$ 的体积为 $\frac{4}{9}$.

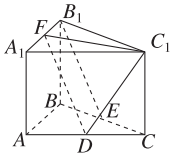
第 47 讲　空间角

1. D ［解析］设两平面的夹角为 θ，则

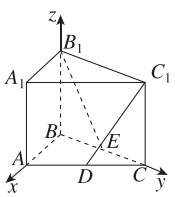
$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1\times(-1)+2\times2+2\times0}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\times\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}}=\dfrac{3}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

2. C ［解析］$\because\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore l$ 与法向量 $\boldsymbol{n}$ 所在直线所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore l$ 与 α 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$. 故选 C.

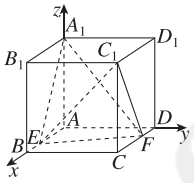
3. D ［解析］方法一：设 $AB=2$，取 A_1B_1 的中点 F，连接 C_1F，DF，则 $DF/\!/B_1E$，则 $\angle C_1DF$（或其补角）为异面直线 C_1D 与 B_1E 所成的角. 易得 $DF=B_1E=\sqrt{5}$，$C_1F=\sqrt{5}$，$C_1D=\sqrt{6}$，所以 $\cos\angle C_1DF=\dfrac{\frac{1}{2}C_1D}{DF}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.



方法二：由题意知 AB，BC，BB_1 两两垂直，以 B 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AB=BC=AA_1=2$，则 $B_1(0,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，$D(1,1,0)$，$E(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{DC_1}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{EB_1}=(0,-1,2)$，设直线 C_1D 与 B_1E 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{EB_1}|}{|\overrightarrow{DC_1}|\cdot|\overrightarrow{EB_1}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. 故选 D.

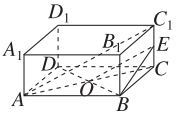


4. A ［解析］以 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图，则 $E(2,0,0)$，$F(1,3,0)$，$C_1(3,3,3)$，$A_1(0,0,3)$，所以 $\overrightarrow{EF}=(-1,3,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(1,3,3)$，$\overrightarrow{EA_1}=(-2,0,3)$. 设平面 EFC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}_1=-x_1+3y_1=0,\\ \overrightarrow{EC_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=x_1+3y_1+3z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(3,1,-2)$. 设平面 EFA_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}_2=-x_2+3y_2=0,\\ \overrightarrow{EA_1}\cdot\boldsymbol{n}_2=-2x_2+3z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$，则 $\boldsymbol{n}_2=(3,1,2)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{9+1-4}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\dfrac{3}{7}$，所以平面 A_1EF 与平面 C_1EF 的夹角的余弦值为 $\dfrac{3}{7}$. 故选 A.



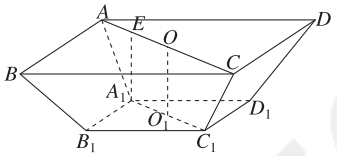
5. D ［解析］设平面 ABO 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$A(a,0,0)(a>0)$，$B(0,b,0)(b>0)$，则 $\overrightarrow{OA}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,b,0)$，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax=0,\\ by=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$. 由题知 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{1\times\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{2}{3}$. 故选 D.

6. $2\sqrt{3}$ ［解析］连接 AC，交 DB 于点 O，取 CC_1 的中点 E，连接 OE，BE. 因为 $AC_1/\!/OE$，所以 BD 与 AC_1 所成的角为 $\angle BOE$（或其补角），所以 $\cos\angle BOE=\dfrac{\sqrt{7}}{10}$.



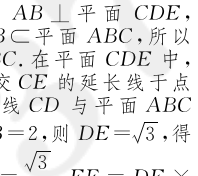
设 $EC=x(x>0)$，在 $\triangle BEO$ 中，由 $AB=8$，$AD=6$，得 $OB=5$. 又 $OE=\sqrt{x^2+25}$，$BE=\sqrt{x^2+36}$，所以由余弦定理得 $\cos\angle BOE=\dfrac{OE^2+OB^2-BE^2}{2OE\cdot OB}=\dfrac{x^2+25+5^2-(x^2+36)}{2\sqrt{x^2+25}\times5}=\dfrac{\sqrt{7}}{10}$，可得 $x=\sqrt{3}$，所以 $CC_1=2\sqrt{3}$.

7. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ［解析］如图所示，在正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，取 O，O_1 分别是底面 $ABCD$、底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，连接 OO_1，AC，A_1C_1，过点 A_1 作 $A_1E\perp AC$，垂足为 E，$\because A_1E/\!/OO_1$，$\therefore A_1E\perp$ 底面 $ABCD$，$\therefore$ 该四棱台的侧棱与底面所成的角为 $\angle A_1AE$. 由题得 $C_1A_1=22\sqrt{2}$，$CA=40\sqrt{2}$，$AA_1=18$，$\therefore AE=\dfrac{40\sqrt{2}-22\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$，$\therefore\cos\angle A_1AE=\dfrac{AE}{AA_1}=\dfrac{9\sqrt{2}}{18}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

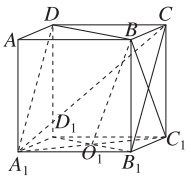


8. C ［解析］记 AB 的中点为 E，连接 CE，DE，由题意可知 $AB\perp CE$，$AB\perp DE$，又 $CE\cap DE=E$，所以 $AB\perp$ 平面 CDE，$\angle CED=150°$，又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $CDE\perp$ 平面 ABC. 在平面 CDE 中，过点 D 作 $DF\perp CE$ 交 CE 的延长线于点 F，则 $\angle DCF$ 即为直线 CD 与平面 ABC 所成的角，不妨设 $AB=2$，则 $DE=\sqrt{3}$，得 $DF=DE\times\sin30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$EF=DE\times\cos30°=\dfrac{3}{2}$，$CF=CE+EF=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$，所以 $\tan\angle DCF=\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. 故选 C.

9. B ［解析］易知 2 点时和 8 点时钟面上的时针所在直线重合. 如图，在正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为侧面 ABB_1A_1 和侧面 BCC_1B_1 的中心，G 为 BB_1 的中点，EN 为 2 点钟时针，FM 为 8 点钟时针，则 $\angle NEG=30°$，$\angle MFG=30°$. 设正四棱柱的底面边长为 a，侧棱长为 b，以 D 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $E\left(a,\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$，$N\left(a,a,\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)$，$F\left(\dfrac{a}{2},a,\dfrac{b}{2}\right)$，$M\left(a,a,\dfrac{b}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)$，所以 $\overrightarrow{EN}=\left(0,\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)$，$\overrightarrow{FM}=\left(\dfrac{a}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{EN},\overrightarrow{FM}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{FM}|}{|\overrightarrow{EN}|\cdot|\overrightarrow{FM}|}=\dfrac{\frac{1}{12}a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{1}{12}a^2}\times\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{1}{12}a^2}}=\dfrac{1}{4}$. 所以在 2 点时和 8 点时，相邻两钟面上的时针所在的两条直线所成的角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. 故选 B.

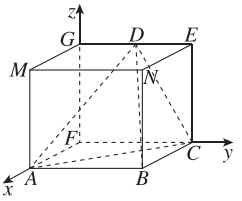


10. ABD ［解析］如图，易证 $BC_1\perp$ 平面 B_1CDA_1，所以 $BC_1\perp DA_1$，$BC_1\perp CA_1$，故 A 选项正确，B 选项正确；连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O_1，连接 BO_1，则 $C_1O_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，所以 $\angle C_1BO_1$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，在 Rt$\triangle BO_1C_1$ 中，因为 $O_1C_1=\dfrac{1}{2}BC_1$，所以 $\angle C_1BO_1=30°$，故 C 选项错误；因为 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle C_1BC=45°$ 即为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，故 D 选项正确. 故选 ABD.

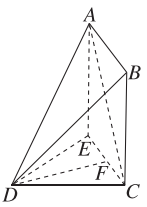


11. AD ［解析］过点 P 作 $a'/\!/a$，$b'/\!/b$，根据对称性及异面直线所成角的范围为 $0°<\theta\leqslant90°$ 得，过点 P 的直线为 a'，b' 所成角的平分线或过点 P 的直线与直线 a'，b' 确定的平面垂直时，满足过点 P 与 a，b 所成的角均为 θ 的直线有且只有一条，故 $\theta=30°$ 或 $\theta=90°$. 故选 AD.

12. $\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}$ ［解析］方法一：如图所示，在长方体 $ABCF\text{-}MNEG$ 中，易知点 D 在直线 GE 上. 由 $V_{四面体ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}\times CE=12\sqrt{2}$，解得 $CE=3\sqrt{2}$，故 $DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{24-18}=\sqrt{6}$. 以 F 为原点，FA，FC，FG 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(2\sqrt{6},0,0)$，$B(2\sqrt{6},2\sqrt{6},0)$，$C(0,2\sqrt{6},0)$，$D(0,\sqrt{6},3\sqrt{2})$ 或 $D(0,3\sqrt{6},3\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{AD}=(-2\sqrt{6},\sqrt{6},3\sqrt{2})$ 或 $\overrightarrow{AD}=(-2\sqrt{6},3\sqrt{6},3\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{6},0,0)$. 设异面直线 AD 与 BC 所成的角为 θ，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{24}{2\sqrt{6}\times4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{24}{2\sqrt{6}\times4\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，可得 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，故异面直线 AD 与 BC 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}$.

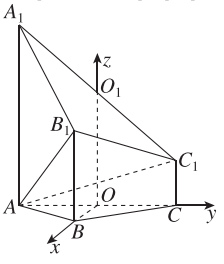


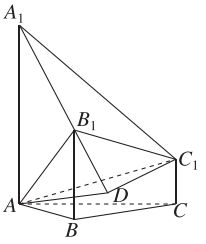
方法二：如图，过点 A 作 $AE/\!/BC$ 且 $AE=BC$，连接 CE，DE，所以 $\angle DAE$（或其补角）即为异面直线 AD 与 BC 所成的角. 易知四边形 $AECB$ 是正方形，所以 $AE\perp CE$，因为 $BC\perp CD$，$AE/\!/BC$，所以 $AE\perp CD$，又 $CE\subset$ 平面 CDE，$CD\subset$ 平面 CDE，$CE\cap CD=C$，所以 $AE\perp$ 平面 CDE，又 $DE\subset$ 平面 CDE，所以 $AE\perp ED$. 过点 D 作 $DF\perp CE$ 于点 F，因为 $AE\perp$ 平面 CDE，$DF\subset$ 平面 CDE，所以 $DF\perp AE$，又 $AE\cap CE=E$，AE，$CE\subset$ 平面 $AECB$，所以 $DF\perp$ 平面 $AECB$. 因为四面体 $ABCD$ 的体积为 $12\sqrt{2}$，所以四棱锥 $D\text{-}ABCE$



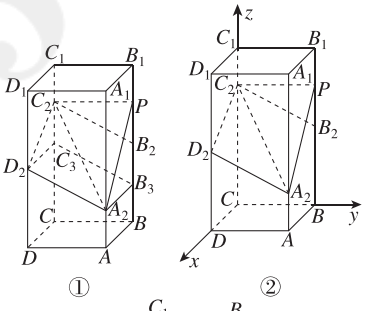
的体积为 $24\sqrt{2}=\frac{1}{3}S_{正方形ABCE}\cdot DF=\frac{1}{3}\times 24\cdot DF$，所以 $DF=3\sqrt{2}$，又 $CD=CE=2\sqrt{6}$，所以 $\sin\angle DCE=\frac{DF}{DC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\angle DCE\in(0,\pi)$，所以 $\angle DCE=\frac{\pi}{3}$ 或 $\angle DCE=\frac{2\pi}{3}$. 当 $\angle DCE=\frac{\pi}{3}$ 时，$\triangle DEC$ 为等边三角形，$DE=2\sqrt{6}$，在 Rt$\triangle ADE$ 中，$\tan\angle DAE=\frac{DE}{AE}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=1$，则 $\angle DAE=\frac{\pi}{4}$；当 $\angle DCE=\frac{2\pi}{3}$ 时，$CD=CE=2\sqrt{6}$，$DE=6\sqrt{2}$，在 Rt$\triangle ADE$ 中，$\tan\angle DAE=\frac{DE}{AE}=\frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\sqrt{3}$，则 $\angle DAE=\frac{\pi}{3}$. 故异面直线 AD 与 BC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{3}$.

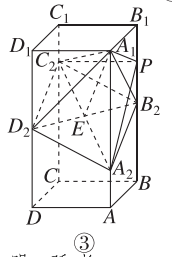
13. $\frac{4}{3}$ ［解析］由题意可知，外接球的球心 $O\in PQ$，且 $PQ\perp$ 平面 ABC，即 PQ 为外接球的直径，$PQ=2$，设 $PQ\cap$ 平面 $ABC=G$，可知 G 为等边三角形 ABC 的中心，取 AB 的中点 E，连接 PE，QE，则 $PE\perp AB$，$QE\perp AB$，可知二面角 P-AB-Q 的平面角为 $\angle PEQ$，则 $\angle PEQ=120°$，设 $EG=a$，$OG=b$，$\angle PEC=\alpha$，$\angle QEC=\beta$，则 $CG=2a$，$\alpha+\beta=120°$，$PG=1+b$，$QG=1-b$. 因为 $CG^2=OC^2-OG^2$，所以 $4a^2=1-b^2$，又因为 $\tan\alpha=\frac{PG}{EG}=\frac{1+b}{a}$，$\tan\beta=\frac{QG}{EG}=\frac{1-b}{a}$，且 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$，则 $-\sqrt{3}=\frac{\frac{1+b}{a}+\frac{1-b}{a}}{1-\frac{1+b}{a}\cdot\frac{1-b}{a}}=\frac{\frac{2}{a}}{1-\frac{1-b^2}{a^2}}=\frac{\frac{2}{a}}{1-4}=-\frac{2}{3a}$，解得 $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$，所以 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}a=\frac{4}{3}$.

14. 解：(1)证明：方法一(几何法)：
由 $AB=2$，$AA_1=4$，$BB_1=2$，$AA_1\perp AB$，$BB_1\perp AB$ 得 $AB_1=A_1B_1=2\sqrt{2}$，所以 $A_1B_1^2+AB_1^2=AA_1^2$，即有 $AB_1\perp A_1B_1$. 由 $BC=2$，$BB_1=2$，$CC_1=1$，$BB_1\perp BC$，$CC_1\perp BC$ 得 $B_1C_1=\sqrt{5}$，由 $AB=BC=2$，$\angle ABC=120°$ 得 $AC=2\sqrt{3}$，由 $CC_1\perp AC$，得 $AC_1=\sqrt{13}$，所以 $AB_1^2+B_1C_1^2=AC_1^2$，即有 $AB_1\perp B_1C_1$，又 $A_1B_1\cap B_1C_1=B_1$，A_1B_1，$B_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.
方法二(向量法)：


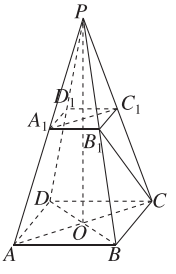
取 AC 的中点 O，连接 OB，则 $OB\perp AC$，过点 O 作 $OO_1\parallel AA_1$，交 A_1C_1 于点 O_1，则 $OO_1\perp AC$，$OO_1\perp OB$，故以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系.
由题意知 $A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$A_1(0,-\sqrt{3},4)$，$B_1(1,0,2)$，$C_1(0,\sqrt{3},1)$，所以 $\overrightarrow{AB_1}=(1,\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,2\sqrt{3},-3)$，
由 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0$ 得 $AB_1\perp A_1B_1$，由 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$ 得 $AB_1\perp A_1C_1$，因为 $A_1B_1\cap A_1C_1=A_1$，A_1B_1，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.
(2)方法一(定义法)：


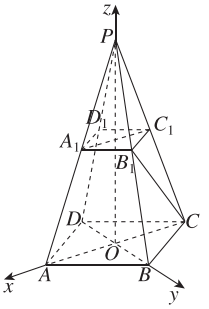
如图，过点 C_1 作 $C_1D\perp A_1B_1$，交直线 A_1B_1 于点 D，连接 AD.
因为 $AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$AB_1\subset$ 平面 ABB_1，所以平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1，
由 $C_1D\perp A_1B_1$ 得 $C_1D\perp$ 平面 ABB_1，所以 $\angle C_1AD$ 是直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角. 由 $B_1C_1=\sqrt{5}$，$A_1B_1=2\sqrt{2}$，$A_1C_1=\sqrt{21}$ 得 $\cos\angle C_1A_1B_1=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$，$\sin\angle C_1A_1B_1=\frac{1}{\sqrt{7}}$，所以 $C_1D=\sqrt{3}$，故 $\sin\angle C_1AD=\frac{C_1D}{AC_1}=\frac{\sqrt{39}}{13}$. 因此直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.
方法二(向量法)：
设直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角为 θ. 由(1)可知 $\overrightarrow{AC_1}=(0,2\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，设平面 ABB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ 2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,0)$，所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.
因此直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.
方法三(定义法+等积法)：
设直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角为 θ，点 C_1 到平面 ABB_1 的距离为 d. 因为 $C_1C\parallel$ 平面 ABB_1，所以点 C 到平面 ABB_1 的距离等于点 C_1 到平面 ABB_1 的距离. 由条件易得，点 C 到平面 ABB_1 的距离等于点 C 到直线 AB 的距离，而点 C 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{3}$，所以 $d=\sqrt{3}$，故 $\sin\theta=\frac{d}{AC_1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.
因此直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

15. 解：(1)证明：方法一：如图①，作 $A_2B_3\parallel AB$ 交 BB_1 于 B_3，$D_2C_3\parallel DC$ 交 CC_1 于 C_3，连接 B_3C_3，易知 $A_2B_3\parallel D_2C_3$，且 $A_2B_3=D_2C_3$，所以四边形 $A_2B_3C_3D_2$ 是平行四边形，所以 $A_2D_2\parallel B_3C_3$. 因为 $B_2B_3\parallel C_2C_3$，$B_2B_3=C_2C_3$，所以四边形 $B_2B_3C_3C_2$ 是平行四边形，所以 $B_3C_3\parallel B_2C_2$，所以 $B_2C_2\parallel A_2D_2$.
方法二：因为 $\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{DD_2}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_2A}=\overrightarrow{A_2D_2}$，$B_2$，$C_2$，$A_2$，$D_2$ 四点不共线，所以 $B_2C_2\parallel A_2D_2$.
(2)方法一：如图②，以 C 为原点，以 CD，CB，CC_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A_2(2,2,1)$，$C_2(0,0,3)$，$D_2(2,0,2)$，设 $P(0,2,t)(0\leqslant t\leqslant 4)$，则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2P}=(-2,0,t-1)$. 设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 $A_2C_2D_2$，A_2C_2P 的法向量，则 $\begin{cases}-2x_1-2y_1+2z_1=0,\\ -2y_1+z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$，同理 $\boldsymbol{n}_2=(t-1,3-t,2)$. 由题得 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{2}=\left|\frac{(t-1)+(3-t)+4}{\sqrt{6}\times\sqrt{(t-1)^2+(3-t)^2+4}}\right|$，整理得 $t^2-4t+3=0$，解得 $t=1$ 或 $t=3$，则 $B_2P=|2-t|=1$.
方法二：如图③，连接 A_2B_2，易证四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 为菱形，连接 B_2D_2，设 A_2C_2 与 B_2D_2 相交于点 E.
因为二面角 P-A_2C_2-D_2 为 150°，所以直线 B_2E 与平面 PA_2C_2 所成的角为 30°，易知 $B_2E=\sqrt{2}$，所以点 B_2 到平面 PA_2C_2 的距离 $d_1=B_2E\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
连接 A_1B_2，A_1D_2，A_1E，A_1C_2，A_1P，由 $A_1B_2=A_1D_2=2\sqrt{2}$，得 $A_1E\perp B_2D_2$，由 $A_1C_2=A_1A_2=3$，得 $A_1E\perp A_2C_2$，又 $A_2C_2\cap B_2D_2=E$，所以 $A_1E\perp$ 平面 $A_2B_2C_2$. 因为二面角 P-A_2C_2-D_2 为 150°，所以 A_1E 与平面 PA_2C_2 所成的角为 60°，易知 $A_1E=\sqrt{6}$，所以点 A_1 到平面 PA_2C_2 的距离 $d_2=A_1E\sin 60°=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 所以 $\frac{V_{A_1\text{-}PA_2C_2}}{V_{B_2\text{-}PA_2C_2}}=\frac{d_2}{d_1}=3$.
又 C_2 到平面 PA_1A_2 和平面 PA_2B_2 的距离都为 2(平面 PA_1A_2 和平面 PA_2B_2 为同一个平面)，所以 $\frac{S_{\triangle PA_1A_2}}{S_{\triangle PA_2B_2}}=3$，所以 $A_1A_2=3B_2P=3$，解得 $B_2P=1$.


①　②


③

16. 解：(1)证明：延长 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 交于一点 P，连接 BD 交 AC 于点 O，连接 PO，


则四棱锥 P-$ABCD$ 为正四棱锥，
即 $PA=PB=PC=PD$，又点 O 分别为 AC，BD 的中点，
所以 $PO\perp AC$，$PO\perp BD$，而 $AC\cap BD=O$，AC，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，
所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，
又 $PO\subset$ 平面 ACC_1A_1，
所以平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$.
(2)由(1)知 OA，OB，OP 两两垂直，故以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图.


设棱台的高为 h，则 $C(-2\sqrt{2},0,0)$，$B_1(0,\sqrt{2},h)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$. 易知平面 ACC_1A_1

的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，而 $\overrightarrow{B_1C}=(-2\sqrt{2},-\sqrt{2},-h)$，由题意知直线 B_1C 与平面 ACC_1A_1 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$，则其正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+6^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$，设直线 B_1C 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h^2+10}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$，可得 $h=4$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,-\sqrt{2},4)$，设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y=0,\\ \overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{2}y+4z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$，

故 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$，则平面 BCC_1B_1 与平面 ACC_1A_1 的夹角的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

17. 解：(1)证明：连接 PM，在 $\triangle DCM$ 中，由余弦定理可得 $DM=\sqrt{DC^2+MC^2-2DC\cdot MC\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$，

所以 $DM^2+DC^2=CM^2$，

所以 $\angle MDC=90^\circ$，所以 $DM\perp DC$.

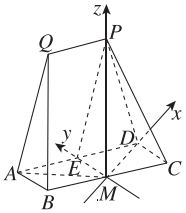
又因为 $DC\perp PD$，$DM\cap PD=D$，DM，$DP\subset$ 平面 PDM，所以 $DC\perp$ 平面 PDM，又 $PM\subset$ 平面 PDM，所以 $DC\perp PM$. 因为 $PQ/\!/BM$，$PQ=BM=2$，所以四边形 $PQBM$ 为平行四边形，所以 $PM/\!/QB$，又 $AB/\!/DC$，所以 $AB\perp BQ$，

所以 $\angle ABQ=90^\circ$.

(2)因为 $QB\perp MD$，

所以 $PM\perp MD$，

又 $PM\perp CD$，$DC\cap MD=D$，DC，$MD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$.



取 AD 的中点 E，连接 PE，EM，AM，设 $PM=h$，则多面体 $ABCDPQ$ 的体积 $V=V_{三棱柱ABQ\text{-}EMP}+V_{四棱锥P\text{-}CDEM}=3V_{三棱锥A\text{-}PEM}+V_{四棱锥P\text{-}CDEM}=3V_{三棱锥P\text{-}AEM}+V_{四棱锥P\text{-}CDEM}=S_{\triangle AEM}\times h+\frac{1}{3}S_{四边形CDEM}\times h=S_{\triangle AEM}\times h+\frac{1}{3}\times 2S_{\triangle AEM}\times h=\frac{5}{3}S_{\triangle AEM}\times h=\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin\frac{2\pi}{3}\times h=\frac{15}{2}$，解得 $PM=h=3\sqrt{3}$. 以 M 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $C(\sqrt{3},-1,0)$，$D(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,0,3\sqrt{3})$，$M(0,0,0)$，所以 $\overrightarrow{CD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{PD}=(\sqrt{3},0,-3\sqrt{3})$，设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$

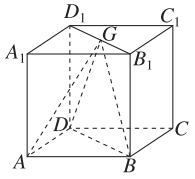
即 $\begin{cases}y=0,\\ \sqrt{3}x-3\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $\boldsymbol{m}=(3,0,1)$，易知平面 QAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以平面 PCD 与平面 QAB 夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

第 48 讲　空间距离及立体几何中的探索性问题

1. C　[解析] 根据题意可知 $\overrightarrow{AP}=(2,6,-2)$，显然 $\overrightarrow{AP}=(2,6,-2)$ 在向量 $\boldsymbol{n}=(-3,0,4)$ 上的投影向量的长度即为 $P(3,5,0)$ 到 l 的距离，所以点 P 到 l 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-6+0-8|}{5}=\frac{14}{5}$. 故选 C.

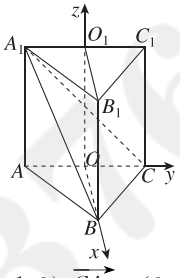
2. D　[解析] 由题意得 $\overrightarrow{AB}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,1)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$，所以 $\sin\angle ABC=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$，所以点 A 到直线 BC 的距离 $d=|\overrightarrow{AB}|\sin\angle ABC=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{\sqrt{105}}{5}$. 故选 D.

3. B　[解析] 由题意得 $V_{G\text{-}ABD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}\cdot BB_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$.



设点 B 到平面 GAD 的距离为 h，则 $V_{B\text{-}AGD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ADG}\cdot h=V_{G\text{-}ABD}=\frac{4}{3}$，当 G 与 B_1 重合时，$S_{\triangle ADG}$ 最大，最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，此时 h 最小，即为 $\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 故选 B.

4. B　[解析] 设 O，O_1 分别是 AC，A_1C_1 的中点，连接 OO_1，OB，O_1B_1，根据正三棱柱的几何性质可知 OB，OC，OO_1 两两垂直，以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,-1,2)$，$C_1(0,1,2)$，所以 $\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{CA_1}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$. 设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{3}x-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=-2y+2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$. 因为 $B_1C_1/\!/BC$，$B_1C_1\not\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 A_1BC，所以 $B_1C_1/\!/$ 平面 A_1BC，所以 B_1C_1 到平面 A_1BC 的距离即为点 C_1 到平面 A_1BC 的距离，即为 $\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 故选 B.



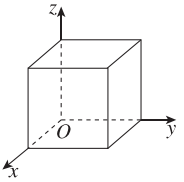
5. C　[解析] 由题得 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{AP}=(0,-1,0)$，设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，所以所求距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{3}$. 故选 C.

6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　[解析] 由题得 $\overrightarrow{PA}=(-2,0,-1)$，则点 P 到 l 所在平面的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(-2)\times 1+0+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 2　$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　[解析] 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，因为 $B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $DD_1\perp B_1D_1$，又 $DD_1\perp CD$，所以 DD_1 是异面直线 B_1D_1 与 CD 的公垂线段，又 $DD_1=2$，所以异面直线 B_1D_1 与 CD 的距离为 2. 因为 $CD/\!/AB$，$CD\not\subset$ 平面 ABD_1，$AB\subset$ 平面 ABD_1，所以 $CD/\!/$ 平面 ABD_1，所以 CD 到平面 ABD_1 的距离就是异面直线 BD_1 与 CD 的距离，即点 D 到平面 ABD_1 的距离就是异面直线 BD_1 与 CD 的距离，设其为 h，由题得 $AD_1=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，因为 $V_{D_1\text{-}ABD}=V_{D\text{-}ABD_1}$，所以 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times 2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5}\times h$，所以 $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以异面直线 BD_1 与 CD 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

8. A　[解析] 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{d}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{C_1E}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{d}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=a$，$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=a\times a\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a^2$，所以 $|\overrightarrow{AC_1}|=|\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{5}a$，$|\overrightarrow{C_1E}|=\frac{1}{2}a$，$\overrightarrow{C_1E}\cdot\overrightarrow{AC_1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})=-a^2$，所以点 E 到直线 AC_1 的距离为 $\sqrt{\overrightarrow{C_1E}^2-\left(\overrightarrow{C_1E}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\left(\frac{-a^2}{\sqrt{5}a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{10}a$. 故选 A.

9. A　[解析] 建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体的棱长为 2. 对于 A，$P(2,2,2)$，$A(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{AP}=(2,2,1)$，设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=x-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=y-z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，设点 P 到平面 ABC 的距离为 d，则 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2+2+1}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$，易知 $\triangle ABC$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{5}{6}$. 对于 B，易求得 $S_{\triangle PAC}=\frac{3}{2}$，点 B 到平面 PAC 的距离为 1，所以 $V_{P\text{-}ABC}=V_{B\text{-}PAC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAC}\cdot 1=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{1}{2}$. 对于 C，$P(2,2,0)$，$A(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AP}=(2,2,-1)$，设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=x_1-z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=y_1+z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，则 $z_1=1$，$y_1=-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$，设点 P 到平面 ABC 的距离为 d_1，则 $d_1=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|2-2-1|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，易求得 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot d_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6}$. 对于 D，易求得 $S_{\triangle PBC}=\frac{3}{2}$，点 A 到平面

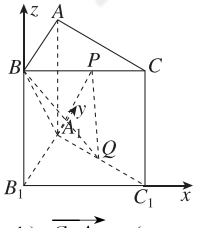


PBC 的距离为 1，所以 $V_{P\text{-}ABC}=V_{A\text{-}PBC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PBC}\cdot 1=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{1}{2}$. 故选 A.

10. D ［解析］因为四面体 $ABCD$ 满足 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\cos\angle CAD=\frac{1}{3}$，$\cos\angle DAB=\frac{1}{4}$，$AB=2$，$AC=3$，$AD=2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=2$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=1$. 设平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{n}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{n}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+6y+z=0,\\ -3x-y+3z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $x=1$，$y=0$，所以 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{AB^2+AD^2+2AB\cdot AD\cos\angle BAD}=\sqrt{10}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=4+1=5$，设点 A 到平面 BCD 的距离为 h，则 $h=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 D.

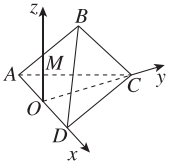
11. ABC ［解析］对于 A，显然 $EF/\!/$ 平面 A_1ADD_1，点 E 到平面 A_1ADD_1 的距离即为直线 EF 到平面 A_1ADD_1 的距离，点 E 到平面 A_1ADD_1 的距离为 2，故 A 正确. 对于 B，以 D 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $A_1(2,0,2)$，$A(2,0,0)$，$E(1,2,0)$，$F(0,2,1)$，所以 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,2,1)$. 设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=-x+2y=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=-2x+2y+z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$，所以点 A_1 到平面 AEF 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{4}{3}$，故 B 正确. 对于 C，点 A_1 到直线 AF 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{AA_1}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AF}|}\right)^2}=\sqrt{4-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，故 C 正确. 对于 D，连接 CA，GA，GE，GF，记点 C，点 G 到平面 AEF 的距离分别为 h_1，h_2，则 $V_{三棱锥C\text{-}AEF}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEF}\cdot h_1=V_{三棱锥A\text{-}CEF}=\frac{1}{3}\times\frac{1\times 1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$，$V_{三棱锥G\text{-}AEF}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEF}\cdot h_2=V_{三棱锥A\text{-}GEF}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}\times 2=\frac{2}{3}$，所以 $h_1\neq h_2$，故 D 错误. 故选 ABC.

12. BCD ［解析］如图，以 B_1 为坐标原点，建立空间直角坐标系，设 $BC=a$，$BB_1=b$，则由题得 $B_1(0,0,0)$，$A_1(0,2,0)$，$C_1(a,0,0)$，$A(0,2,b)$，$B(0,0,b)$，

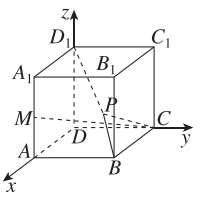


所以 $\overrightarrow{A_1B}=(0,-2,b)$，$\overrightarrow{C_1A_1}=(-a,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{B_1B}=(0,0,b)$，又 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{C_1Q}=\lambda\overrightarrow{C_1A_1}$，$\lambda\in(0,1)$，所以 $\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{B_1B}+\lambda\overrightarrow{BC}=(\lambda a,0,b)$，即 $P(\lambda a,0,b)$，$\overrightarrow{B_1Q}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1Q}=\overrightarrow{B_1C_1}+\lambda\overrightarrow{C_1A_1}=(a-\lambda a,2\lambda,0)$，即 $Q(a-\lambda a,2\lambda,0)$，所以 $\overrightarrow{PQ}=(a-2\lambda a,2\lambda,-b)$. 对于 A，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{A_1B}=(a-2\lambda a,2\lambda,-b)\cdot(0,-2,b)=-4\lambda-b^2<0$，故 A 错误；对于 B，由题知 $\overrightarrow{B_1C_1}=(a,0,0)$ 是平面 ABB_1A_1 的一个法向量，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=(a-2\lambda a,2\lambda,-b)\cdot(a,0,0)=a^2-2\lambda a^2$，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=a^2-2\lambda a^2=0$，又 $PQ\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $PQ/\!/$ 平面 ABB_1A_1，故 B 正确；对于 C，$\overrightarrow{A_1P}=(\lambda a,-2,b)$，$\overrightarrow{PQ}=(a-2\lambda a,2\lambda,-b)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,-2,b)$，设平面 A_1BP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=-2y+bz=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1P}=\lambda ax-2y+bz=0,\end{cases}$ 取 $z=2$，则 $\boldsymbol{m}=(0,b,2)$，设点 Q 到平面 A_1BP 的距离为 d，则由 $\lambda\in(0,1)$ 得 $d=\left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{2b|\lambda-1|}{\sqrt{b^2+4}}=\frac{2b(1-\lambda)}{\sqrt{b^2+4}}$，由题意可知 $S_{\triangle A_1BP}=\frac{1}{2}|A_1B||BP|=\frac{\lambda a\cdot\sqrt{b^2+4}}{2}$，故 $V_{B\text{-}A_1PQ}=V_{Q\text{-}A_1BP}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BP}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{\lambda a\cdot\sqrt{b^2+4}}{2}\times\frac{2b(1-\lambda)}{\sqrt{b^2+4}}=-\frac{ab(\lambda^2-\lambda)}{3}=-\frac{ab\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2}{3}+\frac{ab}{12}$，因为 BB_1，B_1C_1 的长度为定值，所以 ab 为定值，故当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，三棱锥 $B\text{-}A_1PQ$ 的体积最大，故 C 正确；对于 D，设直线 PQ 与 A_1B 所成角为 θ，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{A_1B}|}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{A_1B}|}=\frac{b^2+2}{\sqrt{b^2+1}\sqrt{b^2+4}}=\sqrt{\frac{b^4+4b^2+4}{b^4+5b^2+4}}=\sqrt{\frac{b^2+\frac{4}{b^2}+4}{b^2+\frac{4}{b^2}+5}}=\sqrt{1-\frac{1}{b^2+\frac{4}{b^2}+5}}\geqslant\sqrt{1-\frac{1}{2\sqrt{b^2\times\frac{4}{b^2}}+5}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $b^2=\frac{4}{b^2}$，即 $b=\sqrt{2}$ 时等号成立，故 D 正确. 故选 BCD.

13. $\frac{\sqrt{39}}{13}$ $\frac{\sqrt{39}}{26}$ ［解析］如图所示，以 AD 的中点 O 为原点，以 OD，OC 所在直线分别为 x 轴、y 轴，过 O 作 $OM\perp$ 平面 ACD 交 AB 于 M，以 OM 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $Oxyz$，则 $A\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$D\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，则 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ABC 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$ 取 $x=-\sqrt{3}$，则 $y=1$，$z=3$，可得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,3)$. 设点 D 到平面 ABC 的距离为 d，得 $d=\frac{|\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$，即点 D 到平面 ABC 的距离是 $\frac{\sqrt{39}}{13}$. 因为 O 是 AD 的中点，所以点 O 到平面 ABC 的距离是 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{39}}{13}=\frac{\sqrt{39}}{26}$.



14. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ［解析］以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D_1(0,0,2)$，$M(2,0,1)$，$C(0,2,0)$，$B(2,2,0)$，$\overrightarrow{MC}=(-2,2,-1)$. 因为点 P 在侧面 ABB_1A_1 内，所以设点 P 的坐标为 $(2,b,c)$，$b,c\in[0,2]$，所以 $\overrightarrow{D_1P}=(2,b,c-2)$，又 $\overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{MC}=0$，所以 $-4+2b+2-c=0$，得 $c=2b-2$，所以 $b\in[1,2]$，又 $PB\perp BC$，所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot PB=\frac{1}{2}\times 2\times PB=\sqrt{(2-b)^2+c^2}$，将 $c=2b-2$ 代入上式，得 $S_{\triangle PBC}=\sqrt{5b^2-12b+8}=\sqrt{5\left(b-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$，$b\in[1,2]$，故当 $b=\frac{6}{5}$ 时，$S_{\triangle PBC}$ 取得最小值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

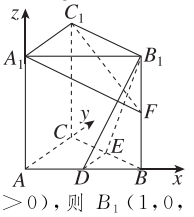


15. 解：(1) 证明：因为 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $A_1C_1/\!/AC$，

又 D，E 分别为 AB，BC 的中点，所以 $DE/\!/AC$，所以 $DE/\!/A_1C_1$，

又 $A_1C_1\not\subset$ 平面 B_1DE，$DE\subset$ 平面 B_1DE，所以 $A_1C_1/\!/$ 平面 B_1DE.

(2) 因为 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，且 $AB\perp AC$，所以以 A 为坐标原点，AB，AC，AA_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AA_1=a(a>0)$，则 $B_1(1,0,a)$，$D\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$A_1(0,0,a)$，$F\left(1,0,\frac{a}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{B_1D}=\left(-\frac{1}{2},0,-a\right)$，$\overrightarrow{A_1F}=\left(1,0,-\frac{a}{2}\right)$，由 $B_1D\perp A_1F$ 可得 $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{A_1F}=0$，即 $-\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}=0$，可得 $a=1$. 设 $AC=b(b>0)$，则 $C_1(0,b,1)$，则 $\overrightarrow{A_1F}=\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,b,0)$，设平面 A_1FC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1F}=x-\frac{1}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=by=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$，由 $E\left(\frac{1}{2},\frac{b}{2},0\right)$，得 $\overrightarrow{A_1E}=\left(\frac{1}{2},\frac{b}{2},-1\right)$，所以点 E 到平面 A_1FC_1 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\frac{1}{2}-2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

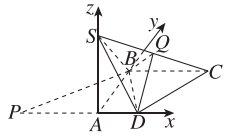


16. 解：(1) 证明：由题意可知 $BC\perp AB$.

因为平面 $SAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，平面 $SAB\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BC\perp$ 平面 SAB.

因为平面 $SCD\cap$ 平面 $SAB=l$，所以 $l\subset$ 平面 SAB，则 $BC\perp l$.

(2) 由题可知 $AB\perp AD$. 因为 $SA\perp AB$，平面 $SAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，平面 $SAB\perp$ 平面 $ABCD$，$SA\subset$ 平面 SAB，所以 $SA\perp$ 平面 $ABCD$，又 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SA\perp AD$. 故以 A 为坐标原点，AD，AB，AS 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



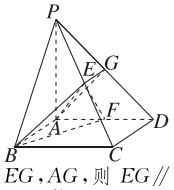
设 $AD=1$，则 $B(0,2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(1,0,0)$，$S(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{BD}=(1,-2,0)$，$\overrightarrow{SC}=(2,2,-2)$. 设 $\frac{SQ}{SC}=\lambda(0<\lambda<1)$，则 $\overrightarrow{SQ}=\lambda\overrightarrow{SC}=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，从而 $Q(2\lambda,2\lambda,-2\lambda+2)$，故 $\overrightarrow{BQ}=(2\lambda,2\lambda-2,-2\lambda+2)$. 设平面 BDQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x-2y=0,\\ 2\lambda x+(2\lambda-2)y+(-2\lambda+2)z=0,\end{cases}$

令 $x=2-2\lambda$，得 $\boldsymbol{n}=(2-2\lambda,1-\lambda,1-3\lambda)$. 易知平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，则 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{|1-3\lambda|}{\sqrt{(2-2\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(1-3\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，即 $6(1-3\lambda)^2=14\lambda^2-16\lambda+6$，整理得 $2\lambda^2=\lambda$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=0$(舍去).

故在棱 SC 上存在一点 Q 满足题意，此时 $\frac{SQ}{QC}=1$.

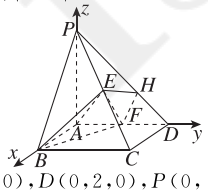
17. 解：(1) 因为 $AB/\!/CD$，$AB\not\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，所以 $AB/\!/$ 平面 PCD，



又 $AB\subset$ 平面 ABE，设平面 $ABE\cap$ 平面 $PCD=l$，则 $AB/\!/l$，取 PD 的中点 G，连接 EG，AG，则 $EG/\!/CD$，又 $AB/\!/CD$，所以 $AB/\!/EG$，即 EG 为 l，即 EG，AG 就是应画的线.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AB\perp PA$，又 $AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，PA，$AD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，又 $AG\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp AG$，即截面 $ABEG$ 为直角梯形，又 $PA=AB=2$，所以 $AG=\sqrt{2}$，$EG=1$，$BE=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，所以截面周长为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+3$.

(2) 以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(1,1,1)$，$F(0,1,0)$，

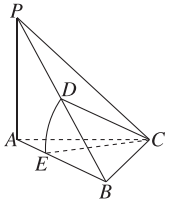
所以 $\overrightarrow{BE}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=-2x+y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$，设 $PD\cap$ 平面 $BEF=H$，设 $\overrightarrow{PH}=\lambda\overrightarrow{PD}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{PH}=\lambda(0,2,-2)=(0,2\lambda,-2\lambda)$，又 $P(0,0,2)$，所以 $H(0,2\lambda,2-2\lambda)$，则 $\overrightarrow{BH}=(-2,2\lambda,2-2\lambda)$，由 $\overrightarrow{BH}\cdot\boldsymbol{n}=(-2,2\lambda,2-2\lambda)\cdot(1,2,-1)=0$，可得 $6\lambda-4=0$，即 $\lambda=\frac{2}{3}$，即 H 为 PD 上靠近点 D 的三等分点 $\left(PH=\frac{2}{3}PD\right)$，连接 EH，FH，即 EH，FH 就是应画的线.

增分微练 7　空间中的动态问题

1. D [解析] 由题易知平面 ABE 与 CD 垂直，则在平面 ABE 中，点 P 到 AB 和点 E 的距离相等，由抛物线的定义，可知点 P 的轨迹被平面 ABE 所截得的图形是抛物线的一部分. 故选 D.

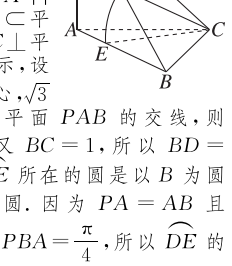
2. B [解析] 因为 $PA\perp$ 平面 ABC，AB，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp BC$，$PA\perp AB$，又 $AB\perp BC$，$PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp$ 平面 PAB. 如图所示，设 $\overset{\frown}{DE}$ 为以 C 为球心，$\sqrt{3}$ 为半径的球面与平面 PAB 的交线，则 $CD=CE=\sqrt{3}$，又 $BC=1$，所以 $BD=BE=\sqrt{2}$，所以 $\overset{\frown}{DE}$ 所在的圆是以 B 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆. 因为 $PA=AB$ 且 $PA\perp AB$，所以 $\angle PBA=\frac{\pi}{4}$，所以 $\overset{\frown}{DE}$ 的长为 $\frac{\pi}{4}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$. 故选 B.



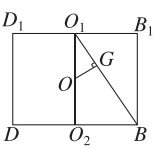
3. B [解析] 设 P 在底面 ABC 上的射影为 O，则 O 为 $\triangle ABC$ 的中心，连接 OA，则 $OA=\frac{2}{3}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，$\therefore PO=\sqrt{PA^2-OA^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$. 连接 OQ，易知点 Q 在 $\triangle ABC$ 的边上及其内部，$\therefore PO^2+OQ^2=PQ^2$，又 $\because PQ\leqslant5$，$\therefore OQ\leqslant1$，易知点 O 到 $\triangle ABC$ 的边的距离大于 1，$\therefore T$ 表示的区域是以 O 为圆心，1 为半径的圆及其内部，其面积为 π.

4. AB [解析] 直线 AC 和直线 B_1D_1 异面，过空间中任意一点有且仅有一条直线与直线 AC，B_1D_1 都垂直，故 A 正确；直线 AC 和直线 B_1D_1 异面，且直线 AC 与平面 MB_1D_1 不平行，直线 B_1D_1 与平面 MAC 也不平行，所以过点 M 有且仅有一条直线与直线 AC，B_1D_1 都相交，故 B 正确；因为 M 到 AC 的距离大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}AA_1$，$M$ 到 B_1D_1 的距离小于 AA_1，且 $AC=B_1D_1$，所以 $\triangle MAC$ 和 $\triangle MB_1D_1$ 的面积不可能相等，故 C 错误；因为 $AC\perp$ 平面 MB_1D_1，$AC\subset$ 平面 MAC，所以对任意 M 恒有平面 $MAC\perp$ 平面 MB_1D_1，故 D 错误. 故选 AB.

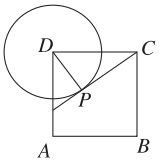
5. ACD [解析] 以点 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$C_1(0,2,2)$，$O(1,1,0)$，设点 $P(x,2,z)$，其中 $0<x<2$，$0<z<2$. 对于 A 选项，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{D_1O}=(1,1,-2)$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{D_1O}=-2+2=0$，所以 $D_1O\perp AC$，故 A 正确；对于 B 选项，$\overrightarrow{B_1P}=(x-2,0,z-2)$，若 $B_1P/\!/D_1O$，则 $\frac{x-2}{1}=\frac{0}{1}=\frac{z-2}{-2}$，解得 $x=z=2$，不符合题意，所以不存在点 P，使得 $B_1P/\!/D_1O$，故 B 错误；对于 C 选项，$S_{\triangle ADD_1}=\frac{1}{2}\times2^2=2$，点 P 到平面 ADD_1 的距离为 2，所以 $V_{A\text{-}DD_1P}=V_{P\text{-}ADD_1}=\frac{1}{3}\times2\times2=\frac{4}{3}$，故 C 正确；对于 D 选项，$\overrightarrow{OP}=(x-1,1,z)$，若 $D_1O\perp PO$，则 $\overrightarrow{D_1O}\cdot\overrightarrow{OP}=x-1+1-2z=x-2z=0$，可得 $x=2z$，由 $\begin{cases}0<z<2,\\ 0<2z<2,\end{cases}$ 可得 $0<z<1$，$C_1P=|\overrightarrow{C_1P}|=\sqrt{x^2+(2-2)^2+(z-2)^2}=\sqrt{5z^2-4z+4}=\sqrt{5\left(z-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$，当且仅当 $z=\frac{2}{5}$ 时，等号成立，因为 $C_1D_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，$C_1P\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $C_1D_1\perp C_1P$，所以 $S_{\triangle C_1D_1P}=\frac{1}{2}C_1D_1\cdot C_1P=C_1P\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故 D 正确. 故选 ACD.



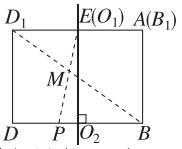
6. BCD [解析] 对于 A，连接 DP，因为直线 D_1P 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $DP=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，点 P 在以 D 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆上运动，所以点 P 的轨迹为圆，故 A 错误. 对于 B，取正方形 $ABCD$ 的中心 O_2，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心 O_1，连接 O_2O_1，则 O_2O_1 的中点 O 为内切球球心，设 G 为内切球与平面 A_1BC_1 的切点，作出过 B，D，D_1，B_1 四点的截面如图，则 $OG\perp O_1B$，OG 为球心到平面 A_1BC_1 的距离，易知 $O_1B=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$O_2B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$O_1O_2=1$，利用相似三角形的性质得 $\frac{OG}{O_2B}=\frac{OO_1}{O_1B}$，即 $\frac{OG}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}$，则 $OG=\frac{\sqrt{3}}{6}$，因此可得截面圆的半径 $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，则所得的截面面积为 $\frac{\pi}{6}$，故 B 正确.



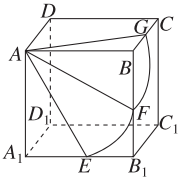
对于 C，如图，易知直线 CP 与平面 CDD_1C_1 所成的角为 $\angle PCD$，当 CP 与点 P 的轨迹圆相切时，$\sin\angle PCD$ 最大，此时 $\sin\angle PCD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 C 正确.



对于 D，当 MP 最小时，点 P 为线段 BD 与圆的交点，将面 D_1AB 沿 D_1B 翻折到面 BB_1D_1D 所在平面上，使 A 到达 B_1 的位置，翻折后的图形如图所示，当 E，M，P 三点共线时，$MP+ME$ 最小，因为 $O_2P=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$O_1O_2=1$，所以 $MP+ME$ 的最小值为 $\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{11-2\sqrt{6}}{6}}$，故 D 正确. 故选 BCD.

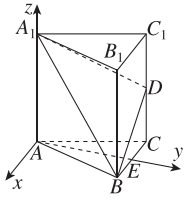


7. $\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}$ [解析] 如图，球面与正方体的六个面都相交，所得的交线分为两类：一类在顶点 A 所在的三个面上，即平面 AA_1B_1B、平面 $ABCD$ 和平面 AA_1D_1D 上；另一类在不过顶点 A 的三个面上，即平面 BB_1C_1C、平面



CC_1D_1D 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上. 在平面 AA_1B_1B 上，交线为弧 EF 且在过球心 A 的大圆上，因为 $A_1E=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle A_1AE=\frac{\pi}{6}$，同理 $\angle BAF=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle EAF=\frac{\pi}{6}$，故弧 EF 的长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$，而这样的弧共有三条. 在平面 BB_1C_1C 上，交线为弧 FG 且在到球心的距离为 1 的平面与球面相交所得的小圆上，此时，小圆的圆心为 B，半径为 $BF=A_1E=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以弧 FG 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$，这样的弧共有三条. 所以所得的曲线长为 $3\times\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+3\times\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}$.

8. $\sqrt{2}$ ［解析］如图，取 BC 的中点 E，连接 AE，因为三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 为正三棱柱，所以 $AE\perp BC$，$AA_1\perp$ 平面 ABC，又 $AE\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AE$，所以以 A 为原点，过点 A 且平行于 BC 的直线为 x 轴，AE 所在直线为 y 轴，AA_1 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. 因为正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2，所以 $A(0,0,0)$，$B(1,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,2)$，设 $CD=t(0\leqslant t\leqslant 2)$，则 $D(-1,\sqrt{3},t)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,0,t)$. 当 $t=0$ 时，$\overrightarrow{BD}=(-2,0,0)$，设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=x+\sqrt{3}y-2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-2x=0,\end{cases}$ 令 $z=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(0,2,\sqrt{3})$，设 A 到平面 A_1BD 的距离为 d_1，则 $d_1=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+3}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$；当 $t\neq 0$ 时，设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=a+\sqrt{3}b-2c=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-2a+tc=0,\end{cases}$ 令 $a=1$，则 $\boldsymbol{m}=\left(1,\frac{4-t}{\sqrt{3}t},\frac{2}{t}\right)$，设 A 到平面 A_1BD 的距离为 d_2，则 $d_2=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{\left|1+\frac{4-t}{t}\right|}{\sqrt{1+\frac{(4-t)^2}{3t^2}+\frac{4}{t^2}}}=\frac{4}{\sqrt{\frac{3t^2+16-8t+t^2+12}{3}}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{(t-1)^2+6}{3}}}$，所以当 $t=1$ 时，d_2 取得最大值 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 因为 $\left(\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)^2=\frac{12}{7}<2=(\sqrt{2})^2$，所以 A 到平面 A_1BD 的最大距离为 $\sqrt{2}$.



9. 0 $\left[0,\frac{2}{5}\right]$ ［解析］取 AN 的中点 E，连接 ME，则 $\angle PME$ 或其补角是异面直线 PM 与 DN 所成的角. 当点 P 与 C_1 重合时，连接 MC，$\because DN\perp MC$，$DN\perp CC_1$，$MC\cap CC_1=C$，$\therefore DN\perp$ 平面 MCC_1，则 $DN\perp MP$（C_1），此时异面直线 PM 与 DN 所成的角最大，即为 $\frac{\pi}{2}$，$\therefore\cos\theta=0$. 当点 P 由 C_1 向 D_1 移动时，角 θ 不断减小，当点 P 与点 D_1 重合时，角 θ 最小，连接 D_1E，设 $AD=2$，可得 $D_1M=\sqrt{5}$，$ME=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$D_1E=\frac{\sqrt{33}}{2}$，则 $\cos\angle D_1ME=\frac{(\sqrt{5})^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2}{2\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=-\frac{2}{5}$，$\therefore\cos\theta\in\left[0,\frac{2}{5}\right]$.

第八单元　解析几何

第 49 讲　直线的倾斜角与斜率、直线的方程

1. C ［解析］由题意可得直线方程为 $x=-1$，所以直线的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$，故选 C.

2. C ［解析］因为直线 $x+ay+b=0$ 经过第一、二、四象限，所以该直线的斜率 $-\frac{1}{a}<0$，该直线在 y 轴上的截距 $-\frac{b}{a}>0$，则 $a>0$，$b<0$. 故选 C.

3. D ［解析］方法一：因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1)$，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$，又直线 l 经过点 $A(1,0)$，所以直线 l 的方程为 $y-0=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-1=0$，故选 D.

方法二：设 $P(x,y)$ 是直线 l 上的任意一点（不同于 A），则 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y)$，因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1)$，所以 $-(x-1)-2y=0$，故直线 l 的方程为 $x+2y-1=0$.

4. B ［解析］当 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 不存在，充分性不成立；若 $\tan\alpha=\tan\beta$，则 $\alpha=\beta$，必要性成立. 故“$\alpha=\beta$”是“$\tan\alpha=\tan\beta$”的必要不充分条件. 故选 B.

5. ABC ［解析］当直线 l 经过原点时，其斜率 $k=\frac{2-0}{1-0}=2$，故直线 l 的方程为 $y=2x$，即 $2x-y=0$；当直线 l 不过原点时，设直线 l 的方程为 $x-y=m$ 或 $x+y=n$，把点 A 的坐标代入可得 $1-2=m$，$1+2=n$，即 $m=-1$，$n=3$，故直线 l 的方程为 $x-y+1=0$ 或 $x+y-3=0$. 故选 ABC.

6. $(-\infty,1]$ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ［解析］因为直线 l 经过 $A(2,1)$，$B(1,m^2)$ 两点，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{1-m^2}{2-1}=1-m^2\leqslant 1$，所以 l 的斜率的取值范围为 $(-\infty,1]$. 设其倾斜角为 α，$\alpha\in[0,\pi)$，则 $\tan\alpha\leqslant 1$，所以其倾斜角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

7. 1 或 -1 ［解析］令 $x=0$，得 $y=k$；令 $y=0$，得 $x=-2k$. 所以所围成的三角形的面积 $S=\left|\frac{1}{2}k\times(-2k)\right|=k^2=1$，所以 $k=1$ 或 $k=-1$.

8. A ［解析］由题意知，直线 $y=\sqrt{3}(x-2)$ 与 x 轴的交点为 $(2,0)$，其斜率为 $\sqrt{3}$，倾斜角为 $60°$，所以将直线 $y=\sqrt{3}(x-2)$ 绕点 $(2,0)$ 按逆时针方向旋转 $60°$ 后所得直线的倾斜角为 $120°$，所以所求直线的斜率为 $-\sqrt{3}$，所以所求直线的方程为 $y=-\sqrt{3}(x-2)$，即 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$. 故选 A.

9. D ［解析］直线 l：$y=k(x-2)+1$ 经过定点 $P(2,1)$，$\because k_{PA}=\frac{3-1}{1-2}=-2$，$k_{PB}=\frac{-1-1}{-2-2}=\frac{1}{2}$，直线 l：$y=k(x-2)+1$ 与线段 AB 相交，$\therefore -2\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$，故选 D.

10. ABD ［解析］直线 l：$x+y-3+m(2x-y)=0$，令 $\begin{cases}2x-y=0,\\ x+y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}$ $\therefore$ 直线 l 过定点 $(1,2)$，故 A 正确；若直线 l 过原点 $(0,0)$，则有 $-3=0$，显然不成立，所以无论 m 取何值，直线 l 都不经过原点，故 B 正确；当 $m=\frac{1}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $2x+\frac{1}{2}y-3=0$，令 $x=0$，则 $y=6$，即直线 l 与 y 轴交于它的正半轴，故 C 错误；当 $m=0$ 时，直线 l 的方程为 $x+y-3=0$，则直线 l 与 x 轴、y 轴的交点坐标分别是 $(3,0)$，$(0,3)$，所以直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积是 $\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.

11. BC ［解析］设直线 AB 的倾斜角为 α，直线 AC 的倾斜角为 β，因为直线 AC 的斜率为 2，所以 $\tan\beta=2$，则 $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$. 依题意有 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$. 当 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\tan\frac{\pi}{4}$，即 $\frac{\tan\alpha-2}{1+2\tan\alpha}=1$，解得 $\tan\alpha=-3$，即直线 AB 的斜率为 -3，C 选项中的直线斜率符合；当 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\tan\frac{\pi}{4}$，即 $\frac{2-\tan\alpha}{1+2\tan\alpha}=1$，解得 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，即直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{3}$，B 选项中的直线斜率符合. 故选 BC.

12. $x-y+2=0$ ［解析］设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，垂心为 H，则由重心坐标公式得 $x_G=\frac{2+0+(-4)}{3}=-\frac{2}{3}$，$y_G=\frac{0+4+0}{3}=\frac{4}{3}$，所以 $G\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$. 易知 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的高所在直线的方程为 $x=0$，直线 BC：$y=x+4$，又 $A(2,0)$，所以 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高所在直线的方程为 $y=-x+2$. 由 $\begin{cases}x=0,\\ y=-x+2,\end{cases}$ 可得 $H(0,2)$. 故直线 GH 的方程为 $y-2=\frac{2-\frac{4}{3}}{0-\left(-\frac{2}{3}\right)}x$，即 $x-y+2=0$.

13. $x+2y-4=0$ ［解析］由 $kx-y+1-2k=0$，得 $k(x-2)+(1-y)=0$，$\therefore$ 直线 l 恒过定点 $P(2,1)$. 根据题意设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，则 $A(a,0)$，$B(0,b)$，$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，又 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{b}}$，即 $ab\geqslant 8$，当且仅当 $a=4$，$b=2$ 时取等号，$\therefore S_{\triangle AOB}=$

$\frac{1}{2}ab\geqslant 4$，故当$\triangle AOB$的面积最小时，直线l的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，即$x+2y-4=0$.

14. A ［解析］方法一：由题知$\tan\angle NAO=\frac{3}{4}$，$\angle MNO=45°$，$\angle AON=\angle MNO-\angle NAO$，由两角差的正切公式得$\tan\angle AON=\tan(\angle MNO-\angle NAO)=\frac{\tan\angle MNO-\tan\angle NAO}{1+\tan\angle MNO\cdot\tan\angle NAO}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+1\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$. 故选 A.

方法二：设直线与y轴的交点为B，过O作$OC\perp AB$于C，过N作$ND\perp OA$于D. 因为点N在直线$y=\frac{3}{4}x+3$上且在第二象限内，所以设$N\left(x,\frac{3}{4}x+3\right)(-4<x<0)$，则$|DN|=\frac{3}{4}x+3$，$|OD|=-x$，又$A(-4,0)$，$B(0,3)$，即$|OA|=4$，$|OB|=3$，所以$|AB|=5$. 在$\triangle AOB$中，由三角形的面积公式得$\frac{1}{2}|OB||OA|=\frac{1}{2}|AB||OC|$，所以$|OC|=\frac{12}{5}$. 在Rt$\triangle NOM$中，$|OM|=|ON|$，$\angle MNO=45°$，所以$\sin 45°=\frac{|OC|}{|ON|}=\frac{\frac{12}{5}}{|ON|}$，得$|ON|=\frac{12\sqrt{2}}{5}$. 在Rt$\triangle NDO$中，$|ND|^2+|DO|^2=|ON|^2$，即$\left(\frac{3}{4}x+3\right)^2+(-x)^2=\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)^2$，可得$x=-\frac{84}{25}$，所以$|ND|=\frac{12}{25}$，$|OD|=\frac{84}{25}$，则$\tan\angle AON=\frac{|ND|}{|OD|}=\frac{1}{7}$. 故选 A.

15. BD ［解析］直线倾斜角的取值范围为$[0,\pi)$，而$\pi-\alpha\in\mathbf{R}$，所以 A 不正确；当$x=y=0$时，$x\sin\alpha+y\cos\alpha+1=1\neq 0$，所以直线必不过原点，所以 B 正确；当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，直线的斜率不存在，所以 C 不正确；当直线和两坐标轴都相交时，它和两坐标轴围成的三角形的面积$S=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{-\sin\alpha}\right|\cdot\left|\frac{1}{-\cos\alpha}\right|=\frac{1}{|\sin 2\alpha|}\geqslant 1$，所以 D 正确. 故选 BD.

第 50 讲　两直线的位置关系

1. C ［解析］由$\begin{cases}x-y-1=0,\\x+y-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$即交点坐标为$(1,0)$. 故选 C.

2. B ［解析］因为直线$l_1:x+y=0$，$l_2:ax+by+1=0$，且$l_1\perp l_2$，所以$1\cdot a+1\cdot b=0$，所以$a+b=0$. 故选 B.

3. B ［解析］方法一：设所求直线上任意一点为(x,y)，则其关于点$\left(\frac{1}{3},0\right)$对称的点为$\left(\frac{2}{3}-x,-y\right)$，因为点$\left(\frac{2}{3}-x,-y\right)$在直线$3x-2y=0$上，所以$3\left(\frac{2}{3}-x\right)-2(-y)=0$，化简得$3x-2y-2=0$，所以所求直线方程为$3x-2y-2=0$.

方法二：在直线$3x-2y=0$上任取两点$O(0,0)$，$M(2,3)$，设点O，M关于点$\left(\frac{1}{3},0\right)$的对称点分别为$O'$，$M'$，则$O'\left(\frac{2}{3},0\right)$，$M'\left(-\frac{4}{3},-3\right)$，所以所求直线方程为$\frac{y-(-3)}{0-(-3)}=\frac{x-\left(-\frac{4}{3}\right)}{\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)}$，化简得$3x-2y-2=0$.

4. C ［解析］方法一：由$\begin{cases}x-y=0,\\x+y=2,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$所以交点坐标为$(1,1)$，又因为直线平行于向量$\boldsymbol{v}=(3,2)$，所以所求直线的方程为$y-1=\frac{2}{3}(x-1)$，即$2x-3y+1=0$. 故选 C.

方法二：根据题意可设所求的直线方程为$x+y-2+\lambda(x-y)=0$，即$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y-2=0$，因为此直线平行于向量$\boldsymbol{v}=(3,2)$，所以$\frac{2}{3}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$，解得$\lambda=-5$，所以所求直线的方程为$-4x+6y-2=0$，即$2x-3y+1=0$.

5. AB ［解析］若$l_1/\!/l_2$，则$\frac{2}{1}=\frac{m}{-1}\neq\frac{-1}{m}$，得$m=-2$，选项 A 正确；若$l_1\perp l_2$，则$1\times 2-m=0$，得$m=2$，选项 B 正确；若$l_1,l_2$在$x$轴上的截距相等，则$-m=\frac{1}{2}$，解得$m=-\frac{1}{2}$，选项 C 错误；当$m=0$时，$l_2$的倾斜角为$\frac{\pi}{2}$，恰好是$l_1$的倾斜角$\frac{\pi}{4}$的 2 倍，选项 D 错误. 故选 AB.

6. $x=2$或$x+2y-4=0$ ［解析］方法一：由$\begin{cases}2x-y-3=0,\\x+y-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$即交点为$P(2,1)$，由点$A(1,3)$和点$B(3,2)$到直线$l$的距离相等，得直线$l$过$AB$的中点或$l/\!/AB$. 当直线$l$过$AB$的中点时，$AB$的中点为$\left(2,\frac{5}{2}\right)$，则直线$l:x=2$；当直线$l/\!/AB$时，由$AB$的斜率$k=\frac{3-2}{1-3}=-\frac{1}{2}$，得$l$的方程为$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$，即$x+2y-4=0$. 故所求直线$l$的方程为$x=2$或$x+2y-4=0$.

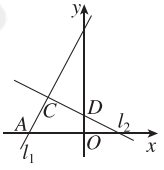
方法二：设过点P的直线l的方程为$2x-y-3+\lambda(x+y-3)=0$，即$(2+\lambda)x+(\lambda-1)y-3\lambda-3=0$，因为点$A(1,3)$和点$B(3,2)$到直线$l$的距离相等，所以$\frac{|(2+\lambda)\times 1+(\lambda-1)\times 3-3\lambda-3|}{\sqrt{(2+\lambda)^2+(\lambda-1)^2}}=\frac{|(2+\lambda)\times 3+(\lambda-1)\times 2-3\lambda-3|}{\sqrt{(2+\lambda)^2+(\lambda-1)^2}}$，化简得$|\lambda-4|=|2\lambda+1|$，解得$\lambda=-5$或$\lambda=1$，故所求直线$l$的方程为$x=2$或$x+2y-4=0$.

7. $\left[\frac{7}{5},\frac{17}{5}\right]$ ［解析］由点到直线的距离公式得，点P到直线的距离$d=\frac{|3\cos\theta+4\sin\theta-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5\sin(\theta+\varphi)-12|}{5}$，其中$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，由三角函数的性质易知，$5\sin(\theta+\varphi)-12\in[-17,-7]$，故$d\in\left[\frac{7}{5},\frac{17}{5}\right]$.

8. C ［解析］设直线$3x+4y+1=0$的一个方向向量为$\boldsymbol{b}=\left(1,-\frac{3}{4}\right)$，因为$\boldsymbol{a}=(3,4)$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3-3=0$，即$\boldsymbol{a}=(3,4)$与直线$3x+4y+1=0$的方向向量垂直，又点$O$到直线$3x+4y+1=0$的距离$d=\frac{|1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$，故$\overrightarrow{OP}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$-\frac{1}{5}\times\frac{\boldsymbol{a}}{5}=\left(-\frac{3}{25},-\frac{4}{25}\right)$. 故选 C.

9. D ［解析］由题意得，直线MN经过点$P(2,0)$关于y轴的对称点$(-2,0)$，直线MN也经过点$P(2,0)$关于直线AB的对称点，设为(a,b)，因为直线AB的斜率为$\frac{11-0}{0-22}=-\frac{1}{2}$，所以直线$AB$的方程为$y=-\frac{1}{2}x+11$，所以$\begin{cases}\frac{b}{a-2}=2,\\\frac{b}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{2+a}{2}+11,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=10,\\b=16,\end{cases}$所以点$P(2,0)$关于直线$AB$的对称点为$(10,16)$，所以直线$MN$过点$(-2,0)$，$(10,16)$，所以直线$MN$的斜率为$\frac{16-0}{10-(-2)}=\frac{4}{3}$，所以直线$MN$的方程为$y=\frac{4}{3}(x+2)$，即$4x-3y+8=0$. 故选 D.

10. D ［解析］如图，设l_1与x轴交于点A，l_2与y轴交于点D，l_1与l_2交于点C，则$A(-3,0)$，$D(0,1)$，直线l_1，l_2与两坐标轴围成的四边形为四边形$AODC$.



因为四边形$AODC$有外接圆，且$\angle AOD=90°$，所以$\angle ACD=90°$，即$l_1\perp l_2$，又l_1的斜率为 2，l_2的斜率为k，所以$2k=-1$，即$k=-\frac{1}{2}$. 故选 D.

11. D ［解析］集合$A=\{(x,y)\mid kx-y+k=0\}$是直线$l_1:kx-y+k=0$上的点组成的集合，将$kx-y+k=0$变形，可得$y=k(x+1)$，所以直线$l_1:kx-y+k=0$过定点$E(-1,0)$. 集合$B=\{(x,y)\mid y=kx-1\}$是直线$l_2:y=kx-1$上的点组成的集合，直线$l_2:y=kx-1$过定点$F(0,-1)$. 因为直线$l_1/\!/l_2$，所以线段MN长度的最小值d是平行线l_1,l_2间的距离，所以d的最大值为$|EF|=\sqrt{(0+1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$. 故选 D.

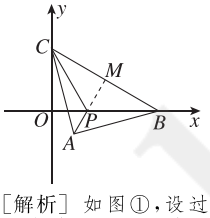
12. ABD ［解析］设点M到直线l的距离为d. 根据题意，当$d\leqslant 2$时，该直线上存在点P，使$|PM|=2$，此时直线为点$M(3,4)$的“2 域直线”. 对于 A，点M到直线$4x-3y=0$的距离为$\frac{|3\times 4-4\times 3|}{\sqrt{16+9}}=0\leqslant 2$，所以该直线是点$M$的“2 域直线”；对于 B，点$M$到直线$y=2$的距离为$4-2=2$，所以该直线是点$M$的“2 域直线”；对于 C，点$M$到直线$x-4y=0$的距离为$\frac{|3-16|}{\sqrt{1+16}}=\frac{13\sqrt{17}}{17}>2$，所以该直线不是点$M$的“2 域直线”；对于 D，点$M$到直线$x=5$的距离为$5-3=2$，所以该直线是点$M$的“2 域直线”. 故选 ABD.

13. $\frac{25}{2}$　$5\sqrt{5}$ ［解析］$x-my+m-2=0$可以化为$m(1-y)+x-2=0$，故直线l_1恒过定点$A(2,1)$，$mx+y+2m-4=0$可以化为$y-4=-m(x+2)$，故直线l_2恒过定点$B(-2,4)$. 因为$1\times m+(-m)\times 1=0$，所以$l_1\perp l_2$，可得$PA\perp PB$，所以$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=(2+2)^2+(1-4)^2=25$，又$|PA|^2+|PB|^2=25\geqslant 2|PA|\cdot|PB|$，故$|PA|\cdot|PB|\leqslant\frac{25}{2}$，当且仅当$|PA|=|PB|$时，等号成立. 因为$PA\perp PB$，设$\angle PAB=\theta$，则$\theta$为锐角，所以$|PA|=5\cos\theta$，$|PB|=5\sin\theta$，所以$2|PA|+$

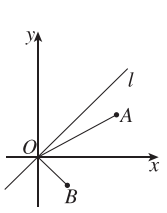
$|PB|=5(2\cos\theta+\sin\theta)=5\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=2$，所以当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$2|PA|+|PB|$ 取得最大值 $5\sqrt{5}$.

14. $\sqrt{10}-1$ ［解析］设点 A 关于直线 $x+y=3$ 的对称点为 $A'(a,b)$，则线段 AA' 的中点坐标为 $\left(\frac{a+2}{2},\frac{b}{2}\right)$，$k_{AA'}=\frac{b}{a-2}$，故 $\begin{cases}\frac{b}{a-2}\cdot(-1)=-1,\\ \frac{a+2}{2}+\frac{b}{2}=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=1.\end{cases}$ 所求最短总路程即为点 A' 到军营的最短距离，故所求最短总路程为 $\sqrt{3^2+1^2}-1=\sqrt{10}-1$.

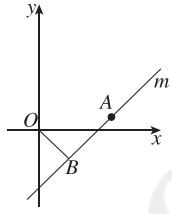
15. B ［解析］由两点间的距离公式得，$F(x,y)=\sqrt{(x-2\sqrt{3})^2+y^2}+\sqrt{(x+1-\sqrt{3})^2+(y-1+\sqrt{3})^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ 是点 $P(x,y)$ 到点 $B(2\sqrt{3},0)$，$A(-1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$，$C(0,2)$ 的距离之和，$F(x,y)$ 的最小值即为点 $P(x,y)$ 到点 $B(2\sqrt{3},0)$，$A(-1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$，$C(0,2)$ 的距离之和的最小值，取最小值时点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，如图所示. $|AB|=|AC|=2\sqrt{2}$，$|BC|=4$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120^\circ$，延长 AP 交 BC 于 M，则 $\angle BPM=\angle CPM=60^\circ$. 在 $\triangle APC$ 与 $\triangle APB$ 中，$\frac{|AC|}{\sin 120^\circ}=\frac{|AP|}{\sin\angle ACP}$，$\frac{|AB|}{\sin 120^\circ}=\frac{|AP|}{\sin\angle ABP}$，又 $\angle ACP$，$\angle ABP$ 均为锐角，$|AC|=|AB|$，所以 $\angle ACP=\angle ABP$，则 $\angle PAC=\angle PAB=45^\circ$，所以 $\angle ACP=\angle ABP=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ$，则 $\angle PCM=\angle PBM=45^\circ-15^\circ=30^\circ$，所以 $\angle CMP=\angle BMP=90^\circ$，所以 $AM\perp BC$，则 $|BP|=|CP|=\frac{BM}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$|PM|=|BP|\sin 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$|AP|=|AM|-|PM|=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $F(x,y)_{\min}=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}+2-\frac{2\sqrt{3}}{3}=2+2\sqrt{3}$. 故选 B.



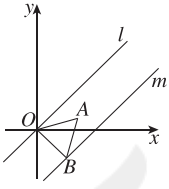
16. ACD ［解析］如图①，设过点 $O(0,0)$ 的直线 l 与直线 OB 垂直，因为 $k_{OB}=-1$，所以直线 $l:y=x$，易知 64 个点中有 8 个落在直线 $l:y=x$ 上，剩余 56 个点中一半在直线 $l:y=x$ 上方，一半在直线 $l:y=x$ 下方，要使 $\angle AOB$ 为锐角，则点 A 应在直线 $l:y=x$ 下方，其中满足要求的点有 28 个，故 $\angle AOB$ 是锐角的概率为 $\frac{28}{64}=\frac{7}{16}$，A 正确；如图②，过点 B 作直线 $m\perp OB$，则点 A 落在直线 m 上时满足 $\angle ABO$ 为直角，因为 $k_{OB}=-1$，所以直线 m 的斜率为 1，则直线 m 的方程为 $y+1=x-1$，即 $y=x-2$，落在直线 $y=x-2$ 上的点有 $(3,1)$，$(4,2)$，$(5,3)$，$(6,4)$，$(7,5)$，$(8,6)$，共 6 个，故 $\angle ABO$ 是直角的概率为 $\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$，B 错误；如图③，要使 $\triangle AOB$ 为锐角三角形，则点 A 落在直线 $l:y=x$ 与直线 $m:y=x-2$ 之间，根据点的坐标特征知，点 A 应落在直线 $y=x-1$ 上，满足要求的点 A 有 $(2,1)$，$(3,2)$，$(4,3)$，$(5,4)$，$(6,5)$，$(7,6)$，$(8,7)$，共 7 个，故 $\triangle AOB$ 是锐角三角形的概率为 $\frac{7}{64}$，C 正确；如图④，直线 OB 的方程为 $x+y=0$，$|OB|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，设直线 $n:x+y+c=0$，直线 n 与直线 OB 之间的距离为 d，则 $d=\frac{|c|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|c|}{\sqrt{2}}$，令 $\frac{1}{2}|OB|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\cdot\frac{|c|}{\sqrt{2}}\leqslant 5$，解得 $-10\leqslant c\leqslant 10$，故要使 $\triangle AOB$ 的面积不大于 5，则点 A 在直线 $x+y-10=0$ 上或直线 $x+y-10=0$ 的下方，故满足要求的点 A 有 $(1,1)$，$(1,2)$，…，$(1,8)$，$(2,1)$，$(2,2)$，…，$(2,8)$，$(3,1)$，$(3,2)$，…，$(3,7)$，$(4,1)$，$(4,2)$，$(4,3)$，$(4,4)$，$(4,5)$，$(4,6)$，$(5,1)$，$(5,2)$，$(5,3)$，$(5,4)$，$(5,5)$，$(6,1)$，$(6,2)$，$(6,3)$，$(6,4)$，$(7,1)$，$(7,2)$，$(7,3)$，$(8,1)$，$(8,2)$，共 $8+8+7+6+5+4+3+2=43$（个），故 $\triangle AOB$ 的面积不大于 5 的概率为 $\frac{43}{64}$，D 正确. 故选 ACD.



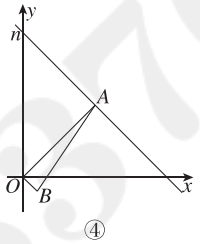
①



②



③



④

第 51 讲　圆的方程

1. C ［解析］将圆 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ 的方程化成标准形式，得 $(x+2)^2+(y-3)^2=16$，∴圆 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ 的圆心为 $(-2,3)$，半径为 4. 故选 C.

2. D ［解析］由题意设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(a<0,b>0,r>0)$，则 $\begin{cases}|a|=|b|=r,\\ \frac{|a+b-2|}{\sqrt{2}}=r,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=-a=r,\\ \frac{2}{\sqrt{2}}=r,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-a=\sqrt{2},\\ r=\sqrt{2},\end{cases}$ 所以圆 C 的方程为 $(x+\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=2$. 故选 D.

3. A ［解析］方法一：因为方程 $x^2+8x+y^2-6y+m=0$ 表示圆，所以 $64+36-4m>0$，得 $m<25$. 令 $y=0$，得 $x^2+8x+m=0$，则 $\Delta=64-4m\geqslant 0$，得 $m\leqslant 16$，令 $x=0$，得 $y^2-6y+m=0$，则 $\Delta'=36-4m\geqslant 0$，得 $m\leqslant 9$，所以 $m\leqslant 9$. 故选 A.

方法二：将圆的方程化成标准方程，即为 $(x+4)^2+(y-3)^2=25-m$，则圆心为 $(-4,3)$，半径为 $\sqrt{25-m}$，由题知 $\begin{cases}\sqrt{25-m}\geqslant 4,\\ \sqrt{25-m}\geqslant 3,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant 9$. 故选 A.

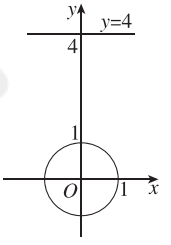
4. D ［解析］设 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，则 $\begin{cases}(-\sqrt{3}-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\ (\sqrt{3}-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\ (0-a)^2+(3-b)^2=r^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=0,\\ b=1,\\ r=2,\end{cases}$ 则 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为 $x^2+(y-1)^2=4$. 故选 D.

5. C ［解析］方法一：方程 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$. 设 $x-y=t$，即 $x-y-t=0$，则当直线 $x-y-t=0$ 与圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 相切时，t 取得最大值或最小值，此时 $\frac{|2-1-t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3$，解得 $t=1+3\sqrt{2}$ 或 $t=1-3\sqrt{2}$，所以 $x-y$ 的最大值为 $1+3\sqrt{2}$. 故选 C.

方法二：方程 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$，由圆的参数方程可设 $\begin{cases}x=2+3\cos\theta,\\ y=1+3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），所以 $x-y=1+3(\cos\theta-\sin\theta)=1+3\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1+3\sqrt{2}$，当 $\theta=-\frac{\pi}{4}$ 时，等号成立. 故选 C.

6. $(3,5)$ ［解析］由方程 $(x-1)^2+(y-2)^2=5-a$ 表示圆，得 $5-a>0$，所以 $a<5$，又过点 $P(0,1)$ 可作圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=5-a$ 的两条切线，所以点 $P(0,1)$ 在圆外，所以 $(0-1)^2+(1-2)^2>5-a$，解得 $a>3$. 所以 a 的取值范围是 $(3,5)$.

7. 3 ［解析］因为 $|PO|=1$，所以 P 是单位圆上的点，又 $A(t,4)$，其中 $t\in\mathbf{R}$，所以 A 是直线 $y=4$ 上的点，由图可知，$|PA|$ 的最小值为 $4-1=3$.



8. A ［解析］因为直线 l 是圆的一条对称轴，所以圆的圆心必定在直线 l 上，将圆的一般方程化为标准方程，即为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，圆心为 $(1,1)$，将圆心坐标代入直线 l 的方程，得 $a+b=1$，则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号，故 ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$. 故选 A.

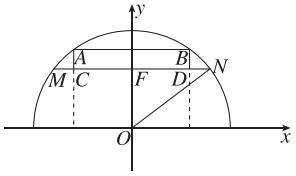
9. D ［解析］由题意可知，圆 $C:x^2+y^2=1$ 的圆心为 $C(0,0)$，半径 $r=1$，且 $a>0$. 由 $PA\perp PB$，可知点 P 的轨迹是以线段 AB 的中点 $M(4,0)$ 为圆心，半径 $R=a$ 的圆，又点 P 在圆 $C:x^2+y^2=1$ 上，可知圆 C 与圆 M 有且仅有一个公共点，则 $|CM|=r+R$ 或 $|CM|=|r-R|$，即 $4=1+a$ 或 $4=|1-a|$，解得 $a=3$ 或 $a=5$. 故选 D.

10. ABD ［解析］圆心 C_k 的坐标为 (k,k)，圆心 C_k 始终在直线 $y=x$ 上，所以 A 正确；令 $(3-k)^2+(0-k)^2=4$，化简得 $2k^2-6k+5=0$，因为 $\Delta_1=36-40=-4<0$，所以 $2k^2-6k+5=0$ 无实数根，所以 B 正确；由 $(2-k)^2+(2-k)^2=4$，化简得 $k^2-4k+2=0$，因为 $\Delta_2=16-8=8>0$，所以该方程有两个不相等实根，所以经过点 $(2,2)$ 的圆 C_k 有两个，所以 C 错误；由圆 C_k 的半径为 2，得圆 C_k 的面积为 4π，所以 D 正确. 故选 ABD.

11. BC ［解析］设点 $P(x,y)$，依题意得 $[(x+2)^2+y^2][(x-2)^2+y^2]=25$. 对于 A，$25=[(x+2)^2+y^2][(x-2)^2+y^2]\geqslant(x+2)^2(x-2)^2=(x^2-4)^2$，当且仅当 $y=0$ 时取等号，解不等式 $(x^2-4)^2\leqslant 25$，得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，即点 P 的横坐标的取值范围是 $[-3,3]$，故 A 错误；对于 B，$[(x^2+y^2+4)+4x][(x^2+y^2+4)-4x]=25$，则 $x^2+y^2+4=\sqrt{25+16x^2}$，因为 $0\leqslant x^2\leqslant 9$，所以 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\sqrt{25+16x^2}-4}\in[1,3]$，故 B 正确；对于 C，$\triangle PMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PM||PN|\sin\angle MPN\leqslant\frac{1}{2}|PM||PN|=\frac{5}{2}$，当且仅当 $\angle MPN=90^\circ$ 时取等号，当 $\angle MPN=90^\circ$ 时，点 P 在以线段 MN 为直径的圆 $x^2+y^2=4$ 上，

由 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x^2+y^2+4=\sqrt{25+16x^2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\pm\dfrac{\sqrt{39}}{4},\\ y=\pm\dfrac{5}{4},\end{cases}$ 所以$\triangle PMN$的面积的最大值为$\dfrac{5}{2}$，故C正确；对于D，点$(3,0)$在动点P的轨迹上，当点P为此点时，$|PM|+|PN|=5+1=6$，故D错误．故选BC．

12. 10　2　［解析］建立如图所示的平面直角坐标系，其中弧MN为圆拱桥部分，O为圆拱所在圆的圆心，则$|MN|=16$，设圆拱所在圆的半径为r，则$|OF|=r-4$．连接ON，在Rt$\triangle OFN$中，$|OF|^2+|FN|^2=|ON|^2$，即$(r-4)^2+\left(\dfrac{16}{2}\right)^2=r^2$，解得$r=10$，所以圆拱所在圆的方程为$x^2+y^2=100$．设图中矩形$ABDC$为船的截面，则$|AB|=12$，设$B(6,y)(y>0)$，将点$B$的坐标代入圆的方程得$36+y^2=100$，可得$y=8$，所以船要通过拱桥，船体的高度不能超过$8-6=2$(m)．



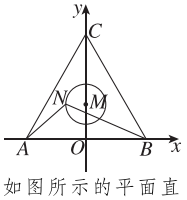
13. $[10,30]$　［解析］令$\omega=|3x-4y+8|+|3x-4y+12|=5\left(\dfrac{|3x-4y+8|}{5}+\dfrac{|3x-4y+12|}{5}\right)=5(d_1+d_2)$，其中$d_1$，$d_2$分别表示圆$O$：$x^2+y^2=1$上任意一点$P(x,y)$到直线$l_1$：$3x-4y+8=0$和$l_2$：$3x-4y+12=0$的距离．因为圆心$O$到直线$l_1$：$3x-4y+8=0$和$l_2$：$3x-4y+12=0$的距离分别为$h_1=\dfrac{8}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{8}{5}$，$h_2=\dfrac{12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{12}{5}$，所以$\dfrac{8}{5}-1\leqslant d_1\leqslant\dfrac{8}{5}+1$且$\dfrac{12}{5}-1\leqslant d_2\leqslant\dfrac{12}{5}+1$，即$\dfrac{3}{5}\leqslant d_1\leqslant\dfrac{13}{5}$且$\dfrac{7}{5}\leqslant d_2\leqslant\dfrac{17}{5}$，所以$10\leqslant5(d_1+d_2)\leqslant30$，即$|3x-4y+8|+|3x-4y+12|$的取值范围是$[10,30]$．

14. 3　［解析］曲线$x^4+y^2=2$的参数方程为$\begin{cases}x^2=\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数)，该曲线是关于原点$(0,0)$中心对称的图形，所以曲线$x^4+y^2=2$上的点$(x,y)$到原点的距离$d$为直径的一半，而$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\sqrt{2}\cos\theta+2\sin^2\theta}=\sqrt{-2\cos^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta+2}$，当$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$时，$d$取得取大值$\dfrac{3}{2}$，所以所求直径为3．

15. 解：(1)设$M(x,y)$，由$|MA|=\sqrt{2}|MB|$，即$|MA|^2=2|MB|^2$，得$(x+2)^2+y^2=2[(x-2)^2+y^2]$，化简可得$x^2+y^2-12x+4=0$，即为点$M$的轨迹方程，它表示圆心为$(6,0)$，半径为$4\sqrt{2}$的圆．

(2)设$P(x_1,y_1)$，则$x_1^2+y_1^2-12x_1+4=0$，设$Q(t,0)(t\neq0)$，则$\left(\dfrac{|PQ|}{|PO|}\right)^2=\dfrac{(x_1-t)^2+y_1^2}{x_1^2+y_1^2}=\dfrac{x_1^2+y_1^2-2tx_1+t^2}{x_1^2+y_1^2}=\dfrac{(12-2t)x_1+(t^2-4)}{12x_1-4}$，要使$\dfrac{|PQ|}{|PO|}$为定值，则$\dfrac{12-2t}{12}=\dfrac{t^2-4}{-4}$，解得$t=0$(舍去)或$t=\dfrac{2}{3}$，所以$\left(\dfrac{|PQ|}{|PO|}\right)^2=\dfrac{(12-2t)x_1+(t^2-4)}{12x_1-4}=\dfrac{8}{9}$，故存在定点$Q\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，使得$\dfrac{|PQ|}{|PO|}$为定值$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

16. A　［解析］设等边三角形ABC的边长为a，则其面积$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=9\sqrt{3}$，可得$a=6$．以$AB$所在直线为$x$轴，$AB$的垂直平分线为$y$轴建立如图所示的平面直角坐标系．由$M$为$\triangle ABC$的内心，得$M$在$OC$上，且$OM=\dfrac{1}{3}OC$，则$A(-3,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3\sqrt{3})$，$M(0,\sqrt{3})$，由于$|MN|=1$，则点$N$在以$M$为圆心，1为半径的圆上．设$N(x,y)$，则$x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$，即$x^2+y^2-2\sqrt{3}y+2=0$，且$\sqrt{3}-1\leqslant y\leqslant1+\sqrt{3}$，又$\overrightarrow{NA}=(-3-x,-y)$，$\overrightarrow{NB}=(3-x,-y)$，所以$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(x+3)(x-3)+y^2=x^2+y^2-9=2\sqrt{3}y-11\geqslant2\sqrt{3}\times(\sqrt{3}-1)-11=-5-2\sqrt{3}$．故选A．



17. 1　$4\sqrt{2}$　［解析］由已知可得$(x_0-1)^2+y_0^2=3$，则$-\sqrt{3}\leqslant x_0-1\leqslant\sqrt{3}$，得$1-\sqrt{3}\leqslant x_0\leqslant1+\sqrt{3}$，且有$y_0^2=-x_0^2+2x_0+2$，所以$|PA|\cdot|PB|=\sqrt{[(x_0+2)^2+y_0^2]\cdot[(x_0-2)^2+y_0^2]}=\sqrt{(6+6x_0)(6-2x_0)}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{(1+x_0)(3-x_0)}\leqslant\sqrt{3}\cdot(1+x_0+3-x_0)=4\sqrt{3}$，当且仅当$1+x_0=3-x_0$，即$x_0=1$时取等号．因为$|PA|^2=6+6x_0$，$|PB|^2=6-2x_0$，所以$|PA|^2+3|PB|^2=24$．设$|PA|=2\sqrt{6}\cos\theta$，$|PB|=2\sqrt{2}\sin\theta$，其中$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则$|PA|+|PB|=2\sqrt{6}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta=4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$，因为$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{3}<\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，当$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，$|PA|+|PB|$取得最大值$4\sqrt{2}$，此时$|PA|^2=6+6x_0=24\cos^2\dfrac{\pi}{6}=18$，可得$x_0=2$，符合题意．

第52讲　直线与圆、圆与圆的位置关系

1. C　［解析］将两圆的一般方程化为标准方程得C_1：$(x-2)^2+(y+1)^2=9$，C_2：$(x+2)^2+(y-2)^2=4$，可知圆心为$C_1(2,-1)$，$C_2(-2,2)$，圆C_1的半径$r_1=3$，圆C_2的半径$r_2=2$．因为$|C_1C_2|=\sqrt{(2+2)^2+(-1-2)^2}=5=r_1+r_2$，所以两圆外切．故选C．

2. C　［解析］因为直线$mx-y+m+\sqrt{3}=0$与圆$x^2+y^2=4$相切，所以由圆心到直线的距离等于半径得$\dfrac{|m+\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}=2$，解得$m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．故选C．

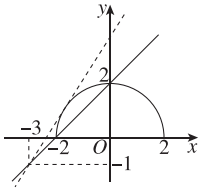
3. A　［解析］由题意知，圆心$(0,1)$到直线l的距离$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}<1<\sqrt{5}$，故直线$l$与圆$C$相交．故选A．

4. C　［解析］圆C_1：$x^2+y^2=1$的圆心为$C_1(0,0)$，半径$r_1=1$，圆C_2：$x^2+y^2-6x-8y+9=0$的圆心为$C_2(3,4)$，半径$r_2=4$，则$|C_1C_2|=\sqrt{3^2+4^2}=5=r_1+r_2$，故两圆外切，则两圆公切线的条数为3．故选C．

5. CD　［解析］易知直线$y=kx+1$恒过点$P(0,1)$，圆C：$(x-2)^2+y^2=9$的圆心为$C(2,0)$，半径$r=3$．当直线经过圆心时，$|AB|$最大，$|AB|_{\max}=2r=6$；连接PC，当直线与PC所在直线垂直时，$|AB|$最小，$|AB|_{\min}=2\sqrt{r^2-|PC|^2}=2\times\sqrt{9-5}=4$．所以$4\leqslant|AB|\leqslant6$．故选CD．

6. $y=\sqrt{3}x+2$或$y=\sqrt{3}x-2$　［解析］因为切线的一个方向向量为$(1,\sqrt{3})$，所以切线的斜率为$\sqrt{3}$，故可设切线方程为$y=\sqrt{3}x+b$．因为直线$y=\sqrt{3}x+b$与圆$x^2+y^2=1$相切，圆$x^2+y^2=1$的圆心坐标为$(0,0)$，半径为1，圆心$(0,0)$到直线$y=\sqrt{3}x+b$的距离为$\dfrac{|\sqrt{3}\times0-0+b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{2}$，所以$\dfrac{|b|}{2}=1$，所以$b=2$或$b=-2$，所以与圆$x^2+y^2=1$相切且一个方向向量为$(1,\sqrt{3})$的直线的方程为$y=\sqrt{3}x+2$或$y=\sqrt{3}x-2$．

7. $\left[1,\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}\right)$　［解析］由题得$\sqrt{4-x^2}=k(x+3)-1$，作出曲线$y=\sqrt{4-x^2}$与直线$y=k(x+3)-1$，如图所示，则原问题转化为当直线与曲线有两个不同的交点时，求实数k的取值范围．直线$y=k(x+3)-1$过定点$(-3,-1)$．当直线与半圆相切时，圆心O到直线的距离$d=2$，即$\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{5}$(舍去)或$k=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}$；当直线过点$(-2,0)$时，可得直线的斜率$k=\dfrac{-1-0}{-3+2}=1$．故实数$k$的取值范围为$\left[1,\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}\right)$．



8. C　［解析］圆$x^2+y^2=2$的圆心坐标为$(0,0)$，半径为$\sqrt{2}$，直线$mx-y+1=0$($m\in\mathbf{R}$)过圆内的定点$(0,1)$，斜率可正可负可为0，A，B，D选项都有可能，C选项不可能．故选C．

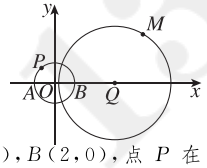
9. B　［解析］圆心坐标为$(2,2)$，半径为2．因为l将该圆分成的两段弧长之比为2∶1，所以两段弧所对的圆心角分别为$\dfrac{4\pi}{3}$和$\dfrac{2\pi}{3}$，由几何性质可知，圆心到l的距离为1，设l的方程为$y=kx$，则$\dfrac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$．故选B．

10. D　［解析］圆$x^2+y^2=1$的圆心为$O(0,0)$，由题意得$|PO|^2=|PA|^2+|OA|^2=1+1=2$，所以$a^2+b^2=2$．令$a=\sqrt{2}\cos\theta$，$b=\sqrt{2}\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi)$，则$a+2b=\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta=\sqrt{10}\sin(\theta+\varphi)$，其中$\tan\varphi=\dfrac{1}{2}$，所以$a+2b$的最大值为$\sqrt{10}$．故选D．

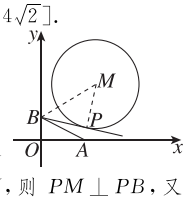
11. ACD　［解析］因为$1^2+1^2+a+a-2a-4=-2<0$，所以$P(1,1)$在圆M内，所以过点P的任意直线与圆M都相交，故A选项正确．圆M的圆心为

$M\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$，半径 $r=\frac{\sqrt{2a^2+8a+16}}{2}$，点 $M\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$ 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为 $\frac{\left|-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}$，因为圆 M 与直线 $x+y+2=0$ 无交点，所以 $\frac{\left|-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}>r=\frac{\sqrt{2a^2+8a+16}}{2}$，即 $\frac{\left|-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\frac{\sqrt{a^2+4a+8}}{\sqrt{2}}$，所以 $|-a+2|>\sqrt{a^2+4a+8}$，两边平方得 $a^2-4a+4>a^2+4a+8$，解得 $a<-\frac{1}{2}$，故 B 选项错误. 圆 M 的半径 $r=\frac{\sqrt{2a^2+8a+16}}{2}$，当 $a=-2$ 时，圆 M 的半径最小，则面积最小，此时圆心为 $M(1,1)$，半径 $r=\sqrt{2}$，圆 Q：$x^2+y^2+6x-10y+16=0$ 的圆心为 $Q(-3,5)$，半径 $R=\frac{\sqrt{6^2+(-10)^2-4\times16}}{2}=3\sqrt{2}$，可得 $|MQ|=\sqrt{(1+3)^2+(1-5)^2}=4\sqrt{2}=R+r=3\sqrt{2}+\sqrt{2}$，所以当圆 M 的面积最小时，圆 M 与圆 Q 外切，圆 M 与圆 Q 有三条公切线，故 C 选项正确. 圆 M 的半径 $r=\frac{\sqrt{2a^2+8a+16}}{2}=\frac{\sqrt{2(a+2)^2+8}}{2}\geqslant\sqrt{2}$，则 $2r\geqslant2\sqrt{2}$，所以无论 a 为何值，圆 M 都有弦长为 $2\sqrt{2}$ 的弦. $|MP|=\sqrt{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2+\left(1+\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}a^2+2a+2}$，$r=\frac{\sqrt{2a^2+8a+16}}{2}$，当弦长为 $2\sqrt{2}$ 时，圆心 M 到弦所在直线的距离 $d=\sqrt{r^2-2}=\sqrt{\frac{2a^2+8a+16}{4}-2}=\sqrt{\frac{2a^2+8a+8}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}a^2+2a+2}$，所以 $d=|MP|$，所以 MP 垂直平分弦，所以无论 a 为何值，圆 M 都有弦长为 $2\sqrt{2}$ 的弦，且被点 P 平分，故 D 选项正确. 故选 ACD.

12. $[0,8+4\sqrt{2}]$ ［解析］以 AB 的中点 O 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图所示，则 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，点 P 在 $\odot O$：$x^2+y^2=4$ 上. 设 $M(x,y)$，则 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，化简得 $x^2+y^2-12x+4=0$，即 $(x-6)^2+y^2=32$，所以点 M 的轨迹是以 $Q(6,0)$ 为圆心，$4\sqrt{2}$ 为半径的圆. 因为 $4\sqrt{2}-2<|OQ|=6<4\sqrt{2}+2$，所以 $\odot O$ 与 $\odot Q$ 的位置关系是相交，所以 $|PM|$ 的取值范围是 $[0,8+4\sqrt{2}]$.



13. $3\sqrt{2}$ ［解析］圆 M：$(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 的圆心为 $M(5,5)$，半径为 4，当 $\angle PBA$ 最小时，如图所示，PB 与圆 M 相切. 连接 MP，BM，则 $PM\perp PB$，又 $|BM|=\sqrt{(0-5)^2+(2-5)^2}=\sqrt{34}$，$|MP|=4$，所以由勾股定理得 $|PB|=\sqrt{|BM|^2-|MP|^2}=3\sqrt{2}$，所以当 $\angle PBA$ 最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$.



14. 解：(1)两圆方程相减得 $x-2y+4=0$，故公共弦 AB 所在直线的方程为 $x-2y+4=0$. 因为圆 C_1 的圆心为 $C_1(-1,-1)$，半径 $r_1=\sqrt{10}$，圆心 C_1 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|-1+2+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，所以 $|AB|=2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{5}$.

(2)圆 C_2 的圆心为 $C_2(1,-5)$，过点 C_1，C_2 的直线方程为 $\frac{y+1}{-5+1}=\frac{x+1}{1+1}$，即 $2x+y+3=0$. 由 $\begin{cases}2x+y+3=0,\\y=-x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3,\\y=3,\end{cases}$ 故所求圆的圆心为 $(-3,3)$，点 $(-3,3)$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|-3-6+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，则所求圆的半径为 $\sqrt{5}+5=\sqrt{10}$，所以所求圆的方程为 $(x+3)^2+(y-3)^2=10$.

(3)经过 A，B 两点且面积最小的圆就是以 AB 为直径的圆，由 $\begin{cases}x-2y+4=0,\\2x+y+3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$ 故所求圆的圆心为 $(-2,1)$，又 $|AB|=2\sqrt{5}$，所以所求圆的半径为 $\sqrt{5}$，故所求圆的方程为 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$.

15. 解：(1)由题意得 $O(0,0)$，$x^2+y^2-2x-2y=0$ 可化为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，故 $E(1,1)$，圆 E 的半径为 $\sqrt{2}$. 由 $(0-1)^2+(0-1)^2=2$，知 $O(0,0)$ 在圆 E 上，又圆 O 与圆 E 内切，故 $r>\sqrt{2}$，所以 $|OE|=r-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，解得 $r=2\sqrt{2}$.

将 $y=kx+1$ 与 $x^2+y^2=8$ 联立得 $(1+k^2)x^2+2kx-7=0$，

$\Delta=4k^2+28(1+k^2)>0$ 恒成立.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{2k}{1+k^2}$，$x_1x_2=\frac{-7}{1+k^2}$，

故 $y_1y_2=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\frac{-7k^2}{1+k^2}-\frac{2k^2}{1+k^2}+1=\frac{1-8k^2}{1+k^2}$，

由 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{-7}{1+k^2}+\frac{1-8k^2}{1+k^2}=-7$，解得 $k=\pm1$.

(2)当直线 AB 的斜率不存在时，直线 CD 的斜率也不存在，

此时 $|AB|=|CD|$，$\lambda=\frac{|AB|}{|CD|}=1$.

当直线 AB 或直线 CD 的斜率为 0 时，不满足倾斜角互补.

当直线 AB 的斜率存在且不为 0 时，设直线 AB：$y-1=k(x-1)$，圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|k-1|}{\sqrt{1+k^2}}$，

故 $|AB|=2\sqrt{8-d^2}=2\sqrt{8-\frac{(k-1)^2}{1+k^2}}=2\sqrt{\frac{7k^2+2k+7}{1+k^2}}$.

直线 CD 的方程为 $y-1=-k(x-1)$，

故 $|CD|=2\sqrt{\frac{7(-k)^2-2k+7}{1+(-k)^2}}=2\sqrt{\frac{7k^2-2k+7}{1+k^2}}$，则 $\lambda=\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{2\sqrt{\frac{7k^2+2k+7}{1+k^2}}}{2\sqrt{\frac{7k^2-2k+7}{1+k^2}}}=\sqrt{\frac{7k^2+2k+7}{7k^2-2k+7}}=\sqrt{\frac{7k^2-2k+7+4k}{7k^2-2k+7}}=\sqrt{1+\frac{4k}{7k^2-2k+7}}=\sqrt{1+\frac{4}{7k+\frac{7}{k}-2}}$.

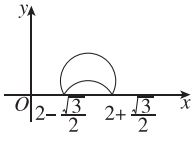
当 $k>0$ 时，$\lambda=\sqrt{1+\frac{4}{7k+\frac{7}{k}-2}}\leqslant\sqrt{1+\frac{4}{2\sqrt{7k\cdot\frac{7}{k}}-2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $7k=\frac{7}{k}$，即 $k=1$ 时，等号成立，且 $\lambda>1$；

当 $k<0$ 时，$\lambda=\sqrt{1+\frac{4}{7k+\frac{7}{k}-2}}\geqslant\sqrt{1+\frac{4}{-2\sqrt{(-7k)\cdot\left(-\frac{7}{k}\right)}-2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $-7k=-\frac{7}{k}$，即 $k=-1$ 时，等号成立，且 $\lambda<1$. 综上，$\lambda_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

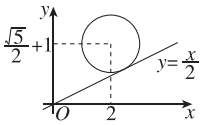
16. D ［解析］取线段 AB 的中点 D，连接 CD，则 $CD\perp AB$，则 $\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=2\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CD}=2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP})\cdot\overrightarrow{CD}=2|\overrightarrow{CD}|^2$. 直线 l 经过点 $M(0,4)$，考虑临界情况. 当线段 AB 的中点 D 与点 M 重合时(此时 $CM\perp AB$)，弦 AB 的长最小，此时 CD 最长，且 $|CD|=|CM|=4-3=1$，但此时直线 l 与 x 轴平行，点 P 不存在；当线段 AB 的中点 D 与点 C 重合时，点 P 与原点 O 重合，此时 CD 最短，为 0，符合题意. 故 $\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ 的取值范围为 $[0,2)$. 故选 D.

17. ①②④ ［解析］对于①，当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$S=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1,y\geqslant0\right\}\cup\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1,y\geqslant0\right\}$，对于 $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$，令 $y=0$，解得 $x=2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，对于 $(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$，令 $y=0$，解得 $x=2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，画出 S 表示的区域，如图甲所示，所以 $S\cap\{(x,y)|y=0\}=\left\{\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\right\}$，所以①正确. 对于②，当 $m=\frac{\sqrt{5}}{2}+1$ 时，$S=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+\left[y-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]^2=1,y\geqslant0\right\}\cup\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+\left[y+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]^2=1,y\geqslant0\right\}=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+\left[y-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]^2=1\right\}$，画出 S 表示的区域，如图乙所示. 圆 $(x-2)^2+\left[y-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]^2=1$ 的圆心为 $\left(2,\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)$，半径为 1，作出直线 $y=\frac{1}{2}x$，即直线 $x-2y=0$，因为点 $\left(2,\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离为

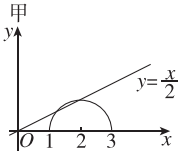
$\frac{\left|2-2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\right|}{\sqrt{5}}=1$，所以圆$(x-2)^2+\left[y-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]^2=1$与直线$y=\frac{1}{2}x$相切，又$T=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=\frac{1}{2}x\right\}$，$P=S\cap T$，所以$P$中有1个元素，所以②正确．对于③，当$m=0$时，$S=\{(x,y)|(x-2)^2+y^2=1,y\geqslant 0\}$，画出$S$表示的区域与直线$y=\frac{1}{2}x$，如图丙所示，半圆的圆心为$(2,0)$，半径为1，点$(2,0)$到直线$x-2y=0$的距离为$\frac{2}{\sqrt{5}}<1$，故半圆与直线$y=\frac{x}{2}$相交，此时$P$中有2个元素，所以③错误．对于④，若$|m|\geqslant 1$，则$S=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-m)^2=1,y\geqslant 0\}\cup\{(x,y)|(x-2)^2+(y+m)^2=1,y\geqslant 0\}=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-|m|)^2=1\}$，此时直线$y=\frac{1}{2}x$与圆$(x-2)^2+(y-|m|)^2=1$至多有2个公共点，不符合题意．若$m=0$，则由③的分析可知$P$中有2个元素．综上所述，若$P$中有4个元素，则$m$无整数解，所以④正确．故填①②④．



甲



乙



丙

第53讲　椭圆

/第1课时　椭圆及其性质/

1. B ［解析］根据椭圆方程可得焦点在y轴上，且$c^2=a^2-b^2=25-16=9$，所以$c=3$，故焦点坐标为$(0,\pm 3)$．故选B．

2. A ［解析］∵椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$，$a>1$，∴$\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{1}{2}$，∴$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故选A．

3. D ［解析］因为方程$\frac{x^2}{k-4}+\frac{y^2}{8-k}=1$表示的曲线是椭圆，所以$\begin{cases}k-4>0,\\8-k>0,\\k-4\neq 8-k,\end{cases}$解得$4<k<8$且$k\neq 6$，所以实数$k$的取值范围是$(4,6)\cup(6,8)$．故选D．

4. A ［解析］设$M(x,y)$，则$P'(x,0)$，$P(x,2y)$，因为P在曲线C：$x^2+y^2=16$$(y>0)$上，所以$x^2+(2y)^2=16(y>0)$，整理得点$M$的轨迹方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$(y>0)$．故选A．

5. ABD ［解析］设椭圆C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的长轴长为$2a$，短轴长为$2b$，焦距为$2c$，则$a^2=9,b^2=4,c^2=9-4=5$，故$a=3,b=2,c=\sqrt{5}$，所以$C$的焦距为$2\sqrt{5}$，故A正确；$C$的离心率为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，故B正确；$\triangle F_1PF_2$的周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=6+2\sqrt{5}$，故C错误；当点$P$位于椭圆$C$的上顶点或下顶点时，$\triangle F_1PF_2$的面积最大，最大值为$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，故D正确．故选ABD．

6. $\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{4}=1$（答案不唯一） ［解析］设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题得$c=\frac{3}{2}$，所以$a^2-b^2=\frac{9}{4}$，取$b=2$，则椭圆的标准方程可以为$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{4}=1$．

7. $\frac{1}{3}$ ［解析］设椭圆C的半焦距为c，由椭圆的几何性质知，$|PF|_{\max}=a+c$，$|PF|_{\min}=a-c$，依题意得$a+c=2(a-c)$，解得$a=3c$，所以椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$．

8. A ［解析］连接MF,FO，由题意知，CD是线段MF的垂直平分线，∴$|MP|=|PF|$，∴$|PF|+|PO|=|PM|+|PO|=|MO|$（定值），显然$|MO|>|FO|$，∴根据椭圆的定义可知点P的轨迹是以F,O两点为焦点的椭圆．故选A．

9. B ［解析］椭圆E：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的右焦点为$F(1,0)$，设$P(x,y)$，由$|PF|=\sqrt{3}$，得$(x-1)^2+y^2=3$．由$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=3,\\\frac{3}{4}x^2+y^2=3,\end{cases}$消去$y$得$x^2-8x+4=0$，又$-2\leqslant x\leqslant 2$，所以$x=4-2\sqrt{3}$，当$x=4-2\sqrt{3}$时，对应的$y$值有2个，所以$E$上满足$|PF|=\sqrt{3}$的点$P$有2个．故选B．

10. C ［解析］椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，则$a=3,b=2,c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$．设椭圆的左焦点为$F_1$，连接$AF_1,BF_1$，则由椭圆的对称性可知$|OA|=|OB|$，$|OF_1|=|OF_2|$，其中$O$为坐标原点，可知四边形$AF_1BF_2$为平行四边形，则$|BF_2|=|AF_1|$，可得$\triangle ABF_2$的周长为$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=|AF_1|+|AF_2|+|AB|=2a+|AB|$，当$A,B$为椭圆短轴的两个端点时，$|AB|$取得最小值，最小值为$2b=4$，所以$\triangle ABF_2$的周长为$2a+|AB|\geqslant 6+4=10$，故$\triangle ABF_2$的周长的最小值为10．故选C．

11. C ［解析］方法一：设$P(x_0,y_0)$，易知$B(0,b)$，由$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，得$x_0^2=a^2\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)$，则$|PB|^2=x_0^2+(y_0-b)^2=x_0^2+y_0^2-2by_0+b^2=a^2\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+y_0^2-2by_0+b^2=-\frac{c^2}{b^2}y_0^2-2by_0+a^2+b^2$，$y_0\in[-b,b]$．由题知，当$y_0=-b$时，$|PB|^2$取得最大值，所以由二次函数的图象知$-\frac{b^3}{c^2}\leqslant -b$，故$b^2\geqslant c^2$，即$a^2-c^2\geqslant c^2$，所以$\frac{c}{a}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，故椭圆$C$的离心率$e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，故选C．

方法二：P是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任意一点，$B$是椭圆$C$的上顶点，因为$|PB|\leqslant 2b$，所以以$B$为圆心，$2b$为半径的圆与椭圆至多有一个交点．由$\begin{cases}b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,\\x^2+(y-b)^2=4b^2,\end{cases}$消去$x$可得$(a^2-b^2)y^2+2b^3y+3b^4-a^2b^2=0$，令$\Delta=4b^6-4b^2(a^2-b^2)(3b^2-a^2)=0$，化简整理可得$(a^2-2b^2)^2=0$，可得$a=\sqrt{2}b$，若要满足题意，则$a\leqslant\sqrt{2}b$，故$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$．故选C．

12. BD ［解析］由$y^2+2y=x^3-4x^2+5x-3$，得$(y+1)^2=x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$．对于A，因为$(x-2-1)^2(x-2-2)\neq(-x-1)^2(-x-2)$，所以曲线$W$不关于直线$x=-1$对称，故A不正确．对于B，设点$(x_0,y_0)$在曲线$W$上，则$y_0^2+2y_0=x_0^3-4x_0^2+5x_0-3$，因为$(-2-y_0)^2+2(-2-y_0)-(x_0^3-4x_0^2+5x_0-3)=4+y_0^2+4y_0-4-2y_0-y_0^2-2y_0=0$，所以点$(x_0,-2-y_0)$在曲线$W$上，所以曲线$W$关于直线$y=-1$对称，故B正确．对于C，D，由$(y+1)^2\geqslant 0$，得$(x-1)^2(x-2)\geqslant 0$，解得$x=1$或$x\geqslant 2$，故C不正确，D正确．故选BD．

13. $-1+\sqrt{2}$ ［解析］由题得$MF\perp x$轴，不妨设点M在第一象限内，因为M在抛物线上，所以$M\left(\frac{p}{2},p\right)$，又$M$在椭圆上，所以$M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，所以$\frac{p}{2}=c$且$p=\frac{b^2}{a}$，所以$2ac=b^2=a^2-c^2$，所以$e^2+2e-1=0$，解得$e=-1+\sqrt{2}$或$e=-1-\sqrt{2}$（舍去），所以$e=-1+\sqrt{2}$．

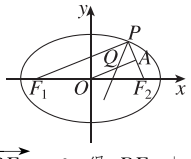
14. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ［解析］由题意知$A_1(-c,0)$，$A_2(a,0)$．设$P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，$\cos\theta\in(0,1)$，则$\overrightarrow{A_1P}=(a\cos\theta+c,b\sin\theta)$，$\overrightarrow{A_2P}=(a\cos\theta-a,b\sin\theta)$，∵$\angle A_1PA_2=\frac{\pi}{2}$，∴$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(a\cos\theta+c)(a\cos\theta-a)+b^2\sin^2\theta=0$，即$a^2\cos^2\theta+ac\cos\theta-a^2\cos\theta-ac+b^2-b^2\cos^2\theta=0$，即$c^2\cos^2\theta+(ca-a^2)\cos\theta+b^2-ac=0$，即$(c^2\cos\theta+ac-b^2)(\cos\theta-1)=0$，则$\cos\theta=\frac{b^2-ac}{c^2}=\frac{a^2-ac-c^2}{c^2}$或$\cos\theta=1$（舍去）．令$\frac{c}{a}=t(t>0)$，则$\cos\theta=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-1$，∵$\cos\theta\in(0,1)$，∴$0<1-t-t^2<t^2$，可得$\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴$\frac{c}{a}$的取值范围为$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$．

15. 解：(1)不妨设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$(a>b>0)$，焦距为$2c$．在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理得$\cos 60^\circ=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$，即$\frac{4a^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{1}{2}$，所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-4c^2$，所以$3|PF_1|\cdot|PF_2|=4b^2$，所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{4b^2}{3}$．因为$|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=a^2$，当且仅当$|PF_1|=|PF_2|$时等号成立，所以$3a^2\geqslant 4(a^2-c^2)$，所以$\frac{c}{a}\geqslant\frac{1}{2}$，所以$e\geqslant\frac{1}{2}$．又因为$0<e<1$，所以椭圆

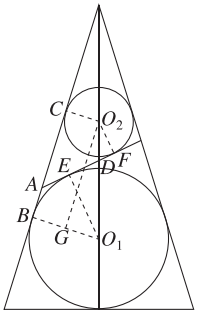
的离心率的取值范围是$\left[\frac{1}{2},1\right)$.

(2)证明：由(1)可知$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{4}{3}b^2$，所以$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin 60°=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}b^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}b^2$，所以$\triangle F_1PF_2$的面积只与椭圆的短轴长有关.

16. C [解析] 如图，设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，延长OQ交PF_2于A，由题意知$OQ\parallel PF_1$，O为F_1F_2的中点，故A为PF_2的中点. 由$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，得$PF_1\perp PF_2$，则$\angle QAP=\frac{\pi}{2}$，又$\angle QPA=\frac{\pi}{4}$，所以$\triangle AQP$是等腰直角三角形，故有$\begin{cases}m+n=2a,\\ b+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}m,\end{cases}$化简得$\begin{cases}m-n=2b,\\ m+n=2a,\end{cases}$所以$\begin{cases}m=a+b,\\ n=a-b,\end{cases}$又$m^2+n^2=4c^2$，所以$(a+b)^2+(a-b)^2=4c^2$，即$a^2+b^2=2c^2$，又$b^2=a^2-c^2$，所以$2a^2=3c^2$，所以$e^2=\frac{2}{3}$，故$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选C.



17. $\frac{1}{3}$ [解析] 易知O_1O_2与EF相交，设$O_1O_2\cap EF=D$，连接O_1E，O_2F，由题意得$\begin{cases}\frac{|O_2D|}{|O_1D|}=\frac{|O_2F|}{|O_1E|}=\frac{1}{2},\\ |O_2D|+|O_1D|=2\sqrt{10},\end{cases}$解得$\begin{cases}|O_2D|=\frac{2\sqrt{10}}{3},\\ |O_1D|=\frac{4\sqrt{10}}{3},\end{cases}$所以$|DE|=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{10}}{3}\right)^2-4^2}=\frac{4}{3}$，$|DF|=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2-2^2}=\frac{2}{3}$，所以$2c=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$，即$c=1$. 设直线$EF$与圆锥侧面的一个交点为$A$(靠近点$E$)，点$A$所在的母线与球$O_1$，$O_2$分别相切于$B$，$C$两点，其截面图如图所示，则$|AB|=|AE|$，$|AC|=|AF|$，两式相加得$|AB|+|AC|=|AE|+|AF|=a-c+a+c=2a$，即$|BC|=2a$. 连接$O_1B$，$O_2C$，过$O_2$作$O_2G\perp O_1B$，垂足为$G$，则四边形$BGO_2C$为矩形，所以$2a=|BC|=|O_2G|=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$，即$a=3$，所以椭圆的离心率为$\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$.



/第2课时　直线与椭圆的位置关系/

1. C [解析] 由题意可知$\begin{cases}\frac{2b^2}{a}=3,\\ c=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3,\\ c^2=1,\end{cases}$所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 故选C.

2. D [解析] 直线AB的斜率$k=\frac{1-0}{2-3}=-1$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程可得$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，两式相减，整理得$\frac{2}{a^2}-\frac{1}{b^2}=0$，又$c=3$，$a^2=b^2+c^2$，所以$a^2=18$，$b^2=9$，所以椭圆$M$的方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$. 故选D.

3. D [解析] 设与直线$x+2y-\sqrt{2}=0$平行且与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$相切的直线方程为$x+2y+m=0$，由$\begin{cases}x+2y+m=0,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$消去$x$整理得$8y^2+4my-16+m^2=0$，即$2y^2+my-4+\frac{m^2}{4}=0$，由$\Delta=m^2-8\left(\frac{m^2}{4}-4\right)=0$，解得$m=\pm4\sqrt{2}$. 易知直线$x+2y+4\sqrt{2}=0$与$x+2y-\sqrt{2}=0$间的距离即为所求的最大距离，最大距离为$\frac{|\sqrt{2}+4\sqrt{2}|}{\sqrt{5}}=\sqrt{10}$，故选D.

4. BC [解析] 易知椭圆C的焦点在y轴上，焦点坐标为$(0,-1)$，$(0,1)$，故A错误；椭圆C的长轴长为4，故B正确；椭圆C的离心率为$\sqrt{\frac{4-3}{4}}=\frac{1}{2}$，故C正确；由$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1,\\ 2x-y-3=0,\end{cases}$消去$y$整理得$16x^2-36x+15=0$，因为$\Delta=36^2-4\times16\times15=336>0$，所以直线$2x-y-3=0$与椭圆$C$有两个交点，故D错误. 故选BC.

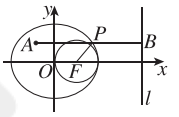
5. $\sqrt{35}$ [解析] 由$\begin{cases}x^2+4y^2=16,\\ y=\frac{1}{2}x+1,\end{cases}$消去$y$整理得$x^2+2x-6=0$. 设直线与椭圆的交点为$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=-6$，$\therefore|MN|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}|x_1-x_2|=\sqrt{\frac{5}{4}[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{\frac{5}{4}\times(4+24)}=\sqrt{35}$.

6. 相交 [解析] 因为$2ax+ay+cy+2c=0$可化为$a(2x+y)+(y+2)c=0$，所以直线$2ax+ay+cy+2c=0$过定点$(1,-2)$，又点$(1,-2)$在椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$内部，所以直线$2ax+ay+cy+2c=0$与椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$的位置关系是相交.

7. $-\frac{3}{4}$ [解析] 设$P(x_0,y_0)(x_0\neq0)$，则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，即$y_0^2-3=-\frac{3x_0^2}{4}$，不妨令$A$，$B$的坐标分别为$(0,\sqrt{3})$，$(0,-\sqrt{3})$，则$k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}\cdot\frac{y_0+\sqrt{3}}{x_0}=\frac{y_0^2-3}{x_0^2}=\frac{-\frac{3x_0^2}{4}}{x_0^2}=-\frac{3}{4}$.

8. B [解析] 由题意知$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，设$M(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则$\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{2}=1$①. 当$MF_1\perp MF_2$时，可得$(x_0-2)(x_0+2)+y_0^2=0$②，由①②得$x_0=\sqrt{3}$，$y_0=1$，所以当$\angle F_1MF_2$是锐角时，$\sqrt{3}<x_0<\sqrt{6}$. 由$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，得$y^2=2-\frac{x^2}{3}$，故$y=\sqrt{2-\frac{x^2}{3}}(y\geqslant0)$，求导可得$y'=-\frac{x}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2-\frac{x^2}{3}}}$，当$x=\sqrt{3}$时，$y'=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，即椭圆$E$在点$(\sqrt{3},1)$处的切线斜率为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，故椭圆$E$在点$M$处的切线的斜率的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 故选B.

9. D [解析] 设$P(x,y)$，因为动点P到点F的距离是点P到直线l的距离的一半，所以$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-4|$，整理得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，A中说法正确；由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x+2y-4=0,\end{cases}$可得$x^2-2x+1=0$，解得$x=1$，所以直线$l_1$上存在点$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$满足题意，故直线$l_1:x+2y-4=0$是“最远距离直线”，B中说法正确；如图，过$P$作$PB$垂直于直线$l:x=4$，垂足为$B$，由题意得$|PB|=2|PF|$，则$|PA|+2|PF|=|PA|+|PB|$，由图可知$|PA|+|PB|$的最小值即为点$A$到直线$l:x=4$的距离5，C中说法正确；由$x^2+y^2-2x=0$得$(x-1)^2+y^2=1$，圆$C$的圆心为$(1,0)$，半径为1，易得点$P$的轨迹与圆$C$交于点$(2,0)$，D中说法错误. 故选D.



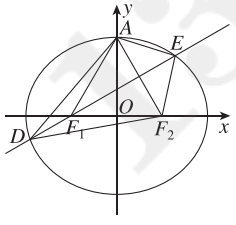
10. D [解析] 由已知得$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，易知直线PF_1的斜率存在，设直线PF_1的方程为$y=k_1(x+2)$(其中$k_1=\frac{y_0}{x_0+2}$)，与椭圆方程联立得$(5k_1^2+1)x^2+20k_1^2x+20k_1^2-5=0$，由根与系数的关系得$x_M+x_0=\frac{-20k_1^2}{5k_1^2+1}=\frac{-20y_0^2}{4x_0+9}$，所以$x_M=\frac{-20y_0^2}{4x_0+9}-x_0=-\frac{9x_0+20}{4x_0+9}$，所以$y_M=\frac{y_0}{x_0+2}(x_M+2)=-\frac{y_0}{4x_0+9}$，同理得$x_N=\frac{9x_0-20}{4x_0-9}$，$y_N=\frac{y_0}{4x_0-9}$，所以$k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{x_0y_0}{9x_0^2-45}=\frac{x_0y_0}{9(5-5y_0^2)-45}=-\frac{x_0}{45y_0}=-\frac{1}{9}$，所以$\frac{x_0}{y_0}=5$. 故选D.

11. AD [解析] 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$，则$2x_0=x_1+x_2$，$2y_0=y_1+y_2$，将A，B的坐标代入椭圆C的方程，得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$两式相减得$\frac{1}{a^2}(x_2^2-x_1^2)+\frac{1}{b^2}(y_2^2-y_1^2)=0$，所以$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\times\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=0$，因为直线$MD$的

斜率为$-\frac{4}{3}$，$AB\perp MD$，所以直线AB的斜率为$\frac{3}{4}$，所以$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\times\frac{3y_0}{4x_0}=0$，A正确. 设$E$为椭圆$C$的左顶点，则$\angle DME=2\angle DOM$，所以$\tan\angle DME=\tan 2\angle DOM=\frac{2\tan\angle DOM}{1-\tan^2\angle DOM}=\frac{4}{3}$，解得$\tan\angle DOM=\frac{1}{2}$或$-2$(舍去)，故直线$OD$的斜率为$-\frac{1}{2}$，B错误，C错误. 因为$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\times\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{8}$，故$e=\sqrt{1-\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，D正确. 故选AD.

12. $\frac{4}{3}$ ［解析］因为椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，所以$a^2=9$，$b^2=5$，$c^2=4$，所以离心率$e=\frac{2}{3}$. 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$T(x_0,0)$，因为$F$为右焦点，$|AF|+|BF|=4$，所以由焦半径公式得$\left(3-\frac{2}{3}x_1\right)+\left(3-\frac{2}{3}x_2\right)=4$，整理得$x_1+x_2=3$，则线段$AB$的中点坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，则线段$AB$的垂直平分线的斜率为$-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}$. 由点$A$，$B$在椭圆上，得$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{5}=1$，$\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{5}=1$，两式相减化简得$y_1^2-y_2^2=\frac{5}{9}(x_2^2-x_1^2)$. 线段$AB$的垂直平分线的方程为$y=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{y_1+y_2}{2}$，将$T(x_0,0)$的坐标代入，得$x_0-\frac{3}{2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{2(x_1-x_2)}=\frac{\frac{5}{9}(x_2^2-x_1^2)}{2(x_1-x_2)}=-\frac{\frac{5}{9}(x_1+x_2)}{2}=-\frac{5}{6}$，故$x_0=\frac{2}{3}$，则$|FT|=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

13. 13 ［解析］不妨设F_1，F_2分别为椭圆C的左、右焦点，E在第一象限，如图，连接AF_1，DF_2，EF_2. 因为椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，



所以$a=2c$，则$b=\sqrt{3}c$，所以$|AF_1|=|AF_2|=a=2c=|F_1F_2|$，可知$\triangle AF_1F_2$为等边三角形，所以直线$DE$为$AF_2$的中垂线，则$\triangle ADE$的周长等于$\triangle F_2DE$的周长，由椭圆的定义知$\triangle F_2DE$的周长为$4a$. 易知直线$DE$的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，由$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c),\\ \frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1\end{cases}$消去$y$，整理得$13x^2+8cx-32c^2=0$，设$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{8c}{13}$，$x_1x_2=-\frac{32c^2}{13}$，由$|DE|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left[\left(-\frac{8c}{13}\right)^2+\frac{4\times32c^2}{13}\right]}=6$，可得$c=\frac{13}{8}$，所以$4a=8c=13$.

14. 解：(1)由题知$2a=4$，得$a=2$. 若两个顶点和一个焦点构成等边三角形，则两个顶点只能为短轴的两个端点，则$a=2b=2$，$\therefore b=1$，故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将椭圆方程与直线方程联立，化简得$(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$，其中$\Delta=(16k)^2-48(1+4k^2)>0$，解得$k^2>\frac{3}{4}$，则$x_1+x_2=-\frac{16k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$，$\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{\left(-\frac{16k}{1+4k^2}\right)^2-4\cdot\frac{12}{1+4k^2}}=\sqrt{1+k^2}\times\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$.

原点O到直线AB的距离$d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，则$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}=\frac{4}{5}$，化简得$4k^4-23k^2+19=0$，解得$k^2=\frac{19}{4}$或$k^2=1$，又$k>0$且$k^2>\frac{3}{4}$，所以$k=\frac{\sqrt{19}}{2}$或$k=1$.

15. 证明：(1)联立$y=kx+t$与$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，消去y得$(2k^2+1)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，由直线与椭圆有且仅有一个公共点可知$\Delta=(4kt)^2-4(2k^2+1)(2t^2-2)=0$，化简得$t^2=2k^2+1$.

(2)由题意得$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，因为$F_1M\perp l$，$F_2N\perp l$，所以$F_1M/\!/F_2N$，故$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=|\overrightarrow{F_1M}|\cdot|\overrightarrow{F_2N}|$，其中$|\overrightarrow{F_1M}|=\frac{|-k+t|}{\sqrt{k^2+1}}$，$|\overrightarrow{F_2N}|=\frac{|k+t|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=|\overrightarrow{F_1M}|\cdot|\overrightarrow{F_2N}|=\frac{|-k+t|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{|k+t|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|t^2-k^2|}{k^2+1}=\frac{|2k^2+1-k^2|}{k^2+1}=1$，故$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}$为定值.

16. ABD ［解析］对于A选项，因为$|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c$，所以$\angle PF_1F_2=\angle F_1PO$，$\angle PF_2F_1=\angle F_2PO$，又$\angle PF_1F_2+\angle F_1PO+\angle PF_2F_1+\angle F_2PO=\pi$，故$\angle F_1PO+\angle F_2PO=\frac{\pi}{2}$，则$PF_1\perp PF_2$，由椭圆的定义可得$|PF_1|+|PF_2|=2a$，由双曲线的定义可得$|PF_1|-|PF_2|=2m$，解得$|PF_1|=a+m$，$|PF_2|=a-m$，由勾股定理得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即$(a+m)^2+(a-m)^2=4c^2$，化简得$a^2+m^2=2c^2$，即$\frac{a^2}{c^2}+\frac{m^2}{c^2}=2$，又$e_1=\frac{c}{a}$，$e_2=\frac{c}{m}$，所以$\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=2$，A正确. 对于B选项，若$\alpha=\frac{\pi}{3}$，则由余弦定理得$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{1}{2}$，即$|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2=|PF_1|\cdot|PF_2|$，又$|PF_1|=a+m$，$|PF_2|=a-m$，代入上式得$2a^2+2m^2-4c^2=a^2-m^2$，即$a^2+3m^2=4c^2$，即$\frac{a^2}{c^2}+\frac{3m^2}{c^2}=4$，又$e_1=\frac{c}{a}>0$，$e_2=\frac{c}{m}>0$，所以$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，由基本不等式得$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{e_1^2}\cdot\frac{3}{e_2^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{e_1e_2}$，即$4\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{e_1e_2}$，解得$e_1e_2\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$\sqrt{3}e_1=e_2$时，等号成立，则$e_1e_2$的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，B正确. 对于C选项，延长$F_2H$，交$F_1P$于点$M$，因为$PH$平分$\angle F_1PF_2$，$F_2M\perp PH$，所以$|PM|=|PF_2|$，$H$为$F_2M$的中点，则$|F_1M|=|PF_1|-|PM|=|PF_1|-|PF_2|=2m$，连接$OH$，由中位线的性质得$|OH|=\frac{1}{2}|F_1M|=m$，故点$H$的轨迹是以$O$为圆心，$m$为半径的圆的一部分，C错误. 对于D选项，下面证明椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$在点$P(x_0,y_0)$处的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 证明：当$y_0\neq0$时，切线的斜率存在，设切线方程为$y=kx+q$，代入椭圆方程得$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kqx+a^2q^2-a^2b^2=0$，由$\Delta=(2a^2kq)^2-4(a^2k^2+b^2)(a^2q^2-a^2b^2)=0$，化简得$a^2k^2-q^2+b^2=0$，所以$x_0=\frac{-2a^2kq}{2(a^2k^2+b^2)}=\frac{-2a^2kq}{2q^2}=\frac{-a^2k}{q}$，把$x_0=\frac{-a^2k}{q}$代入$y_0=kx_0+q$，得$y_0=\frac{b^2}{q}$，所以$k=-\frac{qx_0}{a^2}=-\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{b^2}{y_0}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，则椭圆在点$P(x_0,y_0)$处的切线斜率为$-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，切线方程为$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$，整理得到$a^2y_0y+b^2x_0x=a^2y_0^2+b^2x_0^2$，其中$b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，故$a^2y_0y+b^2x_0x=a^2b^2$，即$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 当$y_0=0$时，$x_0=a$或$-a$. 当$x_0=a$时，切线方程为$x=a$，满足$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；当$x_0=-a$时，切线方程为$x=-a$，满足$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 综上，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$在点$P(x_0,y_0)$处的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 同理可证双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$在点$P(x_0,y_0)$处的切线方程为$\frac{x_0x}{m^2}-\frac{y_0y}{n^2}=1$. 故椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$在点$P(x_0,y_0)$处的切线斜率为$-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$在点$P(x_0,y_0)$处的切线斜率为$\frac{n^2x_0}{m^2y_0}$. 因为$\frac{x_0^2}{a^2}+$

$\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$\frac{x_0^2}{m^2}-\frac{y_0^2}{n^2}=1$，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{x_0^2}{m^2}-\frac{y_0^2}{n^2}$，化简得 $-\frac{x_0^2}{y_0^2}=\frac{b^2+n^2}{m^2-a^2}\cdot\frac{a^2m^2}{n^2b^2}$，又 $a^2-b^2=m^2+n^2$，所以 $-\frac{x_0^2}{y_0^2}=-\frac{a^2m^2}{n^2b^2}$，故 $\frac{x_0^2}{y_0^2}=\frac{a^2m^2}{n^2b^2}$，则两曲线在点 P 处的切线的斜率之积为 $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\frac{n^2x_0}{m^2y_0}=-\frac{b^2n^2x_0^2}{a^2m^2y_0^2}=-1$，故两曲线在点 P 处的切线互相垂直，D 正确. 故选 ABD.

17. $2\sqrt{3}$ ［解析］设 $P(x_1,y_1)$，$R(x_2,y_2)$，由题意得 $Q(x_1,-y_1)$，$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 不妨设点 P 位于第一象限，由 $\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{NQ}$ 可得 $N\left(x_1,-\frac{y_1}{3}\right)$. 设直线 MQ 与 NR 的交点为 $T(t,0)$，则有 $\overrightarrow{QT}//\overrightarrow{MQ}$，$\overrightarrow{RT}//\overrightarrow{RN}$. $\overrightarrow{QT}=(t-x_1,y_1)$，$\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{x_1-x_2}{2},-\frac{3y_1+y_2}{2}\right)$，由 $\overrightarrow{QT}//\overrightarrow{MQ}$ 可得 $(t-x_1)\left(-\frac{3y_1+y_2}{2}\right)=y_1\times\frac{x_1-x_2}{2}$，整理得 $t=\frac{2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1}{3y_1+y_2}$ ①. $\overrightarrow{RT}=(t-x_2,-y_2)$，$\overrightarrow{RN}=\left(x_1-x_2,-\frac{y_1}{3}-y_2\right)$，由 $\overrightarrow{RT}//\overrightarrow{RN}$ 可得 $(t-x_2)\left(-\frac{y_1}{3}-y_2\right)=-y_2(x_1-x_2)$，整理得 $t=\frac{x_2y_1+3x_1y_2}{y_1+3y_2}$ ②. 由①②可得 $y_1^2(x_1-x_2)=y_1y_2(x_1-x_2)$，由题意知 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq0$，所以 $y_1=y_2$，由椭圆的对称性可知 $x_1=-x_2$. $d(R,Q)=|x_1-x_2|+|-y_1-y_2|=2x_1+2y_1$，因为 $\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$，所以设 $x_1=\sqrt{2}\cos\alpha$，$y_1=\sin\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $d(R,Q)=2x_1+2y_1=2\sqrt{2}\cos\alpha+2\sin\alpha=2\sqrt{3}\sin(\alpha+\theta)$，其中 $\tan\theta=\sqrt{2}$，所以当 $\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$d(R,Q)$ 取得最大值 $2\sqrt{3}$.

第 54 讲　双曲线

1. B ［解析］由双曲线 C 的方程知 $a=3$，根据双曲线的定义知，$||PF_1|-|PF_2||=|5-|PF_2||=2a=6$，解得 $|PF_2|=-1$（舍去）或 $|PF_2|=11$. 故选 B.

2. C ［解析］因为双曲线 C 的焦点在 y 轴上，所以双曲线 C：$mx^2+ny^2=1$ 的标准方程为 $\frac{y^2}{\frac{1}{n}}-\frac{x^2}{-\frac{1}{m}}=1$，所以 $a^2=\frac{1}{n}$，$b^2=-\frac{1}{m}$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{n}{m}}=2$，则 $-\frac{n}{m}=3$，所以 $3m+n=0$. 故选 C.

3. B ［解析］双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，由题意可知 $-\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=-1$，可得 $b=a$，所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}b=6$，则 $b=3\sqrt{2}$，因此该双曲线的虚轴长为 $2b=6\sqrt{2}$. 故选 B.

4. A ［解析］设 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，由题意知 $|MF_1|-|MF_2|=4=|F_1F_2|$，故动点 M 的轨迹是一条射线，故选 A.

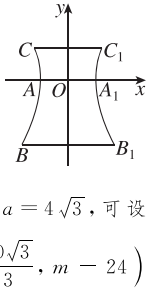
5. AB ［解析］方法一：对于选项 A，$x^2=2+2y^2\geqslant2$，故 $|x|\geqslant\sqrt{2}$，故 A 正确；对于选项 B，$x^2+y^2=2+3y^2\geqslant2$，故 B 正确；对于选项 C，取 $x=2$，$y=1$，满足 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$，此时 $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$，故 C 错误；对于选项 D，取 $x=\frac{3}{2}$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，满足 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$，此时 $|x-\sqrt{2}y|=2>\sqrt{2}$，故 D 错误. 故选 AB.

方法二：易知点 (x,y) 在双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上，根据双曲线上点的横坐标的范围可知 $|x|\geqslant\sqrt{2}$，故 A 正确；x^2+y^2 表示双曲线上一点到原点的距离的平方，双曲线的实半轴长为 $\sqrt{2}$，故 $x^2+y^2\geqslant2$，故 B 正确；$\frac{y}{x}$ 表示双曲线上一点与原点连线的斜率，双曲线的渐近线的斜率为 $\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{y}{x}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 C 错误；对于 D，取 $x=\frac{3}{2}$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，满足 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$，此时 $|x-\sqrt{2}y|=2>\sqrt{2}$，故 D 错误. 故选 AB.

6. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ ［解析］双曲线 C_1 与双曲线 C_2：$x^2-3y^2=1$ 有相同的渐近线，故可设双曲线 C_1 的方程为 $x^2-3y^2=\lambda$，又因为 C_1 过点 $A(-\sqrt{15},1)$，所以 $15-3=\lambda$，解得 $\lambda=12$，所以双曲线 C_1 的标准方程是 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

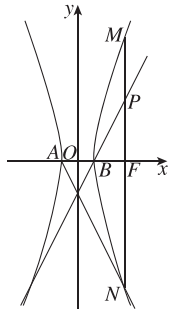
7. $\sqrt{2}$ ［解析］不妨取渐近线的方程为 $y=\frac{b}{a}x$，$F(c,0)$，则直线 EF 的方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$，由 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\y=-\frac{a}{b}(x-c),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{a^2}{c},\\y=\frac{ab}{c},\end{cases}$ $\therefore E\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，则线段 EF 的中点 M 的坐标为 $\left(\frac{a^2+c^2}{2c},\frac{ab}{2c}\right)$. 由点 M 在双曲线上，得 $\frac{(a^2+c^2)^2}{4a^2c^2}-\frac{a^2}{4c^2}=1$，化简得 $c^2=2a^2$，$\therefore e^2=2$，$\therefore e=\sqrt{2}$.

8. A ［解析］作出截面图，以 AA_1 的中点 O 为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $|OA|=|OA_1|=4\sqrt{3}$. 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $a=4\sqrt{3}$，可设 $C_1\left(\frac{4\sqrt{39}}{3},m\right)$，$B_1\left(\frac{20\sqrt{3}}{3},m-24\right)$ $(0<m<24)$，因为 B_1，C_1 在双曲线上，所以 $\begin{cases}\frac{\left(\frac{4\sqrt{39}}{3}\right)^2}{48}-\frac{m^2}{b^2}=1,\\\frac{\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2}{48}-\frac{(m-24)^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}m=8,\\b=12,\end{cases}$ 则 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以该双曲线的离心率为 $\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$. 故选 A.



9. B ［解析］由双曲线的定义可知 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，又 $|AF_1|=2a$，所以 $|AF_2|=4a$. 因为 $\angle F_1AF_2=\frac{2}{3}\pi$，所以 $S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|\cdot\sin\angle F_1AF_2=\frac{1}{2}\times2a\times4a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a^2$. 由双曲线的定义可知 $|BF_1|-|BF_2|=2a$，所以 $|BF_1|=2a+|BF_2|$，又 $|BF_1|=2a+|BA|$，所以 $|BF_2|=|BA|$. 因为 $\angle F_1AF_2=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\angle BAF_2=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle BAF_2$ 为等边三角形，且边长为 $4a$，所以 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4a)^2=4\sqrt{3}a^2$，所以 $\frac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle ABF_2}}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{4\sqrt{3}a^2}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

10. B ［解析］不妨设 M 在 x 轴上方，如图. 由题可得 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$F(c,0)$，$M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$N\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$，$P\left(c,\frac{b^2}{2a}\right)$，所以 $k_{BP}=\frac{\frac{b^2}{2a}}{c-a}=\frac{c+a}{2a}$，直线 BP 的方程为 $y=\frac{c+a}{2a}(x-a)$，令 $x=0$，解得 $y=-\frac{c+a}{2}$，所以直线 BP 与 y 轴的交点为 $\left(0,-\frac{c+a}{2}\right)$. 因为 $k_{AN}=\frac{-\frac{b^2}{a}}{c+a}=-\frac{c-a}{a}$，所以直线 AN 的方程为 $y=-\frac{c-a}{a}(x+a)$，令 $x=0$，解得 $y=a-c$，所以直线 AN 与 y 轴的交点为 $(0,a-c)$. 因为直线 BP 与直线 AN 的交点在 y 轴上，所以 $a-c=-\frac{c+a}{2}$，解得 $c=3a$，所以双曲线 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=3$. 故选 B.



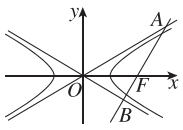
11. BD ［解析］对于 A，若曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆，则 $-n>m>0$，故 A 错误；对于 B，当 $m=-n>0$ 时，曲线 C 是圆，故 B 正确；对于 C，当 $m=-n=1$ 时，满足 $mn<0$，但曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=1$，曲线 C 是圆，故 C 错误；对于 D，若曲线 C 为双曲线，则 $mn>0$，当 $\begin{cases}m>0,\\n>0\end{cases}$ 时，$\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{n}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{\frac{m}{n}}x$，当 $\begin{cases}m<0,\\n<0\end{cases}$ 时，$\frac{x^2}{-n}-\frac{y^2}{-m}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{\frac{m}{n}}x$，故 D 正确. 故选 BD.

12. ABD ［解析］对于 A，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线的方程为

1803565

$y=\pm\frac{b}{a}x$，要使过点 F_1 的直线 l 交双曲线 C 于 P,Q 两点，交两条渐近线于 M,N 两点（P,M 在第一象限），则满足 $\frac{b}{a}>\sqrt{3}$，所以 $b^2>3a^2$，所以 A 正确；对于 B，由双曲线的定义，可得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|QF_2|-|QF_1|=2a$，两式相减得 $|PF_1|+|QF_1|=|PF_2|+|QF_2|$，所以 $\triangle PQF_2$ 的周长为 $|PQ|+|QF_2|+|PF_2|=(|PF_1|-|QF_1|)+|QF_2|+|PF_2|=(|PF_1|-|QF_1|)+|PF_1|+|QF_1|=2|PF_1|$，所以 B 正确；对于 C，设 PF_2 的中点为 S，坐标原点为 O，连接 OS，则 $|OS|=\frac{1}{2}|PF_1|=\frac{1}{2}(|PF_2|+2a)=\frac{1}{2}|PF_2|+a$，所以两圆外切，所以 C 错误；对于 D，由 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\x^2+y^2=c^2,\end{cases}$ 且 $c^2=a^2+b^2$，得 $M(a,b)$，连接 F_2M，则 $F_2M\perp MF_1$，又 $A_2R\perp PF_1$，所以 $A_2R/\!/F_2M$，连接 MA_2 并延长，交 NO 的延长线于 M'，则 $M'(a,-b)$，A_2 为 MM' 的中点，又 MN 的中点为 R，则 $RA_2/\!/M'N$，所以 $M'N/\!/RA_2/\!/MF_2$，所以 $|OA_2|=|A_2F_2|$，即 $a=c-a$，所以 $e=\frac{c}{a}=2$，所以 D 正确. 故选 ABD.

13. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ［解析］由双曲线的对称性不妨设倾斜角为 60°的直线过右焦点 F，如图. 双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，双曲线的半焦距 $c=2$，故 $F(2,0)$，过点 F 且倾斜角为 60°的直线方程为 $y=\sqrt{3}(x-2)$. 由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-2),\\y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\end{cases}$ 可得交点 A 的坐标为 $(3,\sqrt{3})$. 由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-2),\\y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x,\end{cases}$ 可得交点 B 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故该直线与双曲线的两条渐近线围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times\left|\sqrt{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



14. 3　$2\sqrt{6}$ ［解析］设 $P(m,n)(m>0,n>0)$，则 $m^2-\frac{n^2}{3}=1$，可得 $n^2=3(m^2-1)$. 因为 A,B 分别为双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点，所以 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，所以 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n}{m-1}=\frac{n^2}{m^2-1}=3$. 因为 $\tan\alpha>0$，$\tan\beta>0$，所以 $2\tan\alpha+\tan\beta\geqslant2\sqrt{2\tan\alpha\tan\beta}=2\sqrt{6}$，当且仅当 $2\tan\alpha=\tan\beta$ 时，等号成立，此时 $\frac{2n}{m+1}=\frac{n}{m-1}$，解得 $m=3$，所以 $n^2=3\times(3^2-1)=24$，所以 $n=2\sqrt{6}$，所以 $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|AB|\times y_P=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

15. 解：(1)由双曲线 C 的焦点在 x 轴上，其渐近线方程为 $y=\pm x$，可设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1(a>0)$，又实轴长为 2，则 $2a=2$，得 $a=1$，所以双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=1$.

(2)由过点 $P(0,1)$ 的直线与双曲线 C 的左、右两支各交于一点，知该直线的斜率一定存在，且该直线不和双曲线的渐近线平行. 设该直线的方程为 $y=kx+1$，$k\neq\pm1$，由 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2-y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$，需满足 $\Delta=4k^2+8(1-k^2)>0$ 且 $\frac{-2}{1-k^2}<0$，解得 $-1<k<1$，则该直线的斜率 k 的取值范围为 $(-1,1)$.

16. A ［解析］设椭圆与双曲线的焦距均为 $2c$，则 $a_1^2-b_1^2=c^2$，$a_2^2+b_2^2=c^2$. 连接 OP（O 为坐标原点），因为 $\angle F_1PF_2=90°$，所以 $|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c$，又点 P 在第一象限，且在直线 $y=x$ 上，所以 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c,\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)$. 因为点 P 在椭圆 C_1 上，所以 $\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2}{a_1^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2}{b_1^2}=1$，即 $\frac{c^2}{a_1^2}+\frac{c^2}{a_1^2-c^2}=2$，整理得 $2a_1^4-4a_1^2c^2+c^4=0$，两边同时除以 c^4，得 $2\cdot\left(\frac{1}{e_1^2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{e_1^2}+1=0$，解得 $\frac{1}{e_1^2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times2\times1}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$，又 $0<e_1<1$，所以 $\frac{1}{e_1^2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. 因为点 P 在双曲线 C_2 上，所以 $\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2}{a_2^2}-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2}{b_2^2}=1$，即 $\frac{c^2}{a_2^2}-\frac{c^2}{c^2-a_2^2}=2$，同理得 $\frac{1}{e_2^2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$（$e_2>1$），所以 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}=2$. 故选 A.

17. ABD ［解析］对于 A，若双曲线的两条渐近线的夹角为 60°，则 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 A 正确. 对于 B，设 $|AF_1|=x$，则 $|BF_2|=x$，$|AF_2|=x-2a$，$|BF_1|=x+2a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1AB$ 中，可得 $x^2+(2x-2a)^2=(x+2a)^2$，所以 $x=3a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1AF_2$ 中，可得 $x^2+(x-2a)^2=4c^2$，即 $10a^2=4c^2$，故 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故 B 正确. 对于 C，设圆 I_1 与 AF_1，AF_2，F_1F_2 分别相切于点 D,Q,T，则 $|AD|=|AQ|$，$|F_1D|=|F_1T|$，$|F_2Q|=|F_2T|$，故 $|F_1T|-|F_2T|=|F_1D|-|F_2Q|=|AF_1|-|AF_2|=2a$. 设点 $T(x_0,0)$，又 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，所以 $x_0-(-c)=(c-x_0)=2a$，解得 $x_0=a$. 连接 I_1T，I_2T，F_2I_1，F_2I_2，易知 $I_1T\perp F_1F_2$，则点 I_1 的横坐标为 a，同理可得点 I_2 的横坐标为 a，故 I_1,T,I_2 三点共线，即直线 I_1I_2 的方程为 $x=a$. 设直线 AB 的倾斜角为 2θ，O 为坐标原点，则 $\angle OF_2I_2=\theta$，$\angle I_1F_2O=\frac{\pi}{2}-\theta$. 在 $\triangle I_1F_2T$ 中，$r_1=(c-a)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=(c-a)\frac{1}{\tan\theta}$，在 $\triangle I_2F_2T$ 中，$r_2=(c-a)\tan\theta$. 由 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，得 $c=2$，且双曲线 C 的渐近线的斜率为 $\pm\sqrt{3}$，因为 A,B 均在双曲线 C 的右支上，所以 $60°<2\theta<120°$，即 $30°<\theta<60°$，故 $\tan\theta\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$，所以 $r_1-r_2=(c-a)\left(\frac{1}{\tan\theta}-\tan\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}-\tan\theta\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，故 C 错误. 对于 D，$2=\frac{|AI_1|}{|I_1P|}=\frac{|AF_2|}{|F_2P|}=\frac{|AF_1|}{|F_1P|}=\frac{|AF_1|+|AF_2|}{2c}$，故 $|AF_1|+|AF_2|=4c$，又 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，$k_{AB}=\sqrt{3}$，所以 $|AF_1|=a+2c$，$|AF_2|=2c-a$，$\angle F_1F_2A=120°$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $(2c+a)^2=(2c-a)^2+4c^2+2c\cdot(2c-a)$，可得 $4c=5a$，故 $e=\frac{5}{4}$，故 D 正确. 故选 ABD.

第 55 讲　抛物线

1. D ［解析］抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点坐标为 $\left(0,\frac{p}{2}\right)$. 双曲线 N 的方程为 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$，则 $a^2=3$，$b^2=1$，故 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$. 因为抛物线 M：$x^2=2py(p>0)$ 的焦点与双曲线 N：$\frac{y^2}{3}-x^2=1$ 的一个焦点重合，所以 $\frac{p}{2}=c=2$，即 $p=4$. 故选 D.

2. B ［解析］抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$ 的准线方程为 $y=-\frac{p}{2}$，因为点 M 到 C 的焦点的距离为 7，到 x 轴的距离为 5，所以 $\frac{p}{2}=2$，所以 $p=4$. 故选 B.

3. A ［解析］由题意得 $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\frac{|\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-3|}{2}$，即动点 (x,y) 到定点 $(-1,2)$ 的距离与到直线 $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-3=0$ 的距离相等，且点 $(-1,2)$ 不在直线 $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-3=0$ 上，故方程表示的曲线为抛物线. 故选 A.

4. B ［解析］过点 M 作抛物线的准线的垂线，垂足为点 N，连接 FN. 因为 $\angle OFM=120°$，$MN/\!/x$ 轴，所以 $\angle FMN=60°$. 由抛物线的定义可得 $|MN|=|FM|$，所以 $\triangle FNM$ 为等边三角形，则 $\angle FNM=60°$. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，设直线 $x=-1$ 交 x 轴于点 E，则 $\angle ENF=30°$，易知 $|EF|=2$，$\angle FEN=90°$，则 $|FM|=|FN|=2|EF|=4$. 故选 B.

5. AC ［解析］直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为 $(1,0)$，即抛物线的焦点为 $(1,0)$，因此 $p=2$，A 正确；抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，由 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 y 化简得 $3x^2-10x+3=0$，可得 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=3$，则 $M\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$N(3,-2\sqrt{3})$（设 M 在第一象限，N 在第四象限），所以 $|MN|=\frac{16}{3}$，B 错误；因为 $|OM|=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$|ON|=\sqrt{21}$，$|MN|=\frac{16}{3}$，所以 $\triangle OMN$ 不是等腰三角形，D 错误；以 MN 为直径

的圆的圆心的横坐标为$\frac{\frac{1}{3}+3}{2}=\frac{5}{3}$，圆心到准线 l 的距离为 $\frac{5}{3}+\frac{p}{2}=\frac{8}{3}=\frac{|MN|}{2}$，因此以 MN 为直径的圆与 l 相切，C 正确. 故选 AC.

6. $y^2=16x$ 或 $x^2=-8y$ ［解析］直线 $x-2y-4=0$ 与坐标轴的交点为 $(4,0)$ 和 $(0,-2)$，则所求抛物线的焦点为 $(4,0)$ 或 $(0,-2)$. 若其焦点为 $(4,0)$，则其标准方程为 $y^2=16x$；若其焦点为 $(0,-2)$，则其标准方程为 $x^2=-8y$. ∴抛物线的标准方程为 $y^2=16x$ 或 $x^2=-8y$.

7. $\frac{9}{4}$ ［解析］由题意可得 $(\sqrt{5})^2=2p\times1$，则 $2p=5$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=5x$，其准线方程为 $x=-\frac{5}{4}$，故 A 到 C 的准线的距离为 $1-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{4}$.

8. C ［解析］设点 $P\left(\frac{y_P^2}{4},y_P\right)$，由圆的方程 $(x-2)^2+y^2=1$ 可知圆心为 $C(2,0)$，半径 $r=1$. 连接 PC，因为切线长为 $2\sqrt{7}$，所以 $|PC|=\sqrt{29}$，即 $\left(\frac{y_P^2}{4}-2\right)^2+y_P^2=29$，解得 $y_P^2=20$，可得 $P(5,y_P)$. 由抛物线的定义可得点 P 到 M 的准线的距离为 $5+1=6$. 故选 C.

9. B ［解析］设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$. 因为 $R(2,1)$ 为线段 AB 的中点，所以 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$. 由 $|FA|+|FB|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=4+p=5$，解得 $p=1$，则抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$，则 $x_1=\frac{y_1^2}{2}$，$x_2=\frac{y_2^2}{2}$，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{2}-\frac{y_2^2}{2}}=\frac{2}{y_1+y_2}=1$. 故选 B.

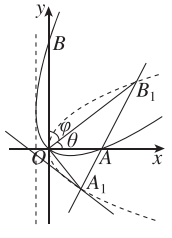
10. A ［解析］因为 $A(-2,2)$ 为抛物线 C 上一点，所以 $(-2)^2=4p$，解得 $p=1$，所以抛物线 $C:x^2=2y$. 设 $B\left(x_1,\frac{x_1^2}{2}\right)$，$P\left(x_2,\frac{x_2^2}{2}\right)$，由题意知直线 PA，PB 的斜率均存在且均不为 0，由 $PA\perp PB$，得 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，即 $\frac{\frac{x_2^2}{2}-2}{x_2+2}\times\frac{\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}}{x_2-x_1}=-1$，化简得 $x_2^2+(x_1-2)x_2+4-2x_1=0$，则关于 x_2 的方程一定有解，故 $\Delta=(x_1-2)^2-4(4-2x_1)\geqslant0$，即 $x_1^2+4x_1-12\geqslant0$，解得 $x_1\leqslant-6$ 或 $x_1\geqslant2$. 故选 A.

11. BD ［解析］抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，又点 $M(2,\sqrt{3})$ 满足 $|MF|=2|OF|$，所以 $\sqrt{\left(\frac{p}{2}-2\right)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2\times\frac{p}{2}$，即 $3p^2+8p-28=0$，解得 $p=2$ 或 $p=-\frac{14}{3}$（舍去），所以抛物线 $C:y^2=4x$，则准线方程为 $x=-1$，焦点为 $F(1,0)$，故 A 错误；过点 P 作准线 $x=-1$ 的垂线，垂足为 H，由抛物线的定义可知 $|PH|=|PF|$，所以 $\triangle PMF$ 的周长为 $|PM|+|MF|+|PF|=|PM|+|MF|+|PH|=|PM|+|PH|+2\geqslant3+2=5$，当且仅当 M,P,H 三点共线时取等号，所以 $\triangle PMF$ 周长的最小值为 5，故 B 正确；因为 $k_{MF}=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，所以直线 MF 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，故 C 错误；过点 M 作 OF 的平行线，交抛物线于点 P，由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{4},\\y=\sqrt{3},\end{cases}$ 即 $P\left(\frac{3}{4},\sqrt{3}\right)$，则 $|MP|=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\neq|OF|$，所以四边形 $OPMF$ 不可能是平行四边形，故 D 正确. 故选 BD.

12. ABD ［解析］点 $A(0,4)$ 到准线 $l:x=-1$ 的距离为 1，圆 A 的半径为 1，故 l 与 $\odot A$ 相切，选项 A 正确. 当 P,A,B 三点共线时，$A(0,4)$，$P(4,4)$，$|PA|=4$，则 $|PQ|=\sqrt{|PA|^2-1}=\sqrt{15}$，选项 B 正确. 当 $|PB|=2$ 时，$x_P=1$，得 $y_P=\pm2$，当点 P 的坐标为 $(1,2)$ 时，$B(-1,2)$，$|AB|=|AP|=\sqrt{5}$，不满足 $PA\perp AB$；当点 P 的坐标为 $(1,-2)$ 时，$B(-1,-2)$，$|AB|=|AP|=\sqrt{37}$，不满足 $PA\perp AB$，选项 C 不正确. 设抛物线的焦点为 F，则 $F(1,0)$，连接 PF，AF，由抛物线的定义可得 $|PB|=|PF|$，则满足 $|PA|=|PB|=|PF|$ 的点 P 在线段 AF 的垂直平分线上，易知线段 AF 的垂直平分线的方程为 $y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$，由 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{8},\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-16y+30=0$，因为 $\Delta=(-16)^2-4\times30=136>0$，所以满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个，选项 D 正确. 故选 ABD.

13. 2 ［解析］由题知直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx+3$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=kx+3,\\x^2=2py,\end{cases}$ 可得 $x^2-2pkx-6p=0$，所以 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-6p$，则 $y_1y_2=\frac{x_1^2x_2^2}{4p^2}=9$. 因为 $|AF|=2$，$|BF|=10$，所以 $y_1=2-\frac{p}{2}$，$y_2=10-\frac{p}{2}$，则 $\left(2-\frac{p}{2}\right)\times\left(10-\frac{p}{2}\right)=9$，解得 $p=2$ 或 $p=22$. 因为 $2-\frac{p}{2}>0$，所以 $p=2$.

14. $-2^{-\frac{1}{3}}$ ［解析］将所求抛物线绕原点旋转到抛物线 C，A，B 分别对应点 A_1，B_1，不妨设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，$|OB_1|=2a$，$|OA_1|=a$，$\angle B_1Ox=\theta$，$\angle B_1Oy=\varphi$，如图所示，则 $B_1(2a\cos\theta,2a\sin\theta)$，$A_1\left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),-a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$，即 $A_1(a\sin\theta,-a\cos\theta)$，又 A_1，B_1 在 C 上，所以 $\begin{cases}4a^2\sin^2\theta=4pa\cos\theta,\\a^2\cos^2\theta=2pa\sin\theta,\end{cases}$ 可得 $\tan^3\theta=\frac{1}{2}$，故 $\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$，又 $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$，$\varphi,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\varphi=\sqrt[3]{2}$，故将抛物线 C 绕原点逆时针旋转 φ 后，A_1,B_1 分别旋转到 x,y 轴上的点 A,B，故所求抛物线对称轴的斜率为 $\tan\varphi=\sqrt[3]{2}$，又准线与对称轴垂直，故准线的斜率为 $-2^{-\frac{1}{3}}$.



15. 解：(1) 由抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，$M(x_0,6)$ 是 C 上一点，且 $|MF|=10$，可得 $\begin{cases}6^2=2px_0,\\x_0+\frac{p}{2}=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=9,\\p=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=1,\\p=18,\end{cases}$ 因为 $x_0>6$，所以 $\begin{cases}x_0=9,\\p=2,\end{cases}$ 则抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2) 由过点 $N(a,0)(a>0)$ 的直线 l 与 C 相交于 P,Q 两点，知直线 l 的斜率不为 0，设 l 的方程为 $x=my+a$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+a,\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $y^2-4my-4a=0$，由根与系数的关系得 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4a$，故 $|PQ|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{(1+m^2)(m^2+a)}$，$|NP|=\sqrt{1+m^2}|y_1|$，$|NQ|=\sqrt{1+m^2}|y_2|$，可得 $|NP|\cdot|NQ|=(1+m^2)|y_1y_2|=4a(1+m^2)$. 因为 $|NP|\cdot|NQ|=|PQ|$，所以 $4a(1+m^2)=4\sqrt{(1+m^2)(m^2+a)}$，整理得 $(a-1)(am^2+m^2+a)=0$.

因为 $am^2+m^2+a>0$，所以 $a-1=0$，故 $a=1$.

16. 解：(1) 由题知点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ 与圆 $M:x^2+(y+4)^2=1$ 上的点的距离的最小值为 $\frac{p}{2}+3=4$，所以 $p=2$.

(2) 由 (1) 知抛物线 C 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $y'=\frac{1}{2}x$，

则切线 PA 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)+y_1=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1x-y_1$，同理得切线 PB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_2x-y_2$，且 $x_0^2+y_0^2+8y_0+15=0$.

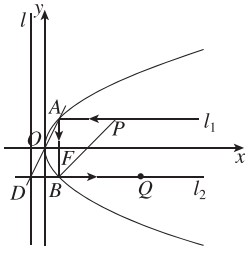
因为切线 PA，PB 都过点 $P(x_0,y_0)$，所以 $\begin{cases}y_0=\frac{1}{2}x_1x_0-y_1,\\y_0=\frac{1}{2}x_2x_0-y_2,\end{cases}$ 故直线 AB 的方程为 $y_0=\frac{1}{2}x_0x-y$，即 $y=\frac{1}{2}x_0x-y_0$. 由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-y_0,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$，则 $\Delta=4x_0^2-16y_0>0$，所以 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，则 $|AB|=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}=\sqrt{4+x_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}$，点 P 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}|x_0^2-4y_0|\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}=\frac{1}{2}(x_0^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(-y_0^2-12y_0-15)^{\frac{3}{2}}$.

因为 $y_0\in[-5,-3]$，所以当 $y_0=-5$ 时，$S_{\triangle PAB}$ 取得最大值，最大值为 $20\sqrt{5}$.

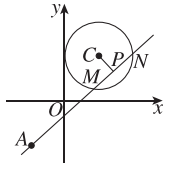
17. 0　2 ［解析］如图，依题意，直线 AB 过抛物线 C 的焦点 F. 设直线 AB 的方

程为 $x=my+\frac{p}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=my+\frac{p}{2},\\y^2=2px,\end{cases}$ 得 $y^2-2pmy-p^2=0$，则 $y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$. 因为 $y_1=2$，所以 $A\left(\frac{2}{p},2\right)$，$B\left(\frac{p^3}{8},-\frac{p^2}{2}\right)$，则直线 OA 的方程为 $y=px$，所以直线 OA 与抛物线 C 的准线 l 的交点为 $D\left(-\frac{p}{2},-\frac{p^2}{2}\right)$，所以直线 BD 的斜率为 0. 因为 PB 平分 $\angle ABQ$，所以 $\angle ABP=\angle PBQ=\angle APB$，所以 $|AB|=|PA|$. 因为 $|PA|=2|BD|$，所以 $|AB|=2|DB|$，即 $x_1+x_2+p=2|x_2-x_D|$，所以 $\frac{p^3}{8}+\frac{2}{p}+p=2\left(\frac{p^3}{8}+\frac{p}{2}\right)$，可得 $p=2$.



增分微练 8　圆锥曲线中的轨迹问题

1. D ［解析］设 $P(x,y)$，如图，连接 CP，由线段 MN 的中点为 P，得 $CP\perp MN$，即 $CP\perp AP$，所以 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$. 因为 $A(-3,-4)$，$C(3,4)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(x+3,y+4)$，$\overrightarrow{CP}=(x-3,y-4)$，所以 $(x+3)(x-3)+(y+4)(y-4)=0$，即 $x^2+y^2=25$，所以点 P 的轨迹是以 $(0,0)$ 为圆心，半径为 5 的圆在圆 C 内的部分. 故选 D.



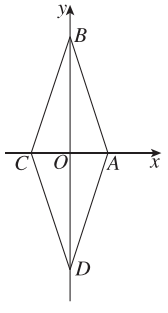
2. D ［解析］设点 $M(x,y)$，则直线 AM 的斜率为 $\frac{y}{x+3}$，直线 BM 的斜率为 $\frac{y}{x-3}$，由题意知 $\frac{y}{x+3}\cdot\frac{y}{x-3}=\frac{2}{3}(x\neq\pm3)$，化简得 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1(x\neq\pm3)$，所以点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1(x\neq\pm3)$. 故选 D.

3. B ［解析］设动点 $A(x_A,y_A)$ 与定点 $B(3,0)$ 连线的中点为 $P(x,y)$，则 $\begin{cases}\frac{x_A+3}{2}=x,\\\frac{y_A+0}{2}=y,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_A=2x-3,\\y_A=2y.\end{cases}$ 因为点 A 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，所以 $(2x-3)^2+(2y)^2=1$，即 $4x^2-12x+9+4y^2=1$，整理得 $x^2+y^2-3x+2=0$，即为所求轨迹方程. 故选 B.

4. D ［解析］设点 $M(x,y)$，$A(x_0,0)$，$B(0,y_0)$，则 $|AB|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=2$，可得 $x_0^2+y_0^2=4$. 因为点 A 关于点 B 的对称点为 M，所以 B 为线段 AM 的中点，所以 $\begin{cases}\frac{x+x_0}{2}=0,\\\frac{y}{2}=y_0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_0=-x,\\y_0=\frac{y}{2}.\end{cases}$ 将 $\begin{cases}x_0=-x,\\y_0=\frac{y}{2}\end{cases}$ 代入 $x_0^2+y_0^2=4$，可得 $x^2+\frac{y^2}{4}=4$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$，故点 M 的轨迹方程为 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$. 故选 D.

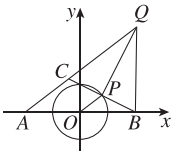
5. D ［解析］对于曲线 C 上的任意点 (x,y)，点 $(-x,-y)$ 也在曲线 C 上，选项 A 中结论正确；由 $x^2+2xy+5y^2=1$ 得 $(x+y)^2+4y^2=1$，所以 $4y^2\leqslant1$，所以 $|y|\leqslant\frac{1}{2}$，选项 B 中结论正确；由 $(x+y)^2+4y^2=1$，可设 $x+y=\cos\theta$，$2y=\sin\theta$，所以 $x+2y=\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=2$，所以 $|x+2y|\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，选项 C 中结论正确；令 $x=1$，则 $2y+5y^2=0$，则点 $\left(1,-\frac{2}{5}\right)$ 在曲线 C 上，但点 $\left(1,-\frac{2}{5}\right)$ 与原点之间的距离大于 1，选项 D 中结论不正确. 故选 D.

6. D ［解析］设点 P 的坐标为 (x,y)，因为 $A(2,0)$，$B(0,6)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，所以 $(x,y)=\lambda(2,0)+\mu(0,6)$，得 $x=2\lambda$，$y=6\mu$. 因为 $|\lambda|+|\mu|=1$，所以 $\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{6}=1$，即点 P 的轨迹方程为 $\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{6}=1$. 当 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 时，方程为 $3x+y-6=0$；当 $x\geqslant0$，$y<0$ 时，方程为 $3x-y-6=0$；当 $x<0$，$y\geqslant0$ 时，方程为 $3x-y+6=0$；当 $x<0$，$y<0$ 时，方程为 $3x+y+6=0$. 所以点 P 的轨迹如图所示，且 $k_{AB}=k_{CD}=-3$，$k_{BC}=k_{AD}=3$，$AC\perp BD$，所以点 P 的轨迹为菱形，所以 A，C 错误. 原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{6}{\sqrt{10}}<2$，所以 B 错误. 点 P 的轨迹所围成的图形的面积为 $4\times\frac{1}{2}\times2\times6=24$，所以 D 正确. 故选 D.



7. C ［解析］由题意可得 $\frac{|PA|}{|PB|}=2$，设 $P(x,y)$，则 $\frac{(x+2)^2+y^2}{(x-4)^2+y^2}=4$，化简得 $x^2+y^2-12x+20=0$，即 $(x-6)^2+y^2=16$，故“完美曲线”表示圆心为 $(6,0)$，半径 $r=4$ 的圆. 对于①，$y=3\ln3\in[-4,4]$，故直线 $y=3\ln3$ 与“完美曲线”有交点；对于②，联立 $y^2=3x$ 与 $x^2+y^2-12x+20=0$，可得 $x^2-9x+20=0$，解得 $x=4$ 或 $x=5$，故曲线 $y^2=3x$ 与“完美曲线”有交点；对于③，圆心 $(6,0)$ 到直线 $8y-x+6=0$ 的距离 $d=\frac{0}{\sqrt{8^2+(-1)^2}}=0$，故直线与圆相交，即直线 $8y-x+6=0$ 与“完美曲线”有交点；对于④，$(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=2$ 表示圆心为 $(2,\sqrt{3})$，半径 $R=\sqrt{2}$ 的圆，则两圆的圆心距为 $\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19}\in[4-\sqrt{2},4+\sqrt{2}]$，故两圆相交，即圆 $(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=2$ 与“完美曲线”有交点. 故选 C.

8. A ［解析］由 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，可得 $QP\perp PB$，由 $\overrightarrow{QP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{QA}}{|\overrightarrow{QA}|}+\frac{\overrightarrow{QB}}{|\overrightarrow{QB}|}\right)$，可知点 P 在 $\angle BQA$ 的平分线上. 圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为原点 O，半径 $r=1$. 如图，当 Q 在 y 轴右侧时，延长 BP 交 AQ 于点 C，连接 OP，因为 $\angle PQB=\angle PQC$ 且 $PQ\perp BC$，所以 $|QB|=|QC|$，且 P 为 BC 的中点. 又 O 为 AB 的中点，所以 $OP/\!/AC$，且 $|OP|=\frac{1}{2}|AC|$，所以 $|QA|-|QB|=|QA|-|QC|=|AC|=2|OP|=2<|AB|=4$，同理得 Q 在 y 轴左侧的情况，故点 Q 在以 A，B 为焦点的双曲线上. 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，可知 $c=2$，即 $a^2+b^2=c^2=4$. 由 $2a=||QA|-|QB||=2$，得 $a=1$，故 $b^2=3$，双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. 故选 A.



9. D ［解析］对于 A，结合曲线 C：$(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$，将 $(-x,-y)$ 代入，方程不变，故曲线 C 关于原点对称，A 错误；对于 B，令 $y=0$，则 $(x^2)^2=9x^2$，解得 $x=\pm3$ 或 $x=0$，令 $x=\pm1$，则 $(1+y^2)^2=9(1-y^2)$，解得 $y^2=\frac{-11+\sqrt{153}}{2}<1$，令 $x=\pm2$，则 $(4+y^2)^2=9(4-y^2)$，解得 $y^2=\frac{-17+\sqrt{369}}{2}<2$，故曲线 C 经过的整点只有 $(0,0)$，$(3,0)$，$(-3,0)$，B 错误；对于 C，直线 $y=kx$ 与曲线 C：$(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$ 必有公共点 $(0,0)$，因此若直线 $y=kx$ 与曲线 C 只有一个交点，则 $\begin{cases}(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2),\\y=kx\end{cases}$ 只有一个解 $x=0$，即 $x^4(1+k^2)^2=9x^2(1-k^2)$ 只有一个解 $x=0$，即当 $x\neq0$ 时，$x^4(1+k^2)^2=9x^2(1-k^2)$ 无解，故 $1-k^2\leqslant0$，解得 $k\leqslant-1$ 或 $k\geqslant1$，故实数 k 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，C 错误；对于 D，由 $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$，可得 $x^2+y^2=\frac{9(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\leqslant9$，当且仅当 $y=0$ 时取等号，则曲线 C 上任意一点到坐标原点 O 的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant3$，D 正确. 故选 D.

10. ABD ［解析］对于 A 选项，原图中的圆环不可解开，则无法无损伤地变为一个圆，即 A 选项无法无损伤地得到题干中的绳结；对于 D 选项，为三个圆环，不是一根绳，即 D 选项无法无损伤地得到题干中的绳结；对于 B，C 选项，把选项 C 中下方的部分向上翻，就可以无损伤地得到题干中的绳结，选项 B 无法无损伤地得到题干中的绳结. 故选 ABD.

11. ABD ［解析］对于 A，若 $\alpha=0$，则曲线 C：$x^2=1$，即 $x=\pm1$，C 为两条直线，故 A 正确. 对于 B，若 C 为圆，则 $\cos\alpha=-\sin\alpha>0$，由 $\cos\alpha=-\sin\alpha$，$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，可得 $\tan\alpha=-1$，则 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$，此时曲线 C：$x^2+y^2=\sqrt{2}$，即 C 为圆，故 B 正确. 对于 C，若 C 为椭圆，则

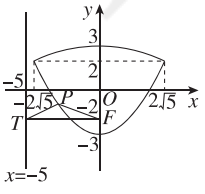
答案圈

$\cos\alpha>0,-\sin\alpha>0$，且 $\cos\alpha\neq-\sin\alpha$，所以 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$. $x^2\cos\alpha-y^2\sin\alpha=1$ 可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{\cos\alpha}}+\frac{y^2}{\frac{1}{-\sin\alpha}}=1$，若 $\frac{1}{\cos\alpha}>\frac{1}{-\sin\alpha}$，即 $\tan\alpha<-1$，即 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$，则椭圆 C 的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{\frac{1}{-\sin\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}}=\sqrt{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\sqrt{1+\frac{1}{\tan\alpha}}$，当 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$y=\sqrt{1+\frac{1}{\tan\alpha}}$ 单调递减，故 C 错误. 对于 D，当 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\cos\alpha\geqslant0$，若 C 为双曲线，则 $\sin\alpha\cos\alpha>0$，即 $\begin{cases}\sin\alpha>0,\\ \cos\alpha>0,\end{cases}$ 可得 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. $x^2\cos\alpha-y^2\sin\alpha=1$ 可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{\cos\alpha}}-\frac{y^2}{\frac{1}{\sin\alpha}}=1$，故双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{\frac{1}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}}=\sqrt{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\sqrt{1+\frac{1}{\tan\alpha}}$，当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=\sqrt{1+\frac{1}{\tan\alpha}}$ 单调递减，故 D 正确. 故选 ABD.

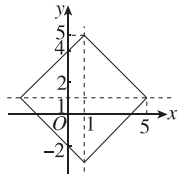
12. $\frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{9}=1(x\neq\pm1)$ ［解析］因为点 M 的坐标为 $(-1,2)$，且 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\mathbf{0}$，所以 $N(1,-2)$. 设 $P(x,y)$，则 $k_{MP}=\frac{y-2}{x+1}$，$k_{NP}=\frac{y+2}{x-1}$，且 $x\neq\pm1$. 由题意得 $\frac{y-2}{x+1}\cdot\frac{y+2}{x-1}=-\frac{1}{2}$，整理可得动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{9}=1(x\neq\pm1)$.

13. $x^2+y^2-2x-3=0$ ［解析］设 $M(x,y)$，由 $|MA|^2+|MO|^2=10$ 得 $(x-2)^2+(y-0)^2+x^2+y^2=10$，化简得 $x^2+y^2-2x-3=0$，即点 M 的轨迹方程是 $x^2+y^2-2x-3=0$.

14. 5 ［解析］设 $P(x,y)$，当 $y\geqslant2$ 时，$|PF|+y-2=6$，所以 $\sqrt{x^2+(y+2)^2}=8-y$，化简得 $x^2=60-20y,y\in[2,3]$，即 $y=-\frac{1}{20}x^2+3,y\in[2,3]$；当 $y<2$ 时，$|PF|+2-y=6$，所以 $\sqrt{x^2+(y+2)^2}=4+y$，整理得 $x^2=4y+12,y\in[-3,2)$，即 $y=\frac{1}{4}x^2-3,y\in[-3,2)$. 作出曲线 C 与直线 $x=-5$，如图，点 T 在直线 $x=-5$ 上. 连接 TF. 对于曲线 C 上任意一点 P，$|PF|+|PT|\geqslant|TF|$，当且仅当 P 是线段 TF 与曲线 C 的交点时取等号. 因为 $|TF|=\sqrt{25+(t+2)^2}\geqslant5$，所以 $|PF|+|PT|\geqslant|TF|\geqslant5$，当且仅当 $t=-2$，即点 T 的坐标为 $(-5,-2)$ 时，$m(t)$ 取得最小值 5.



15. $16\sqrt{2}$ ［解析］设 $Q(x,y)$，由 $||PQ||=4$，可得 $|x-1|+|y-1|=4$. 当 $x\geqslant1,y\geqslant1$ 时，方程化为 $x+y=6$；当 $x\geqslant1,y<1$ 时，方程化为 $x-y=4$；当 $x<1,y\geqslant1$ 时，方程化为 $x-y=-4$；当 $x<1,y<1$ 时，方程化为 $x+y=-2$. 如图，动点 Q 的轨迹是边长为 $4\sqrt{2}$ 的正方形，其长度为 $4\times4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$.

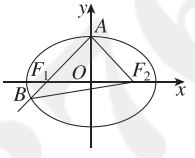


第 56 讲　圆锥曲线热点问题

/第 1 课时　长度、斜率、面积问题/

1. 解：(1)依题意可得上顶点 $A(0,b)$，左、右焦点分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，所以 $\overrightarrow{AF_1}=(-c,-b),\overrightarrow{AF_2}=(c,-b)$，又 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，所以 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=-c^2+(-b)^2=0$，即 $b^2=c^2$，即 $a^2-c^2=c^2$，所以 $a^2=2c^2$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)如图，由(1)可得 $b=c,a=\sqrt{2}c$，则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$，直线 AF_1 的方程为 $y=\frac{b}{c}x+b=x+c$.



由 $\begin{cases}y=x+c,\\ \frac{x^2}{2c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1,\end{cases}$ 可得 $3x^2+4cx=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-\frac{4}{3}c$，即 $x_B=-\frac{4}{3}c$，则 $y_B=-\frac{1}{3}c$，即 $B\left(-\frac{4}{3}c,-\frac{1}{3}c\right)$，所以 $|AB|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}c\right)^2+\left(c+\frac{1}{3}c\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}c=\frac{8}{3}$，解得 $c=\sqrt{2}$，则 $a=2$，所以 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a=8$.

2. 解：(1)因为 $\triangle OPE$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=2$.

又因为点 $E\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 Ω 上，

所以 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4b^2}=1$，可得 $b=1$，

所以椭圆 Ω 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)连接 OB，因为 $|BA|=|BC|$，O 为 AC 的中点，所以 $OA\perp OB$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设直线 l 的方程为 $x=my-1$，由 $\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\ x=my-1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+4)y^2-2my-3=0$，则 $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4}$.

因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $(m^2+1)y_1y_2-m(y_1+y_2)+1=0$，即 $(m^2+1)\times\frac{-3}{m^2+4}-m\times\frac{2m}{m^2+4}+1=0$，即 $\frac{1-4m^2}{m^2+4}=0$，解得 $m=\pm\frac{1}{2}$，

所以直线 AB 的斜率为 ±2.

3. 解：(1)由对称性知，$|OP|=|OQ|$，

因为 $\angle POQ=\frac{\pi}{3}$，$|PQ|=1$，所以 $\triangle OPQ$ 是边长为 1 的等边三角形.

因为 Q 位于第一象限，

所以 $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

代入椭圆 γ 的方程得 $\frac{\frac{3}{4}}{a^2}+\frac{\frac{1}{4}}{b^2}=1$①，

代入圆 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 的方程得 $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=a^2-b^2$②.

由①②解得 $a^2=\frac{3}{2},b^2=\frac{1}{2}$，

所以椭圆 γ 的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$.

(2)证明：当点 A 不在坐标轴上时，设 $A(m,n),mn\neq0$，则直线 OA 的斜率为 $\frac{n}{m}$，且 $\frac{m^2}{\frac{3}{2}}+\frac{n^2}{\frac{1}{2}}=1$，

即 $m^2+3n^2=\frac{3}{2}$.

因为 $OA/\!/BC$，$|OA|=|BC|$，所以四边形 $OABC$ 是平行四边形，$|BC|=|OA|=\sqrt{m^2+n^2}$. 设直线 BC 的方程为 $y=\frac{n}{m}(x-t)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{n}{m}(x-t),\\ \frac{2x^2}{3}+2y^2=1,\end{cases}$ 得 $(2m^2+6n^2)x^2-12n^2tx+6n^2t^2-3m^2=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{12n^2t}{2m^2+6n^2}$，$x_1x_2=\frac{6n^2t^2-3m^2}{2m^2+6n^2}$，

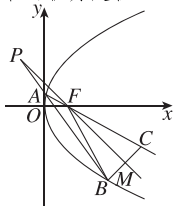
所以 $|BC|=\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{m^2+n^2}\cdot\frac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2-2n^2t^2+3n^2}}{2m^2+6n^2}=\sqrt{m^2+n^2}\cdot\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2-2n^2t^2+3n^2}}{\frac{3}{2}}$. 因为 $|BC|=|OA|=\sqrt{m^2+n^2}$，所以 $\sqrt{m^2+n^2}\cdot\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2-2n^2t^2+3n^2}}{\frac{3}{2}}=\sqrt{m^2+n^2}$，

整理得 $6\left(\frac{3}{2}-2n^2t^2\right)=\frac{9}{4}$，即 $|nt|=\frac{3}{4}$. 点 A 到直线 BC 的距离 $d=\frac{\left|\frac{n}{m}(m-t)-n\right|}{\sqrt{\frac{n^2}{m^2}+1}}=\frac{|nt|}{\sqrt{m^2+n^2}}$，所以四边形 $OABC$ 的面积 $S=2S_{\triangle ABC}=2\times\frac{1}{2}\times|BC|\times d=|OA|\cdot d=\sqrt{m^2+n^2}\cdot\frac{|nt|}{\sqrt{m^2+n^2}}=|nt|=\frac{3}{4}$.

易知当点 A 在坐标轴上时，四边形 $OABC$ 的面积也为 $\frac{3}{4}$，故四边形 $OABC$ 的面积为定值.

4. 解：(1)由题意知直线 AF 与 BF 的斜率均存在且均不为 0.设直线 $l:x=m(y-2)-1$,由题知 $F(1,0)$,将直线 l 的方程代入抛物线方程得 $y^2-4my+8m+4=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=8m+4$,则 $k_{AF}\cdot k_{BF}=\dfrac{y_1}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{4y_1}{y_1^2-4}\cdot\dfrac{4y_2}{y_2^2-4}=\dfrac{16y_1y_2}{(y_1y_2)^2-4(y_1+y_2)^2+8y_1y_2+16}=1$,所以直线 AF,BF 的斜率之积为定值 1.

(2)由题意可知,直线 PF 的斜率为 -1,方程为 $y=-x+1$.



设点 $B(t^2,2t)(t<0,t\neq-1)$,所以直线 BC 的方程为 $y-2t=x-t^2$,由 $\begin{cases}y=-x+1,\\y-2t=x-t^2,\end{cases}$ 得 $x=\dfrac{t^2-2t+1}{2}$.

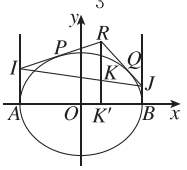
如图,设直线 BC 与 PF 的交点为 M,则 $M\left(\dfrac{t^2-2t+1}{2},\dfrac{-t^2+2t+1}{2}\right)$.$k_{BF}=\dfrac{2t}{t^2-1}$,由(1)得 $k_{AF}\cdot k_{BF}=1$,则 $k_{AF}=\dfrac{t^2-1}{2t}$,所以直线 AF 的方程为 $y=\dfrac{t^2-1}{2t}(x-1)$.由 $\begin{cases}y=\dfrac{t^2-1}{2t}(x-1),\\y-2t=x-t^2,\end{cases}$ 得 $x=\dfrac{-2t^3+5t^2-1}{t^2-2t-1}=1-2t$,可得 $C(1-2t,1-t^2)$,所以 M 为线段 BC 的中点,所以 $S_{\triangle FBC}=2S_{\triangle FBM}=|BM|\cdot|FM|$,故 $S_{\triangle FBC}=\sqrt{2}\left|t^2-\dfrac{t^2-2t+1}{2}\right|\cdot\sqrt{2}\left|\dfrac{t^2-2t+1}{2}-1\right|=\dfrac{1}{2}|(t^2-3)^2-8|=4$,所以 $(t^2-3)^2-8=\pm8$,又 $t<0$,所以 $t=-\sqrt{3}$ 或 $t=-\sqrt{7}$,所以点 B 的坐标为 $(3,-2\sqrt{3})$ 或 $(7,-2\sqrt{7})$.

5. 解：(1)由题意得 $\begin{cases}2a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times2b,\\a+c=3,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=2,\\b=\sqrt{3},\\c=1,\end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)设椭圆 C 过点 R 的切线方程为 $y-2=k(x-1)$,即 $y=kx+(2-k)$.

由 $\begin{cases}y=kx+(2-k),\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(4k^2+3)x^2+8k(2-k)x+4(2-k)^2-12=0$,由 $\Delta=0$ 得 $64k^2(2-k)^2=4(4k^2+3)[4(2-k)^2-12]$,整理得 $3k^2+4k-1=0$,所以 $k_1k_2=-\dfrac{1}{3}$.

(3)证明：设 $R(x_0,y_0)(-2<x_0<2,y_0>0)$,直线 RK 交 x 轴于点 K',如图,设椭圆 C 在 P,Q 两点处的切线斜率分别为 k_1,k_2,则 $\dfrac{|IK|}{|JK|}=\dfrac{|AK'|}{|BK'|}=\dfrac{x_0+2}{2-x_0}$.



设椭圆 C 过点 R 的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,即 $y=kx+(y_0-kx_0)$,

由 $\begin{cases}y=kx+(y_0-kx_0),\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(4k^2+3)x^2-8k(kx_0-y_0)x+4(kx_0-y_0)^2-12=0$,由 $\Delta=0$ 得 $64k^2(kx_0-y_0)^2=4(4k^2+3)[4(kx_0-y_0)^2-12]$,化简整理得 $(x_0^2-4)k^2-2x_0\cdot y_0\cdot k+y_0^2-3=0$,由根与系数的关系得 $k_1+k_2=\dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-4}$,$k_1k_2=\dfrac{y_0^2-3}{x_0^2-4}$,易知 $y_I=k_1(-2-x_0)+y_0$,$y_J=k_2(2-x_0)+y_0$.

要证 $\dfrac{|IK|}{|JK|}=\dfrac{|IA|}{|JB|}$,只需证 $\dfrac{x_0+2}{2-x_0}=\dfrac{k_1(-2-x_0)+y_0}{k_2(2-x_0)+y_0}$,即证 $k_2(4-x_0^2)+y_0(2+x_0)=k_1(x_0^2-4)+y_0(2-x_0)$,即证 $4(k_1+k_2)+2x_0y_0=(k_1+k_2)x_0^2$,即证 $(k_1+k_2)(x_0^2-4)=2x_0y_0$.

因为 $k_1+k_2=\dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-4}$,所以上式成立,

即 $\dfrac{|IK|}{|JK|}=\dfrac{|IA|}{|JB|}$ 成立.

/第 2 课时　最值与范围、证明问题/

1. 解：(1)设椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由已知得 $b=\sqrt{3}$,$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$,$a^2-b^2=c^2$,得 $a=2$,$b=\sqrt{3}$,$c=1$,

故椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)由题意,直线 l 的斜率存在,

故设直线 l 的方程为 $y=kx+2$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=kx+2,\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 可得 $(4k^2+3)x^2+16kx+4=0$,

由 $\Delta=256k^2-16(4k^2+3)>0$,得 $k<-\dfrac{1}{2}$ 或 $k>\dfrac{1}{2}$,可得 $x_1+x_2=-\dfrac{16k}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\dfrac{4}{4k^2+3}$.

$\because\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$,$\therefore x_1x_2+y_1y_2>0$,

即 $x_1x_2+(kx_1+2)(kx_2+2)>0$,

即 $(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4>0$,

即 $(1+k^2)\cdot\dfrac{4}{4k^2+3}+2k\left(-\dfrac{16k}{4k^2+3}\right)+4>0$,整理得 $12k^2<16$,

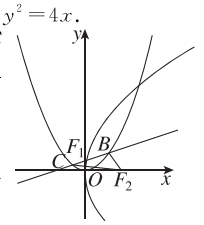
解得 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<k<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

又 $k<-\dfrac{1}{2}$ 或 $k>\dfrac{1}{2}$,$\therefore-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<k<-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,故实数 k 的取值范围为 $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

2. 解：(1)根据题意得 $F_1\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$,$F_2\left(\dfrac{p}{2},0\right)$,则 $|F_1F_2|=\sqrt{\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$,

又 $p>0$,所以 $p=2$,所以 $F_2(1,0)$,抛物线 C_2 的标准方程为 $y^2=4x$.

(2)如图,将直线 BC 的方程 $y=kx+\dfrac{1}{4}$ 代入抛物线 C_1 的方程,得 $x^2-kx-\dfrac{1}{4}=0$,$\Delta=k^2+1>0$,设 $B(x_2,y_2)$,



$C(x_3,y_3)$,则 $x_2+x_3=k$,$x_2x_3=-\dfrac{1}{4}$.

点 F_2 到直线 BC 的距离 $d=\dfrac{\left|k+\dfrac{1}{4}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$,

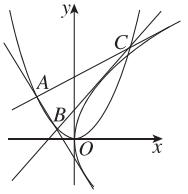
$|BC|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_3|=\sqrt{1+k^2}\,\sqrt{(x_2+x_3)^2-4x_2x_3}=1+k^2$,

所以 $S_{\triangle F_2BC}=\dfrac{d}{2}\times|BC|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1+k^2)\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2}$.

设 $f(k)=(1+k^2)\left(k+\dfrac{1}{4}\right)^2(k\geqslant0)$,

则 $f'(k)=2\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\left(2k^2+\dfrac{1}{4}k+1\right)>0$,所以函数 $f(k)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(k)_{\min}=f(0)=\dfrac{1}{16}$,所以 $S_{\triangle F_2BC}$ 的最小值为 $\dfrac{1}{8}$.

(3)证明：如图,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,直线 AB 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,又 $x_1^2=y_1$,$x_2^2=y_2$,所以直线 AB 的方程为 $y-x_1^2=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}(x-x_1)=(x_2+x_1)(x-x_1)$,即 $y=(x_2+x_1)x-x_1x_2$,代入 $y^2=4x$ 得 $(x_2+x_1)y^2-4y-4x_1x_2=0$,由 $\Delta_1=16+16(x_2+x_1)x_1x_2=0$,得 $x_2y_1+x_1y_2+1=0$①.



同理,直线 AC 的方程为 $y=(x_3+x_1)x-x_1x_3$,代入 $y^2=4x$ 得 $(x_3+x_1)y^2-4y-4x_1x_3=0$,

由 $\Delta_2=16+16(x_3+x_1)x_1x_3=0$,得 $x_3y_1+x_1y_3+1=0$②.

由①②知,点 $B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$ 的坐标满足方程 $xy_1+yx_1+1=0$,即直线 BC 的方程为 $xy_1+yx_1+1=0$.

将直线 BC 的方程与 $y^2=4x$ 联立,消去 x 得 $y_1y^2+4x_1y+4=0$,$\Delta_3=16x_1^2-16y_1=0$,所以直线 BC 也与 C_2 相切.

3. 解：(1)设动圆 M 的半径为 r,由题意得圆 C_1 和圆 C_2 的半径分别为 7,1,

因为 M 与 C_1,C_2 都内切,

所以 $|MC_1|=7-r$,$|MC_2|=r-1$,

所以 $|MC_1|+|MC_2|=7-r+r-1=6$,

又 $C_1(-1,0)$,$C_2(1,0)$,所以 $|C_2C_1|=2<6$,所以点 M 的轨迹是以 C_1,C_2 为焦点的椭圆.设 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则 $2a=6$,$2c=2$,所以 $a=3$,$c=1$,则 $b^2=a^2-c^2=9-1=8$,故 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

(2)(i)证明：设 $A_1(x_1,y_1)$,$A_2(x_2,y_2)$,$P(9,t)(t\neq0)$.由题中给出的性质可得,

切线 PA_1 的方程为 $\dfrac{xx_1}{9}+\dfrac{yy_1}{8}=1$,

切线 PA_2 的方程为 $\dfrac{xx_2}{9}+\dfrac{yy_2}{8}=1$.

因为两条切线都经过点 $P(9,t)$,所以 $x_1+\dfrac{ty_1}{8}=1$,$x_2+\dfrac{ty_2}{8}=1$,

故直线 A_1A_2 的方程为 $x+\dfrac{ty}{8}=1$,可得直线 A_1A_2 的斜率 $k_{A_1A_2}=-\dfrac{8}{t}$.

直线 PC_2 的斜率 $k_{PC_2}=\dfrac{t}{9-1}=\dfrac{t}{8}$,

因为 $k_{PC_2}\cdot k_{A_1A_2}=\dfrac{t}{8}\cdot\left(-\dfrac{8}{t}\right)=-1$,

所以 $A_1A_2\perp PC_2$.

(ii)由直线 A_1A_2 的方程为 $x+\dfrac{ty}{8}=1$,可改设直线 A_1A_2 的方程为 $x=my+1(m\neq0)$,由 $\begin{cases}x=my+1,\\8x^2+9y^2=72,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $(8m^2+9)y^2+16my-64=0$,由根与

13837676

系数的关系得$\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{16m}{8m^2+9},\\ y_1y_2=-\dfrac{64}{8m^2+9}.\end{cases}$

易知$A_1'(x_1,-y_1)$，所以直线$A_1'A_2$的方程为$y+y_1=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，

令$y=0$得，$x_N=\dfrac{y_1(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_1=\dfrac{y_1x_2+y_2x_1}{y_2+y_1}=\dfrac{y_1(my_2+1)+y_2(my_1+1)}{y_2+y_1}=\dfrac{2my_1y_2+y_1+y_2}{y_2+y_1}=1+\dfrac{2my_1y_2}{y_2+y_1}=1+\dfrac{2m\left(-\dfrac{64}{8m^2+9}\right)}{-\dfrac{16m}{8m^2+9}}=1+8=9$，

所以直线$A_1'A_2$经过定点$N(9,0)$.

由$C_2(1,0)$，$A_1A_2\perp PC_2$，可设直线PC_2的方程为$y=-m(x-1)$，

由$\begin{cases}y=-m(x-1),\\ 8x^2+9y^2=72,\end{cases}$消去$x$整理得$\left(\dfrac{8}{m^2}+9\right)y^2-\dfrac{16}{m}y-64=0$，

设$G(x_3,y_3)$，$H(x_4,y_4)$，则由根与系数的关系得$y_3+y_4=\dfrac{\dfrac{16}{m}}{\dfrac{8}{m^2}+9}=\dfrac{16m}{8+9m^2}$，

$y_3y_4=-\dfrac{64}{\dfrac{8}{m^2}+9}=-\dfrac{64m^2}{8+9m^2}<0$，

因为$y_3y_4<0$，所以$|S_1-S_2|=\dfrac{1}{2}|C_2N|\,||y_3|-|y_4||=4|y_3+y_4|=\dfrac{64|m|}{9m^2+8}=\dfrac{64}{9|m|+\dfrac{8}{|m|}}\leqslant\dfrac{64}{2\sqrt{72}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$，

所以$|S_1-S_2|_{\max}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$，当且仅当$9|m|=\dfrac{8}{|m|}$，即$m=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$时取等号.

又因为$m\neq0$，所以$S_1-S_2\in\left[-\dfrac{8\sqrt{2}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right]$.

4. 解：(1)当$PF_2\perp x$轴(P在第一象限)时，由题意知$P\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.因为直线$y=1$为$\triangle PF_1F_2$的等线，所以$P$在直线$y=1$的上方，$\dfrac{b^2}{a}-1=2$，又$e=\dfrac{c}{a}=2$，$c^2=a^2+b^2$，所以$a=1$，$b=\sqrt{3}$，所以$E$的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)设$P(x_0,y_0)$，则$x_0^2-\dfrac{y_0^2}{3}=1$，切线m的方程为$x_0x-\dfrac{y_0y}{3}=1$，双曲线E的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，不妨设A在B的上方，则$x_A=\dfrac{1}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}$，$x_B=\dfrac{1}{x_0+\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}$，故

$x_A+x_B=\dfrac{1}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{x_0+\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}=2x_0$，

所以P是线段AB的中点.因为F_1，F_2到过点O的直线$y=\sqrt{2}x$的距离相等，且F_1，F_2在直线$y=\sqrt{2}x$的两侧，所以若过点O的直线$y=\sqrt{2}x$是四边形AF_1BF_2的等线，则点A，B到该直线的距离相等，且分别位于该直线的两侧，所以该直线必过点P，即直线OP的方程为$y=\sqrt{2}x$.

由$\begin{cases}y=\sqrt{2}x,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=\sqrt{6},\end{cases}$故$P(\sqrt{3},\sqrt{6})$，所以$y_A=\sqrt{3}\,x_A=\dfrac{\sqrt{3}}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0-y_0}=\sqrt{6}+3$，$y_B=-\sqrt{3}\,x_B=-\dfrac{\sqrt{3}}{x_0+\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}=\dfrac{-3}{\sqrt{3}x_0+y_0}=\sqrt{6}-3$，所以$|y_A-y_B|=6$，所以$S_{四边形AF_1BF_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_A-y_B|=2|y_A-y_B|=12$.

(3)证明：设$G(x,y)$，由(2)中所设$P(x_0,y_0)$及$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OP}$，得$x_0=3x$，$y_0=3y$，又$x_0^2-\dfrac{y_0^2}{3}=1$，$x_0\geqslant1$，故曲线$\Gamma$的方程为$9x^2-3y^2=1\left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$.

切线n的方程为$\dfrac{9x_0}{3}x-\dfrac{3y_0y}{3}=1$，即$3x_0x-y_0y-1=0$.

易知A与F_2在n的右侧，F_1在n的左侧，分别记F_1，F_2，A到n的距离为d_1，d_2，d_3，由(2)知$x_A=\dfrac{1}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}$，$y_A=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}$，

所以$d_3=\dfrac{\left|\dfrac{3x_0}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{3}y_0}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}-1\right|}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{\left|\dfrac{3x_0-\sqrt{3}y_0-x_0+\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}\right|}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{\left|\dfrac{2x_0-\dfrac{2y_0}{\sqrt{3}}}{x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}}\right|}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}$，

由$x_0\geqslant1$得$d_1=\dfrac{|-6x_0-1|}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{6x_0+1}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}$，$d_2=\dfrac{|6x_0-1|}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{6x_0-1}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}$，因为$d_2+d_3=\dfrac{6x_0-1}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{6x_0+1}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}=d_1$，所以$\Gamma$在点$G$处的切线$n$为$\triangle AF_1F_2$的等线.

/第3课时　定点、定值、探索性问题/

1. 解：(1)将点P的坐标代入抛物线C的方程，得$4=2p$，解得$p=2$，故抛物线C的方程为$y^2=4x$.

(2)证明：设直线AB的方程为$x=my+t$，由$\begin{cases}x=my+t,\\ y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4my-4t=0$，由$\Delta=16m^2+16t>0$，得$m^2+t>0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4t$.

直线PA的斜率$k_1=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$，同理可得直线$PB$的斜率$k_2=\dfrac{4}{y_2+2}$，由题意得$\dfrac{4}{y_1+2}+\dfrac{4}{y_2+2}=2$，则$4(y_1+y_2+4)=2(y_1y_2+2y_1+2y_2+4)$，整理得$y_1y_2=4$，即$-4t=4$，解得$t=-1$，故直线$AB$过定点$(-1,0)$.

2. 解：(1)过点$D(2,1)$且斜率为1的直线的方程为$y-1=x-2$，即$y=x-1$，令$y=0$，则$x=1$，∴点F的坐标为$(1,0)$，∴$\dfrac{p}{2}=1$，∴$p=2$，∴抛物线C的方程为$y^2=4x$.

(2)由(1)得抛物线C：$y^2=4x$，假设存在定点$M(m,0)$，满足题意.

设直线AB的方程为$x=ty+m(t\in\mathbf{R}$，$m\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x=ty+m,\\ y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4ty-4m=0$，

∴$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4m$，$\Delta=16t^2+16m>0$.∵$OA\perp OB$，∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(ty_1+m)(ty_2+m)+y_1y_2=(t^2+1)y_1y_2+tm(y_1+y_2)+m^2=-4m(t^2+1)+4mt^2+m^2=m^2-4m=0$，

∴$m=4$或$m=0$(舍去).

当$m=4$时，点M的坐标为$(4,0)$，满足$OA\perp OB$，$\Delta=16t^2+16m>0$，

∴存在定点$M(4,0)$满足题意.

3. 解：(1)由题意可得$\begin{cases}b=2,\\ a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\ b=2,\\ c=\sqrt{5},\end{cases}$所以椭圆$C$的方程为$\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$.

(2)证明：方法一(设线法)：由题意可知，直线PQ的斜率存在，设直线PQ：$y=k(x+2)+3$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x+2)+3,\\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1,\end{cases}$消去$y$得$(4k^2+9)x^2+8k(2k+3)x+16(k^2+3k)=0$，

则$\Delta=64k^2(2k+3)^2-64(4k^2+9)(k^2+3k)=-1728k>0$，解得$k<0$，可得$x_1+x_2=-\dfrac{8k(2k+3)}{4k^2+9}$，$x_1x_2=\dfrac{16(k^2+3k)}{4k^2+9}$.

因为$A(-2,0)$，所以直线AP：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令$x=0$，解得$y=\dfrac{2y_1}{x_1+2}$，即$M\left(0,\dfrac{2y_1}{x_1+2}\right)$，同理可得$N\left(0,\dfrac{2y_2}{x_2+2}\right)$，则$\dfrac{\dfrac{2y_1}{x_1+2}+\dfrac{2y_2}{x_2+2}}{2}=\dfrac{[k(x_1+2)+3]}{x_1+2}+\dfrac{[k(x_2+2)+3]}{x_2+2}=\dfrac{[kx_1+(2k+3)](x_2+2)+[kx_2+(2k+3)](x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{2kx_1x_2+(4k+3)(x_1+x_2)+4(2k+3)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\dfrac{\dfrac{32k(k^2+3k)}{4k^2+9}-\dfrac{8k(4k+3)(2k+3)}{4k^2+9}+4(2k+3)}{\dfrac{16(k^2+3k)}{4k^2+9}-\dfrac{16k(2k+3)}{4k^2+9}+4}=\dfrac{108}{36}=3$，所以线段$MN$的中点是定点$(0,3)$.

方法二(设点法)：设$P(x_1,y_1)$，$M(0,y_M)$，则直线AP：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，则

$y_M=\frac{2y_1}{x_1+2}$. 设 $Q(x_2,y_2)$, $N(0,y_N)$,

同理可得 $y_N=\frac{2y_2}{x_2+2}$. 由题意可知,直线 PQ 的斜率存在,设直线 PQ: $y=k(x+2)+3$,线段 MN 的中点为 $D(0,y_D)$,

则 $y_D=\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{k(x_1+2)+3}{x_1+2}+\frac{k(x_2+2)+3}{x_2+2}=2k+\frac{3(x_1+2+x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$.

由 $\begin{cases}y=k(x+2)+3,\\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+9)(x+2)^2+12(2k-3)(x+2)+36=0$.

故 $(x_1+2)+(x_2+2)=\frac{12(3-2k)}{4k^2+9}$, $(x_1+2)(x_2+2)=\frac{36}{4k^2+9}$,

所以 $y_D=2k+\frac{3(x_1+2+x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=3$,

所以线段 MN 的中点为定点 $(0,3)$.

4. 解:(1)因为椭圆的离心率 $e=\frac{1}{2}$,所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,可得 $a=2c$,则 $b=\sqrt{3}c$,其中 c 为半焦距,所以 $A(-2c,0)$, $B(0,-\sqrt{3}c)$, $C\left(0,-\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$,故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2c\times\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,可得 $c=\sqrt{3}$,所以 $a=2\sqrt{3}$, $b=3$,故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2)假设存在满足条件的点 T,设 $T(0,t)$. 若过点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ 的动直线的斜率存在,则可设该直线的方程为 $y=kx-\frac{3}{2}$,设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}3x^2+4y^2=36,\\ y=kx-\frac{3}{2},\end{cases}$ 可得 $(3+4k^2)x^2-12kx-27=0$,故 $\Delta=144k^2+108(3+4k^2)=324+576k^2>0$ 且 $x_1+x_2=\frac{12k}{3+4k^2}$, $x_1x_2=-\frac{27}{3+4k^2}$,

而 $\overrightarrow{TP}=(x_1,y_1-t)$, $\overrightarrow{TQ}=(x_2,y_2-t)$,

故 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=x_1x_2+(y_1-t)(y_2-t)=x_1x_2+\left(kx_1-\frac{3}{2}-t\right)\left(kx_2-\frac{3}{2}-t\right)=(1+k^2)x_1x_2-k\left(\frac{3}{2}+t\right)(x_1+x_2)+\left(\frac{3}{2}+t\right)^2=(1+k^2)\times\left(-\frac{27}{3+4k^2}\right)-k\left(\frac{3}{2}+t\right)\times\frac{12k}{3+4k^2}+\left(\frac{3}{2}+t\right)^2=\frac{-27k^2-27-18k^2-12k^2t+3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2+(3+2t)^2k^2}{3+4k^2}=\frac{[(3+2t)^2-12t-45]k^2+3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2-27}{3+4k^2}$,

因为 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant 0$ 恒成立,所以 $\begin{cases}(3+2t)^2-12t-45\leqslant 0,\\ 3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2-27\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$. 若过点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ 的动直线的斜率不存在,则 $P(0,3)$, $Q(0,-3)$ 或 $P(0,-3)$, $Q(0,3)$,由 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant 0$ 恒成立,得 $-3\leqslant t\leqslant 3$. 综上可得, $-3\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$.

故在 y 轴上存在点 T,使得 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant 0$ 恒成立, T 点纵坐标的取值范围是 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

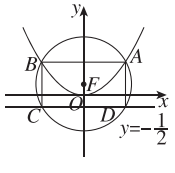
培优专训(六) 解析几何运算优化策略

1. C [解析] 根据题意,只需要这三个点构成等腰直角三角形,所以这三个点只可能是“短轴的两个端点和一个焦点”或“两个焦点和短轴的一个端点”. 设椭圆 C 的长半轴长为 $a(a>0)$,短半轴长为 $b(b>0)$,半焦距为 $c(c>0)$,这两种情况都满足 $b=c$,所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{c^2+c^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

2. C [解析] 方法一:因为椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,可得 $a=2c$,所以 $a^2=4c^2$,即 $b^2+c^2=4c^2$,可得 $b=\sqrt{3}c$,则点 $P(0,\sqrt{3}c)$. 记右焦点为 F_2,连接 PF_2,则 $F_2(c,0)$,所以 $k_{PF_2}=\frac{\sqrt{3}c-0}{0-c}=-\sqrt{3}$. 由题意可得直线 AB 的斜率 $k=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $k\cdot k_{PF_2}=-1$,即 $PF_2\perp AB$. 由题意得直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$,直线 PF_2 的方程为 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}c$. 设直线 AB 与直线 PF_2 的交点为 M,联立 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c),\\ y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}c,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=\frac{c}{2},\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}c,\end{cases}$ 则 $M\left(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$,可得 M 为 PF_2 的中点,所以直线 AB 为线段 PF_2 的中垂线,连接 AF_2, BF_2,所以 $|PA|=|AF_2|$, $|PB|=|BF_2|$,所以 $\triangle PAB$ 的周长为 $|PA|+|PB|+|AB|=|AF_2|+|AB|+|BF_2|=4a=16$,可得 $a=4$,所以 $c=\frac{1}{2}a=2$, $b=\sqrt{3}c=2\sqrt{3}$,所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. 故选 C.

方法二:由已知得 $a=2c$,设椭圆的左、右焦点分别为 F_1, F_2,则 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. 连接 PF_1, PF_2, AF_2, BF_2,易知 $\triangle PF_1F_2$ 为等边三角形,由题易知直线 l 为 $\angle PF_1F_2$ 的平分线,点 P, F_2 关于直线 l 对称,所以 $\triangle PAB$ 的周长就是 $\triangle ABF_2$ 的周长 $4a$,故 $4a=16$,得 $a=4$, $c=2$, $b=2\sqrt{3}$,所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

3. D [解析] 由题可得,抛物线 C_1: $x^2=2y$ 的焦点为 $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$,所以圆 C_2 的圆心 F 的坐标为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 如图,

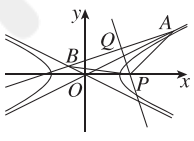


因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 BD, AC 为圆 C_2 的直径,又 $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 为圆 C_2 的圆心,所以点 F 为该矩形对角线的交点,所以点 F 到直线 CD 的距离与点 F 到直线 AB 的距离相等,易知点 F 到直线 CD 的距离 $d=1$,所以直线 AB 的方程为 $y=\frac{3}{2}$,所以不妨令 $A\left(\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$,故圆 C_2 的半径 $r=|AF|=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=2$,所以圆 C_2 的方程为 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$. 故选 D.

4. $x+\sqrt{2}y+1=0$ 或 $x-\sqrt{2}y+1=0$

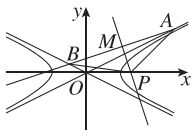
[解析] ∵ l 过点 $F_1(-1,0)$ 且斜率不为 0,∴可设 l 的方程为 $x=my-1$. 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$,∴ $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$,∴ $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=-\frac{4}{m^2+2}$,又 $F_2(1,0)$,∴ $G\left(\frac{x_1+x_2+1}{3},\frac{y_1+y_2}{3}\right)$,即 $G\left(\frac{m^2-2}{3(m^2+2)},\frac{2m}{3(m^2+2)}\right)$,∴ $|OG|=\sqrt{\frac{(m^2-2)^2}{9(m^2+2)^2}+\frac{(2m)^2}{9(m^2+2)^2}}=\frac{\sqrt{m^4+4}}{3(m^2+2)}$,∴ $\frac{\sqrt{m^4+4}}{3(m^2+2)}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,解得 $m=\pm\sqrt{2}$,∴直线 l 的方程为 $x+\sqrt{2}y+1=0$ 或 $x-\sqrt{2}y+1=0$.

5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ [解析] 方法一:两条渐近线的方程分别为 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$,分别与直线 $x-3y+m=0$ 联立,得 $A\left(\frac{-am}{a-3b},\frac{-bm}{a-3b}\right)$, $B\left(\frac{-am}{a+3b},\frac{bm}{a+3b}\right)$. 如图,设线段 AB 的中点为 Q,连接 PQ,则 $Q\left(-\frac{a^2m}{a^2-9b^2},-\frac{3b^2m}{a^2-9b^2}\right)$,由 $|PA|=|PB|$,得 PQ 与 AB 垂直,则 $\frac{-\frac{3b^2m}{a^2-9b^2}}{-\frac{a^2m}{a^2-9b^2}-m}\cdot\frac{1}{3}=-1$,得 $a^2=4b^2$,



即 $a^2=4(c^2-a^2)$,即 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{4}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

方法二(点差法):设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $M(x_0,y_0)$ 为线段 AB 的中点,连接 PM,如图,



由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,又 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{3}$,所以 $\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{3b^2}=0$①. 因为 $|PA|=|PB|$, M 为线段 AB 的中点,所以 $AB\perp PM$,所以 $k_{PM}=-3$,又 $P(m,0)$,所以直线 PM: $y=-3x+3m$,联立直线 AB 与直线 PM 的方程,可得 $x_0=\frac{4}{5}m$, $y_0=\frac{3}{5}m$,代入①式,得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,所以 $e=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. 解:(1)由题意知, $a=2$, $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $c=\sqrt{3}$,所以 $b^2=a^2-c^2=1$,故椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $D(-4,t)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$,又 $A(-2,0)$,所以 $k_{AD}=-\frac{t}{2}=k_{BC}$,又

直线 l 经过点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 l 的方程为 $y=-\frac{t}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $\begin{cases}y=-\frac{t}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 可得 $(1+t^2)x^2-2\sqrt{3}tx-1=0$，显然 $\Delta>0$，则 $x_1+x_2=\frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2}$，$x_1x_2=-\frac{1}{1+t^2}$，则 $|BC|=\sqrt{1+\left(-\frac{t}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}\cdot\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2}\right)^2+\frac{4}{1+t^2}}=\frac{\sqrt{(4+t^2)(4t^2+1)}}{1+t^2}$，又 $|AD|=\sqrt{4+t^2}$，所以由 $|BC|=|AD|$，可得 $\frac{\sqrt{(4+t^2)(4t^2+1)}}{1+t^2}=\sqrt{4+t^2}$，解得 $t=\pm\sqrt{2}$ 或 $t=0$，故直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. 解：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，将 $y=kx+a$ 代入 $y=\frac{x^2}{4}$，

得 $x^2-4kx-4a=0$，

所以 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4a$.

方法一：设存在点 $P(0,b)$，使得当 k 变化时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$，

则 $k_{MP}+k_{NP}=\frac{y_1-b}{x_1}+\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+(a-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{k(a+b)}{a}$，

当 $b=-a$ 时，有 $k_1+k_2=0$，则 $\angle OPM=\angle OPN$，故点 $P(0,-a)$ 符合题意.

方法二：设存在点 $P(0,b)$，使得当 k 变化时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$，

设直线 MN 与 y 轴的交点为 A，由角平分线定理有 $\frac{|PM|}{|PN|}=\frac{|MA|}{|NA|}=\frac{|x_1|}{|x_2|}$，

所以 $\frac{\sqrt{x_1^2+\left(\frac{x_1^2}{4}-b\right)^2}}{\sqrt{x_2^2+\left(\frac{x_2^2}{4}-b\right)^2}}=\frac{|x_1|}{|x_2|}$，整理得

$(x_1^2-x_2^2)\left(\frac{x_1^2x_2^2}{16}-b^2\right)=0$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $b^2=\frac{x_1^2x_2^2}{16}=a^2$. 若 $b=a$，则点 P 与点 A 重合，此时仅有 $k=0$ 时满足 $\angle OPM=\angle OPN$，不合题意，所以 $b=-a$，即点 $P(0,-a)$ 满足题意.

方法三：易知 $k_{MN}=\frac{x_1+x_2}{4}$，所以直线 MN 的方程为 $y=\frac{x_1+x_2}{4}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{4}$，

令 $x=0$，得 $a=-\frac{x_1x_2}{4}$.

设点 M 关于 y 轴的对称点为 M'，则 $M'\left(-x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，则点 M' 在直线 NP 上，也在抛物线上，所以直线 NM' 的方程为 $y=\frac{x_2-x_1}{4}(x-x_2)+\frac{x_2^2}{4}$，

令 $x=0$，得 $y_P=\frac{x_1x_2}{4}=-a$，

所以存在点 $P(0,-a)$ 满足题意.

8. 解：(1) 设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，因为 $c=1$，点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，所以 $\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\\ c=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 方法一：

(i) 证明：平移坐标系，使得坐标原点和点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 重合，则 $\begin{cases}x=x'+1,\\ y=y'+\frac{3}{2},\end{cases}$ 得新坐标系 $x'Oy'$，在新坐标系中，椭圆方程为 $\frac{(x'+1)^2}{4}+\frac{\left(y'+\frac{3}{2}\right)^2}{3}=1$，化简得，$3x'^2+4y'^2+6x'+12y'=0$①，

直线 EF 平移后变为 $E'F'$，其方程不妨设为 $mx'+ny'=1$，代入①构建齐次式得 $3x'^2+4y'^2+6x'(mx'+ny')+12y'(mx'+ny')=0$，整理得 $(4+12n)y'^2+(6n+12m)x'y'+(3+6m)x'^2=0$，两边同时除以 x'^2，得 $(4+12n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+(6n+12m)\frac{y'}{x'}+3+6m=0$②，易知 $k_{AE'}$ 和 $k_{AF'}$ 是方程②的两个根，

所以 $k_{AE'}+k_{AF'}=-\frac{6n+12m}{4+12n}=2$，

化简得 $n=-\frac{6}{15}m-\frac{4}{15}$，代入直线 $mx'+ny'=1$ 得 $mx'+\left(-\frac{6}{15}m-\frac{4}{15}\right)y'=1$，

整理得 $m\left(x'-\frac{6}{15}y'\right)-\frac{4}{15}y'-1=0$，

直线 $E'F'$ 恒过直线 $x'-\frac{6}{15}y'=0$ 和 $-\frac{4}{15}y'-1=0$ 的交点 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{15}{4}\right)$，

则直线 EF 恒过定点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

(ii) 证明：$k_{AE'}\cdot k_{AF'}=\frac{3+6m}{4+12n}=2$，即 $m=4n+\frac{5}{6}$，则直线 $E'F'$ 的方程为 $n(4x'+y')+\frac{5}{6}x'-1=0$，

直线 $E'F'$ 恒过直线 $4x'+y'=0$ 和 $\frac{5}{6}x'-1=0$ 的交点 $\left(\frac{6}{5},-\frac{24}{5}\right)$，

则直线 EF 恒过定点 $\left(\frac{11}{5},-\frac{33}{10}\right)$.

方法二：

(i) 证明：设直线 EF 的方程为 $y=kx+m$，即 $y-\frac{3}{2}=k(x-1)+k+m-\frac{3}{2}$，变形得 $\frac{y-\frac{3}{2}-k(x-1)}{k+m-\frac{3}{2}}=1$，将椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 变形为 $\frac{[(x-1)+1]^2}{4}+\frac{\left[\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]^2}{3}=1$，

展开整理得 $3(x-1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+6\left[(x-1)+2\left(y-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot 1=0$，

进行“1”的代换得 $3(x-1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+6\left[(x-1)+2\left(y-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot\frac{y-\frac{3}{2}-k(x-1)}{k+m-\frac{3}{2}}=0$，

去分母化简得 $4\left(k+m+\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+6(1-2k)(x-1)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\left(3m-3k-\frac{9}{2}\right)(x-1)^2=0$，等式两边同时除以 $(x-1)^2$，得 $4\left(k+m+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{y-\frac{3}{2}}{x-1}\right)^2+6(1-2k)\frac{y-\frac{3}{2}}{x-1}+3m-3k-\frac{9}{2}=0$ $(*)$，因此 $\frac{y-\frac{3}{2}}{x-1}$ 是方程 $(*)$ 的实数根，设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，则 $k_{AE}=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$ 和 $k_{AF}=\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$ 是方程 $(*)$ 的两个实数根，由根与系数的关系得 $k_{AE}+k_{AF}=\frac{-6(1-2k)}{4\left(k+m+\frac{3}{2}\right)}=2$，即 $-3(1-2k)=4k+4m+6$，即 $2k=4m+9$，代入直线 EF 的方程得 $y=kx+\frac{2k-9}{4}=k\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{4}$，

所以直线 EF 恒过定点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

(ii) 证明：由根与系数的关系得 $k_{AE}\cdot k_{AF}=\frac{3m-3k-\frac{9}{2}}{4\left(k+m+\frac{3}{2}\right)}=2$，所以 $m=\frac{11k+\frac{33}{2}}{-5}$，代入直线 EF 的方程得 $y=kx+\frac{11k+\frac{33}{2}}{-5}=k\left(x-\frac{11}{5}\right)-\frac{33}{10}$，

所以直线 EF 恒过定点 $\left(\frac{11}{5},-\frac{33}{10}\right)$.

方法三：

(i) 证明：设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，直线 EF 的方程为 $y=kx+b$，

由 $\begin{cases}y=kx+b,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-12=0$，由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-\frac{8kb}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4b^2-12}{3+4k^2}$. 由题意知，$k_{AE}+k_{AF}=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=2$，即 $\frac{kx_1+b-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{kx_2+b-\frac{3}{2}}{x_2-1}=2$，

得 $\left(kx_1+b-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+\left(kx_2+b-\frac{3}{2}\right)(x_1-1)=2(x_1-1)(x_2-1)$，整理得 $(2k-2)x_1x_2+\left(b-k+\frac{1}{2}\right)(x_1+x_2)+1-2b=0$，可得 $(2k-2)\cdot\frac{4b^2-12}{3+4k^2}+\left(b-k+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8kb}{3+4k^2}\right)+1-2b=0$，整理得 $8b^2+24k-27+4kb+6b-4k^2=0$，即 $8b^2+(4k+6)b-(4k^2-24k+27)=0$，

即 $8b^2+(4k+6)b-(2k-9)(2k-3)=0$，即 $[4b-(2k-9)][2b+(2k-3)]=0$，

故 $b=\frac{k}{2}-\frac{9}{4}$ 或 $b=-k+\frac{3}{2}$.

当 $b=\frac{k}{2}-\frac{9}{4}$ 时，直线 EF：$y=kx+b=$

$k\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{4}$ 恒过定点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$；当 $b=-k+\frac{3}{2}$ 时，直线 EF：$y=kx+b=k(x-1)+\frac{3}{2}$ 恒过定点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$，此点与 A 点重合，不符合题意，舍去.

综上，直线 EF 恒过定点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

(ii)证明：由题意可知 $\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}\cdot\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=2$，即 $\frac{\left(kx_1+b-\frac{3}{2}\right)\left(kx_2+b-\frac{3}{2}\right)}{(x_1-1)(x_2-1)}=2$，故 $\left(kx_1+b-\frac{3}{2}\right)\left(kx_2+b-\frac{3}{2}\right)=2(x_1-1)(x_2-1)$，即 $(k^2-2)x_1x_2+\left(kb-\frac{3}{2}k+2\right)(x_1+x_2)+b^2-3b+\frac{1}{4}=0$，所以 $(k^2-2)\cdot\frac{4b^2-12}{3+4k^2}+\left(kb-\frac{3}{2}k+2\right)\left(-\frac{8kb}{3+4k^2}\right)+b^2-3b+\frac{1}{4}=0$，去分母化简得 $20b^2+64kb+36b+44k^2-99=0$，即 $20b^2+(64k+36)b+(44k^2-99)=20b^2+(64k+36)b+(22k+33)(2k-3)=[10b+(22k+33)][2b+(2k-3)]=0$，

故 $b=-\frac{11}{5}k-\frac{33}{10}$ 或 $b=\frac{3}{2}-k$.

当 $b=-\frac{11}{5}k-\frac{33}{10}$ 时，直线 EF 的方程为 $y=kx-\frac{11}{5}k-\frac{33}{10}=k\left(x-\frac{11}{5}\right)-\frac{33}{10}$，直线 EF 恒过定点 $\left(\frac{11}{5},-\frac{33}{10}\right)$；

当 $b=\frac{3}{2}-k$ 时，直线 EF 的方程为 $y=kx+\frac{3}{2}-k=k(x-1)+\frac{3}{2}$，直线 EF 恒过定点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$，此点与 A 点重点，不符合题意，舍去. 综上所述，直线 EF 恒过定点 $\left(\frac{11}{5},-\frac{33}{10}\right)$.

培优专训（七） 圆锥曲线中的交汇、创新问题

1. 解：(1)由题可得，直线族 $mx+ny=1(m,n\in\mathbf{R})$ 为圆 M 的切线，故圆心到直线族中直线的距离 $d_1=\frac{|m\cdot0+n\cdot3-1|}{\sqrt{m^2+n^2}}=2$，所以 m,n 满足 $5n^2-4m^2-6n+1=0$.

(2)将点 $N(x_0,y_0)$ 的坐标代入 $y=tx-t^2(t\in\mathbf{R})$，可得关于 t 的方程 $t^2-x_0t+y_0=0$，因为点 $N(x_0,y_0)$ 不在直线族 $y=tx-t^2(t\in\mathbf{R})$ 的任意一条直线上，所以方程 $t^2-x_0t+y_0=0$ 无实数解，所以 $\Delta=x_0^2-4y_0<0$，故 $y_0>\frac{x_0^2}{4}$，所以 $y_0>0$. 因为区域 $y_0>\frac{x_0^2}{4}$ 的边界为抛物线 $x^2=4y$，所以 $x^2=4y$ 是直线族 Ω：$y=tx-t^2(t\in\mathbf{R})$ 的包络曲线.

证明：联立 $y=tx-t^2(t\in\mathbf{R})$ 与 $x^2=4y$，可得 $x^2-4tx+4t^2=0$，所以 $\Delta=0$，故直线 $y=tx-t^2(t\in\mathbf{R})$ 为抛物线 $x^2=4y$ 的切线. 因此直线族 Ω 的包络曲线 E 的方程为 $x^2=4y$.

(3)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(2u,u^2)$，则 $k_{PA}=\frac{y_1-u^2}{x_1-2u}=\frac{x_1+2u}{4}$，故 PA：$(x_1+2u)x-4y-2ux_1=0$，

由直线 PA 与圆 M 相切，得点 M 到直线 PA 的距离 $d_2=\frac{|12+2ux_1|}{\sqrt{(x_1+2u)^2+16}}=2$，

整理得 $(u^2-1)y_1+2ux_1+5-u^2=0$，同理可得 $(u^2-1)y_2+2ux_2+5-u^2=0$，所以直线 AB：$(u^2-1)y+2ux+5-u^2=0$.

联立直线 AB 与曲线 E 的方程得 $\begin{cases}(u^2-1)y+2ux+5-u^2=0,\\x^2=4y\end{cases}$（显然 $u^2\neq1$），可得 $x^2+\frac{8ux}{u^2-1}+\frac{20-4u^2}{u^2-1}=0$，

由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-\frac{8u}{u^2-1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{20-4u^2}{u^2-1}$.

因此 $|AB|=\frac{4(u^2+1)\sqrt{u^4-2u^2+5}}{(u^2-1)^2}$.

因为点 $P(2u,u^2)$ 到直线 AB 的距离 $d_3=\frac{u^4+2u^2+5}{u^2+1}$，所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{2\sqrt{u^4-2u^2+5}}{(u^2-1)^2}\times(u^4+2u^2+5)$，

令 $u^2-1=m$，则 $S_{\triangle PAB}=2\left(m+\frac{8}{m}+4\right)\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}$，令 $f(m)=2\left(m+\frac{8}{m}+4\right)\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}$，$m\geqslant-1$，由 $f'(m)=2\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}\frac{(m-4)(m^3+4m^2+8m+16)}{m^4+4m^2}=0$，$m\geqslant-1$，解得 $m=4$，当 $m\in(-1,4)$ 时，$f'(m)<0$，当 $m\in(4,+\infty)$ 时，$f'(m)>0$，所以 $f(m)$ 在 $(-1,4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，所以 $(S_{\triangle PAB})_{\min}=f(4)=10\sqrt{5}$（当且仅当 $u^2=5$ 时取等号），所以 $\triangle PAB$ 面积的最小值为 $10\sqrt{5}$.

2. 解：(1)设 E 的焦距为 $2c$，设 n 与 E 交于点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

①当 n 与 x 轴重合时，显然 $|AB|=2a$；

②当 n 不与 x 轴重合时，设 n：$x=ty+c$，联立 $\begin{cases}x=ty+c,\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 整理得 $(b^2t^2+a^2)y^2+2b^2cty-b^4=0$，则 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2b^2ct}{b^2t^2+a^2},\\y_1y_2=-\frac{b^4}{b^2t^2+a^2},\end{cases}$

所以 $|AB|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2a(t^2+1)}{t^2+\frac{a^2}{b^2}}=2a\left(1-\frac{\frac{c^2}{b^2}}{t^2+\frac{a^2}{b^2}}\right)$，

则有 $|AB|\in\left[\frac{2b^2}{a},2a\right)$. 因此有 $\frac{2b^2}{a}=3$，$2a=4$，解得 $a=2,b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)(i)设点 $D(x_0,y_0)$ 为曲线 C 上任意一点，由条件知 $m\neq0$，则有 $y=(1-x^m)^{\frac{1}{m}}$，$y'=\frac{-x^{m-1}}{(1-x^m)^{\frac{m-1}{m}}}=-\frac{x^{m-1}}{y^{m-1}}$，则点 D 处切线 l 的方程为 $y-y_0=-\frac{x_0^{m-1}}{y_0^{m-1}}(x-x_0)$.

设切线 l 分别交 x,y 轴于点 I,J，令 $y=0$，解得 $x=\frac{y_0^m}{x_0^{m-1}}+x_0=\frac{1}{x_0^{m-1}}$，即为 I 的横坐标.

令 $x=0$，解得 $y=\frac{x_0^m}{y_0^{m-1}}+y_0=\frac{1}{y_0^{m-1}}$，即为 J 的纵坐标，

则有 $|IJ|=\sqrt{x_0^{2-2m}+y_0^{2-2m}}$ 为定值，

则只能有 $x_0^{2-2m}+y_0^{2-2m}=x_0^m+y_0^m=1$，则 $2-2m=m$，解得 $m=\frac{2}{3}$，否则，$x_0^{2-2m}+y_0^{2-2m}$，$x_0^m+y_0^m$ 均为定值，则其解有限，矛盾，此时有 $|IJ|=1$，故 l 被 C 截得的线段长为 1.

(ii)设切线 l 与椭圆交于 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，此时令 $k=\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}>0$，则切线 l 的方程为 $y-y_0=-k(x-x_0)$.

将 l 的方程与 E 的方程联立，得 $\begin{cases}y-y_0=-k(x-x_0),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 故 $(3+4k^2)x^2-8k(y_0+kx_0)x+4(y_0+kx_0)^2-12=0$，

则有 $\begin{cases}x_3+x_4=\frac{8k(y_0+kx_0)}{3+4k^2},\\x_3x_4=\frac{4[(y_0+kx_0)^2-3]}{3+4k^2},\end{cases}$

因此 $|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_3-x_4|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\sqrt{3+4k^2-(y_0+kx_0)^2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\sqrt{3+4k^2-\frac{(y_0+kx_0)^2}{(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})^3}}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\sqrt{3+4k^2-\frac{(k^3+k)^2}{(k^2+1)^3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3+4k^2}\sqrt{(3+4k^2)(k^2+1)-k^2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^4+6k^2+3}}{3+4k^2}=4\sqrt{3}\sqrt{\frac{4k^4+6k^2+3}{16k^4+24k^2+9}}=2\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{3}{16k^4+24k^2+9}}$，

因为 $k>0$，所以 $16k^4+24k^2+9>9$，

则 $1<1+\frac{3}{16k^4+24k^2+9}<\frac{4}{3}$，

所以 $2\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{3}{16k^4+24k^2+9}}\in(2\sqrt{3},4)$，即 $|MN|\in(2\sqrt{3},4)$，

即所求范围为 $(2\sqrt{3},4)$.

3. 解：(1)依题意设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，则 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\c=\sqrt{3},\\a^2+b^2=c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\b=1,\\c=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

(2)①当直线 l_1,l_2 中有一条直线的斜率为 0，另一条直线的斜率不存在时，直线 MN 与 x 轴重合，不符合题意，

所以直线 l_1,l_2 的斜率均存在且不为 0.

设 l_1 的方程为 $y=k(x-p_n)(k\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，由 $\begin{cases}y=k(x-p_n),\\\frac{x^2}{2}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1-2k^2)x^2+4k^2p_nx-2k^2p_n^2-2=0$，

则 $1-2k^2\neq0$，所以 $x_1+x_2=\frac{-4k^2p_n}{1-2k^2}$，$x_1x_2=\frac{-2k^2p_n^2-2}{1-2k^2}$，所以 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2k^2p_n}{1-2k^2}$，则 $y_M=k(x_M-p_n)=k\left(\frac{-2k^2p_n}{1-2k^2}-p_n\right)=\frac{-kp_n}{1-2k^2}$，

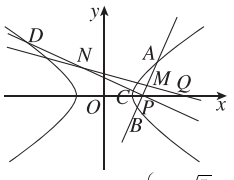
所以 $M\left(\frac{-2k^2p_n}{1-2k^2},\frac{-kp_n}{1-2k^2}\right)$，

同理可得 $N\left(\frac{-2p_n}{k^2-2},\frac{kp_n}{k^2-2}\right)$.

因为 M,N,Q 三点共线，所以 $y_N(x_N-x_M)=(y_N-y_M)(x_N-t_n)$，又 $y_N-y_M\neq0$，所以 $t_n=\frac{x_My_N-x_Ny_M}{y_N-y_M}=\frac{\frac{-2k^2p_n}{1-2k^2}\cdot\frac{kp_n}{k^2-2}-\frac{-2p_n}{k^2-2}\cdot\frac{-kp_n}{1-2k^2}}{\frac{kp_n}{k^2-2}-\frac{-kp_n}{1-2k^2}}=2p_n$，

因为 $p_n=2^n$，所以 $t_n=2^{n+1}$.

②$a_n=|PQ|=|2^n-2^{n+1}|=2^n$，所以 $\sum_{k=1}^{2n}[b_{k+1}-(-1)^kb_k]a_k=\sum_{k=1}^{n}\{[b_{2k}-(-1)^{2k-1}b_{2k-1}]a_{2k-1}+[b_{2k+1}-(-1)^{2k}b_{2k}]a_{2k}\}=\sum_{k=1}^{n}[(4k-1+4k-3)\times2^{2k-1}+(4k+1-4k+1)\times2^{2k}]=\sum_{k=1}^{n}k\times2^{2k+2}=\sum_{k=1}^{n}k\times4^{k+1}$. 设 $T_n=\sum_{k=1}^{n}k\times4^{k+1}$，则 $T_n=1\times4^2+2\times4^3+3\times4^4+\cdots+n\times4^{n+1}$，所以 $4T_n=1\times4^3+2\times4^4+3\times4^5+\cdots+n\times4^{n+2}$，所以 $-3T_n=4^2+4^3+4^4+\cdots+4^{n+1}-n\times4^{n+2}=\frac{16(1-4^n)}{1-4}-n\times4^{n+2}=\frac{-16-(3n-1)\times4^{n+2}}{3}$，所以 $T_n=\frac{16+(3n-1)\times4^{n+2}}{9}$，所以 $\sum_{k=1}^{2n}[b_{k+1}-(-1)^kb_k]a_k=\frac{16+(3n-1)\times4^{n+2}}{9}$.



4. 解：(1)由题意得 $\begin{cases}c=\sqrt{5},\\\frac{b}{a}=2,\\a^2+b^2=c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2,\\c=\sqrt{5},\end{cases}$ 所以双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)(i)证明：设斜率为4，与双曲线右支相交于 A_k,B_k 两点的直线方程为 $y=4x+m_k$，其中 $1\leqslant k\leqslant n,k,n\in\mathbf{N}^*$，

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{4}=1,\\y=4x+m_k,\end{cases}$ 消去 y 可得 $12x^2+8m_kx+m_k^2+4=0$，该方程有两个正根，

由 $\begin{cases}\Delta>0,\\\frac{-8m_k}{12}>0,\end{cases}$ 解得 $m_k<-2\sqrt{3}$，

由根与系数的关系得 $x_{A_k}+x_{B_k}=-\frac{2m_k}{3}$，$x_{A_k}x_{B_k}=\frac{m_k^2+4}{12}$.

直线 A_kP_k 的方程为 $y-y_{A_k}=-2(x-x_{A_k})$，而 $y_{A_k}=4x_{A_k}+m_k$，即 $y=-2x+6x_{A_k}+m_k$，直线 B_kP_k 的方程为 $y-y_{B_k}=2(x-x_{B_k})$，而 $y_{B_k}=4x_{B_k}+m_k$，即 $y=2x+2x_{B_k}+m_k$，

由 $\begin{cases}y=-2x+6x_{A_k}+m_k,\\y=2x+2x_{B_k}+m_k,\end{cases}$ 得 $y_{P_k}=3x_{A_k}+x_{B_k}+m_k$，所以 $x_{P_k}=\frac{3x_{A_k}-x_{B_k}}{2}$，根据 $x_{A_k}+x_{B_k}=-\frac{2m_k}{3}$，易得 $x_{P_k}=y_{P_k}$，即 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都在直线 $y=x$ 上，所以 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 共线.

(ii)$|OP_i|^2-|P_iP_{i+1}|^2(1\leqslant i\leqslant n-1,i\in\mathbf{N}^*)$ 为定值，定值为 $\frac{8}{3}$，理由如下：

由(i)可设 P_i 的坐标为 (x_i,x_i)，因为点 P_i 在直线 $A_{i+1}B_{i+1}$ 上，所以 $m_{i+1}=-3x_i$，直线 $A_{i+1}B_{i+1}$ 的方程为 $y=4x-3x_i$，根据(i)中的计算，得 $x_{A_{i+1}}+x_{B_{i+1}}=2x_i$，$x_{A_{i+1}}x_{B_{i+1}}=\frac{9x_i^2+4}{12}$，$x_{i+1}=\frac{3x_{A_{i+1}}-x_{B_{i+1}}}{2}$，$|OP_i|^2=(\sqrt{2}x_i)^2=2x_i^2$，$|P_iP_{i+1}|^2=[\sqrt{2}(x_{i+1}-x_i)]^2=2(x_{i+1}-x_i)^2=2\left(\frac{3x_{A_{i+1}}-x_{B_{i+1}}}{2}-\frac{x_{A_{i+1}}+x_{B_{i+1}}}{2}\right)^2=2(x_{A_{i+1}}-x_{B_{i+1}})^2=2(x_{A_{i+1}}+x_{B_{i+1}})^2-8x_{A_{i+1}}x_{B_{i+1}}=2(2x_i)^2-8\times\frac{9x_i^2+4}{12}=2x_i^2-\frac{8}{3}$，

所以 $|OP_i|^2-|P_iP_{i+1}|^2=\frac{8}{3}$.

第九单元　统计

第57讲　随机抽样

1. B　[解析] 12个班，每班抽取10人，共抽取120人，所以样本量是120. 故选B.
2. A　[解析] 对于①，考试成绩在不同分数段之间的同学有明显的差异，用分层随机抽样比较恰当；对于②，总体包含的个体较少，用简单随机抽样比较恰当. 故选A.
3. D　[解析] 从第1行的第6列和第7列数字开始由左向右依次选取两个数，符合条件的编号依次有23,20,26,24,25,19,03,…，故第6个个体的编号为19. 故选D.
4. C　[解析] 由简单随机抽样的定义，知每个个体被抽到的可能性相等，故高一(5)班和高一(6)班被抽到的可能性均为 $\frac{3}{10}$. 故选C.
5. ABD　[解析] 依题意，$\frac{90}{n}=\frac{3}{5+2+3}$，解得 $n=300$，则抽到的老年旅客人数为 $\frac{5}{5+2+3}\times300=150$，抽到的中年旅客人数为 $\frac{2}{5+2+3}\times300=60$. 对于A，抽到的老年旅客和中年旅客人数之和为210，A正确；对于B，$n=300$，B正确；对于C，中年旅客抽到60人，C错误；对于D，老年旅客抽到150人，D正确. 故选ABD.
6. 96　[解析] 由已知得女生与男生的人数之比为52∶48，则男生应抽取的人数为 $200\times\frac{48}{100}=96$.
7. 3.5　[解析] 设B类样本的平均数为x，则 $\frac{10\times5.5+30x}{40}=4$，解得 $x=3.5$.
8. B　[解析] 因为在抽签法抽样、随机数法抽样和分层随机抽样中，每个个体被抽中的概率均为 $\frac{n}{N}$，所以 $p_1=p_2=p_3$. 故选B.
9. B　[解析] 甲、乙、丙、丁四个乡镇的人口数量之比为4∶3∶3∶2，因为样本中甲乡镇的人数比乙乡镇的人数多20，所以 $\frac{4n}{4+3+3+2}-\frac{3n}{4+3+3+2}=20$，解得 $n=240$. 故选B.
10. AB　[解析] 根据抽样结果，此次抽样可能采用的是抽签法，故A正确；若按性别采用比例分配的分层随机抽样方法，则抽得的男生、女生人数分别为4,3，所以这次抽样不可能是按性别采用比例分配的分层随机抽样方法，故B正确；若按抽签法，则每个男生被抽到的概率和每个女生被抽到的概率均相等，故C,D错误. 故选AB.
11. ABD　[解析] A选项，抽查的样本中女职工人数为 $90\times\frac{450-150}{450}=60$，A选项正确. B选项，男职工平均体重为63千克，女职工平均体重为54千克，所以该单位男职工的体重普遍比女职工重，B选项正确. C选项，估计该单位职工平均体重为 $\frac{150}{450}\times63+\frac{450-150}{450}\times54=57$(千克)，C选项错误. D选项，每一位男或女职工被抽中的可能性均为 $\frac{90}{450}=\frac{1}{5}$，D选项正确. 故选ABD.
12. 120　[解析] 因为从7～12岁年龄段回收了180份问卷，而样本在7～12岁年龄段的问卷中抽取了60份，所以抽样比为 $\frac{1}{3}$. 因为样本容量为300，所以回收的问卷总数为 $300\div\frac{1}{3}=900$(份)，可得 $x=900-120-180-240=360$，所以在16～18岁年龄段的问卷中抽取的份数为 $360\times\frac{1}{3}=120$.
13. 204　28　[解析] 依题意，设A生产线产品的样本为 $x_i(i=1,2,\cdots,8)$，平均数为 $\overline{x}=210$，B生产线产品的样本为 $y_j(j=1,2,\cdots,12)$，平均数为 $\overline{y}=200$，两生产线的总样本为 $z_k(k=1,2,\cdots,20)$，平均数为 $\overline{z}$，则 $\overline{z}=\frac{8\overline{x}+12\overline{y}}{20}=\frac{8\times210+12\times200}{20}=204$. $s_A^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i^2-\overline{x}^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i^2-210^2=4$，$s_B^2=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12}y_j^2-\overline{y}^2=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12}y_j^2-200^2=4$，所以 $\sum_{i=1}^{8}x_i^2=8\times(4+210^2)$，$\sum_{j=1}^{12}y_j^2=12\times(4+200^2)$，所以 $s^2=\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}z_k^2-\overline{z}^2=\frac{1}{20}\times\left(\sum_{i=1}^{8}x_i^2+\sum_{j=1}^{12}y_j^2\right)-204^2=\frac{1}{20}\times[8\times(4+210^2)+12\times(4+200^2)]-204^2=28$.
14. AC　[解析] 因为掷出点数为3的倍数的概率为 $\frac{1}{3}$，所以理论上回答问题一的人数为 $150\times\frac{1}{3}=50$. 掷出点数为奇数的概率为 $\frac{1}{2}$，理论上回答问题一的50人中有25人回答“是”，故回答问题二的学生中回答“是”的人数为30－25＝5. 对于A，抽样调查的这150名学生中，约有50人回答问题一，故A正确. 对于B，抽样调查的这150名学生中，约有5人迷恋电子游戏，故B错误. 对于C,D，理论上，抽样调查的150名学生中，50名学生回答问题一，100名学生回答问题二，回答问题二的学生中有5名学生回答“是”，故该校迷恋电子游戏的学生约占 $\frac{5}{100}=5\%$，故C正确，D错误. 故选AC.
15. ABD　[解析] 不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$，$y_1\leqslant y_2\leqslant y_3\leqslant y_4\leqslant y_5$. 对于A，

由比例分配的分层随机抽样的概念可知，甲班男生和女生人数相等，所以甲班参加数学调研测试的人数为 $10\div20\%=50$，所以 A 正确；对于 B，两组成绩 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 和 y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 的中位数分别为 x_3,y_3，则 $x_3=y_3=a$，又因为样本成绩排序时，x_3,y_3 前面有四个，后面有四个，所以样本成绩的中位数为 $\frac{x_3+y_3}{2}=x_3=y_3=a$，所以样本中位数为 a，所以 B 正确；对于 C，样本平均数 $\overline{z}=\frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{5}x_i+\sum_{j=1}^{5}y_j\right)=\frac{1}{10}(5\overline{x}+5\overline{y})=\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$，所以 C 错误；对于 D，样本方差 $s^2=\frac{1}{10}\times\{5[s_1^2+(\overline{x}-\overline{z})^2]+5[s_1^2+(\overline{y}-\overline{z})^2]\}=s_1^2+\frac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{4}>s_1^2(\overline{x}\neq\overline{y})$，所以 D 正确. 故选 ABD.

第 58 讲　用样本估计总体

1. B　[解析] 鞋店经理最关心的是哪个鞋号的日销量最大，所以最重要的是众数. 故选 B.

2. C　[解析] 由频率分布直方图可知，$0.1+10a+0.45+10a+0.05=20a+0.6=1$，解得 $a=0.020$. 故选 C.

3. B　[解析] 10 名学生成绩从低到高依次为 75,80,85,85,90,90,95,95,100,105，且 $10\times60\%=6$，故 60% 分位数为第 6 个数和第 7 个数的平均数 $\frac{90+95}{2}=92.5$. 故选 B.

4. B　[解析] 由图可知，5 个时刻温度的极差为 $9-2=7$，故 A 中说法正确；中位数为 4，故 B 中说法错误；平均温度为 $\frac{1}{5}\times(2+3+4+7+9)=5$(℃)，故 C 中说法正确；比较几个数值可知下午 17 时温度最高，故 D 中说法正确. 故选 B.

5. ACD　[解析] 对于 A，由图知，每一组中的成绩占比都是以各自班级的总人数为基数的，所以每一组中的甲班、乙班人数不能从所占的百分比来判断，故 A 中说法错误；对于 B,C，由图可知甲班考生成绩主要集中在[80,90)，乙班考生成绩主要集中在[60,70)，故 B 中说法正确，C 中说法错误；对于 D，由图可知甲班考生成绩的极差和乙班考生成绩的极差的大小无法确定，故 D 中说法错误. 故选 ACD.

6. 240　[解析] 由频率分布直方图估计，该校体重(单位：kg)在区间[70,78]内的男生的人数为 $2000\times(0.02+0.01)\times4=240$.

7. ①②④　[解析] 图(1)的频率分布直方图是对称的，所以平均数＝中位数＝众数，故①正确；图(2)众数最小，右边“拖尾”平均数大于中位数，故②正确，③错误；图(3)左边“拖尾”众数最大，平均数小于中位数，故④正确. 故填①②④.

8. B　[解析] 对于 A，该部门一年中请假天数为 0 的人数为 $30-6-3-4-4-3=10$，A 中说法正确. 对于 B，该部门一年中请假天数大于 5 的人数为 $4+4+3=11$，B 中说法错误. 对于 C，因为 $30\times40\%=12$，且请假天数为 0 的人数为 10，请假天数为 4 的人数为 6，所以这 30 名员工一年中请假天数的第 40 百分位数为 4，C 中说法正确. 对于 D，这 30 名员工一年中请假天数的平均数为 $\frac{1}{30}\times(4\times6+5\times3+6\times4+7\times4+8\times3)=\frac{23}{6}<4$，D 中说法正确. 故选 B.

9. D　[解析] 对于 A，第一次月考数学成绩占 16%，第二次月考数学成绩占 17%，且第一次月考总分低于第二次月考总分，所以第二次月考数学成绩比第一次月考数学成绩要高，故 A 错误；对于 B，第一次月考政治成绩占 17%，第二次月考政治成绩占 16%，由于只知道第一次月考总分低于第二次月考总分，故无法判断这两次月考政治学科成绩的变化，故 B 错误；对于 C，第一次月考化学成绩占 16%，第二次月考化学成绩占 17%，且第一次月考总分低于第二次月考总分，所以第二次月考化学成绩比第一次月考化学成绩要高，故 C 错误；对于 D，第一次月考语文成绩占 16%，第二次月考语文成绩占 18%，且第一次月考总分低于第二次月考总分，所以第二次月考语文成绩比第一次月考语文成绩要高，故 D 正确. 故选 D.

10. AC　[解析] 依题意，$(0.015+0.025+0.035+0.005+2a)\times10=1$，解得 $a=0.010$. 对于 A，∵最高小矩形的中点的横坐标为 75，∴估计众数是 75，故 A 正确. 对于 B，设样本的 71% 分位数为 x，又 $10\times(0.010+0.015+0.025)=0.5$，∴$0.5+(x-70)\times0.035=0.71$，解得 $x=76$，故 B 错误. 对于 C，估计平均数为 $45\times0.1+55\times0.15+65\times0.25+75\times0.35+85\times0.1+95\times0.05=68.5$，故 C 正确. 对于 D，样本中得分低于 60 分的占 $(0.010+0.015)\times10\times100\%=25\%$，∴估计该校学生中得分低于 60 分的占 25%，故 D 错误. 故选 AC.

11. AD　[解析] 对于 A，4 个北方城市的环比数据的极差为 $99.7-99.5=0.2$，4 个南方城市的环比数据的极差为 $99.8-99.5=0.3$，所以 4 个北方城市的环比数据的极差小于 4 个南方城市的环比数据的极差，故 A 正确；对于 B，4 个北方城市的环比数据的均值为 $\frac{99.5+99.6+99.6+99.7}{4}=99.6$，4 个南方城市的环比数据的均值为 $\frac{99.5+99.5+99.6+99.8}{4}=99.6$，所以 4 个北方城市的环比数据的均值与 4 个南方城市的环比数据的均值相等，故 B 错误；对于 C，4 个北方城市的环比数据的方差为 $\frac{1}{4}\times[(99.5-99.6)^2+(99.6-99.6)^2+(99.6-99.6)^2+(99.7-99.6)^2]=0.005$，4 个南方城市的环比数据的方差为 $\frac{1}{4}\times[(99.5-99.6)^2+(99.5-99.6)^2+(99.6-99.6)^2+(99.8-99.6)^2]=0.015$，所以 4 个北方城市的环比数据的方差小于 4 个南方城市的环比数据的方差，故 C 错误；对于 D，4 个北方城市的环比数据的中位数为 99.6，4 个南方城市的环比数据的中位数为 $\frac{99.5+99.6}{2}=99.55$，所以 4 个北方城市的环比数据的中位数大于 4 个南方城市的环比数据的中位数，故 D 正确. 故选 AD.

12. 3　4　[解析] 因为数据 $4x_1,4x_2,\cdots,4x_{12}$ 的中位数为 16，方差为 64，所以数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{12}$ 的中位数为 4，方差为 $\frac{64}{4^2}=4$，所以数据 $x_1-1,x_2-1,\cdots,x_{12}-1$ 的中位数为 $4-1=3$，方差为 4.

13. $\frac{14}{9}$　[解析] 根据题意，数据 $1,3,4,x,y,y+2$ 的平均数为 $\frac{1+3+4+x+y+y+2}{6}$，数据 $1,3,4,x,y,y+2$ 的 50% 分位数为 $\frac{4+x}{2}$，∴$\frac{1+3+4+x+y+y+2}{6}=\frac{4+x}{2}$，即 $y=x+1$，代入数据 $x,y,y+2$，即为 $x,x+1,x+3$，此组数据的平均数为 $\frac{x+x+1+x+3}{3}=x+\frac{4}{3}$，∴数据 $x,y,y+2$ 的方差为 $\frac{1}{3}\left[\left(x-x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(x+1-x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(x+3-x-\frac{4}{3}\right)^2\right]=\frac{1}{3}\times\left(\frac{16}{9}+\frac{1}{9}+\frac{25}{9}\right)=\frac{14}{9}$.

14. 解：(1)由题意得 $\overline{x}_1=\frac{1}{10}\times(5.2+4.8+4.8+5.0+5.0+5.2+5.1+4.8+5.1+5.0)=5.0$，$\overline{x}_2=\frac{1}{10}\times(5.0+5.2+5.3+5.1+5.4+5.2+5.2+5.3+5.2+5.1)=5.2$，$s_2^2=\frac{1}{10}\times(4\times0.1^2+2\times0.2^2)=0.012$.

(2)由(1)可得 $\overline{x}_2-\overline{x}_1=5.2-5.0=0.2=\sqrt{0.04}$，$\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}=\sqrt{\frac{0.022+0.012}{10}}=\sqrt{0.0034}$，因为 $\sqrt{0.04}>\sqrt{0.0034}$，所以 $\overline{x}_2-\overline{x}_1\geqslant\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$ 成立，故新生产线生产的零件质量较旧生产线生产的零件质量有显著提高.

15. 解：(1)由男生自主体育锻炼时间的频率折线图可得，$m=1-0.04-0.20-0.24-0.16=0.36$.

由女生自主体育锻炼时间的频数折线图可知，女生共有 $1+4+5+12+3=25$(人)，其中“体育迷”有 $12+3=15$(人)，故男生共有 $100-25=75$(人)，其中“体育迷”有 $75\times(0.24+0.16)=30$(人)，因此估计该校高一年级学生中“体育迷”所占比例为 $\frac{15+30}{100}\times100\%=45\%$.

(2)由折线图可知，男生自主体育锻炼时间在第一段至第五段的频数分别为 $75\times0.04=3$，$75\times0.20=15$，$75\times0.36=27$，$75\times0.24=18$，$75\times0.16=12$，故这 100 名学生每周的自主体育锻炼时间在第一段至第五段的频率分别为 $(1+3)\div100=0.04$，$(4+15)\div100=0.19$，$(5+27)\div100=0.32$，$(12+18)\div100=0.30$，$(3+12)\div100=0.15$，所以估计该校高一年级学生的周平均自主体育锻炼时间为 $1\times0.04+3\times0.19+5\times0.32+7\times0.30+9\times0.15=5.66$.

因为 $5.66>5$，所以估计该校高一年级学生的周平均自主体育锻炼时间达到了保持身体健康发展的水平.

16. ACD　[解析] 原来的中位数与现在的中位数均为 $\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{2x_1+18}{2}=x_1+9$，故中位数不变，故 A 正确；原始数据的极差为 $x_{10}-x_1=18$，新数据的极差为 $x_9-x_2=14$，故极差变小，故 B 错误；由于 $x_i-x_{i-1}=2(2\leqslant i\leqslant10)$，故 $x_2=x_1+2$，$x_3=x_1+4$，…，$x_9=x_1+16$，$x_{10}=x_1+18$，原来的平均数为 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=\frac{10x_1+90}{10}=x_1+9$，去掉 x_1，x_{10} 后的平均数为 $\frac{x_2+x_3+\cdots+x_9}{8}=\frac{8x_1+72}{8}=x_1+9$，平均数不变，故 C 正确；原来的方差为 $\frac{1}{10}\times[(x_1-x_1-9)^2+(x_2-x_1-9)^2+\cdots+(x_{10}-x_1-9)^2]=33$，去掉 x_1,x_{10} 后的方差为 $\frac{1}{8}\times[(x_2-x_1-9)^2+(x_3-x_1-9)^2+\cdots+(x_9-x_1-9)^2]=21$，方差变小，故 D 正确. 故选 ACD.

17. 解：(1)由题意可知，题图①中第一个矩形面积为 $0.04>2.8\%=0.028$，可知 $80<k<90$，可得 $(k-80)\times0.004=2.8\%=0.028$，解得 $k=87$，

所以错检率 $g(87)=0.006\times(90-87)+10\times0.004=0.058=5.8\%$.

(2)当 $80\leqslant k<90$ 时，$f(k)=0.004\times(k-80)=0.004k-0.320$，$g(k)=0.006\times(90-k)+10\times0.004=0.580-0.006k$，

可得 $h(k)=f(k)+g(k)=-0.002k+0.260$，易知 $0.080<h(k)\leqslant0.100$；

当 $90\leqslant k\leqslant100$ 时，则 $f(k)=0.004\times10+0.026\times(k-90)=0.026k-2.300$，

$g(k)=0.004\times(100-k)=0.4-0.004k$，可得 $h(k)=f(k)+g(k)=0.022k-1.900$，易知 $0.080\leqslant h(k)\leqslant 0.300$.

所以 $h(k)=\begin{cases}-0.002k+0.260, & 80\leqslant k<90,\\ 0.022k-1.900, & 90\leqslant k\leqslant 100,\end{cases}$ 当且仅当 $k=90$ 时，$h(k)$ 取到最小值 0.080.

第 59 讲　成对数据的统计分析

1. C　[解析] 若 r 为正，则两个变量正相关，若 r 为负，则两个变量负相关. $|r|$ 越接近 1，表明两个变量线性相关程度越强，$|r|$ 越接近 0，表明两个变量线性相关程度越弱. 故选 C.

2. A　[解析] 由题意可得 $\begin{cases}a+21=73,\\ a+2=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=52,\\ b=54,\end{cases}$ 所以 a,b 的值分别为 52，54. 故选 A.

3. D　[解析] 残差平方和越小，说明模型的拟合效果越好，显然 D 选项的拟合效果最好. 故选 D.

4. A　[解析] 由题知 $\chi^2=\dfrac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.822$. 因为 $7.822<10.828=x_{0.001}$，所以根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，可以认为是否爱好跳绳与性别无关联，故 A 正确，B 错误；因为 $7.822<7.879=x_{0.005}$，所以根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，可以认为是否爱好跳绳与性别无关联，故 C 错误；因为 $7.822>6.635=x_{0.01}$，所以根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，可以认为是否爱好跳绳与性别有关联，故 D 错误. 故选 A.

5. A　[解析] 由一次函数、二次函数及指数函数的性质可知，B，C，D 不符合散点的变化趋势. 由散点图分布可知，散点图分布在一个幂函数的图象附近，因此，最适宜作为雨滴的末速度 v 与直径 d 的经验回归方程类型的是 $v=a+b\sqrt{d}$. 故选 A.

6. 3.968　[解析] 补全列联表：

单位：名

呼吸系统健康状况	工作场所		合计
	室外工作	室内工作	
有呼吸系统疾病	150	200	350
无呼吸系统疾病	50	100	150
合计	200	300	500

则 $\chi^2=\dfrac{500\times(150\times100-200\times50)^2}{350\times150\times200\times300}\approx3.968$.

7. 0.96　[解析] 令 $x=175$，得 $\hat{y}=63.04$，所以残差为 $64-63.04=0.96$.

8. C　[解析] 设被调查的男性人数为 x，则女性人数为 $2x$，根据题意可得列联表如下：

单位：人

态度	性别		合计
	男	女	
喜爱足球	$\frac{5x}{6}$	$\frac{2x}{3}$	$\frac{3x}{2}$
不喜爱足球	$\frac{x}{6}$	$\frac{4x}{3}$	$\frac{3x}{2}$
合计	x	$2x$	$3x$

则 $\chi^2=\dfrac{3x\left(\frac{5x}{6}\cdot\frac{4x}{3}-\frac{2x}{3}\cdot\frac{x}{6}\right)^2}{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot x\cdot2x}=\dfrac{2x}{3}$，因为根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，认为是否喜爱足球与性别有关联，所以 $\chi^2\geqslant7.879=x_{0.005}$，即 $\dfrac{2x}{3}\geqslant7.879$，解得 $x\geqslant11.818\,5$，又因为列联表中的所有数据均为整数，所以 x 的最小值为 12. 故选 C.

9. C　[解析] 因为经验回归直线必过点 $(\overline{x},\overline{y})$，$\overline{x}=9$，所以 $\overline{y}=-1.4\overline{x}+20.6=8=\dfrac{a+10+6+4}{4}$，解得 $a=12$，所以选项 A 错误；由经验回归方程可知，变量 x,y 负相关，所以选项 B 错误；样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{4}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{(-3)\times4+(-1)\times2+1\times(-2)+3\times(-4)}{\sqrt{9+1+1+9}\times\sqrt{16+4+4+16}}=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，所以选项 C 正确，选项 D 错误. 故选 C.

10. BCD　[解析] 设男生人数为 x，则女生人数为 $x+20$，由题得 $x+x+20=180$，解得 $x=80$，即在被调查者中，男生、女生人数分别为 80，100，可得到如下 2×2 列联表.

单位：人

性别	锻炼情况		合计
	经常锻炼	不经常锻炼	
男	48	32	80
女	40	60	100
合计	88	92	180

对于 A，由表可知，A 显然错误；对于 B，男生中经常锻炼的人数比女生中经常锻炼的人数多 $48-40=8$，B 正确；对于 C，在经常锻炼者中男生的频率为 $\dfrac{48}{88}\approx0.545\,5$，在不经常锻炼者中男生的频率为 $\dfrac{32}{92}\approx0.347\,8$，$\dfrac{0.545\,5}{0.347\,8}\approx1.6$，C 正确；对于 D，零假设为 H_0：假期中学生是否经常锻炼与性别无关联，则 $\chi^2=\dfrac{180\times(48\times60-32\times40)^2}{80\times100\times88\times92}\approx7.115>6.635=x_{0.01}$，根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为假期中学生是否经常锻炼与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.01，D 正确. 故选 BCD.

11. ABD　[解析] 对于 A，因为经验回归直线的斜率大于 0，所以变量 x,y 具有正相关关系，故 A 正确；对于 B，因为 $2.5<3$，所以随 x 值增加相关变量 y 值的增加速度变小，故 B 正确；对于 C，将 $\overline{x}=3$ 代入 $\hat{y}=3x-3$ 得 $\overline{y}=6$，则去掉两个离群点后，得到的新的相关变量的平均值分别为 $\overline{X}=\dfrac{3\times8}{6}=4$，$\overline{Y}=\dfrac{6\times8}{6}=8$，所以重新求得的经验回归方程对应的直线一定过点 $(4,8)$，故 C 错误；对于 D，$\hat{a}=8-2.5\times4=-2$，此时的经验回归方程为 $\hat{y}=2.5x-2$，故 D 正确. 故选 ABD.

12. 35　[解析] 设男生人数为 x，则女生人数为 $3x$，所以女生中喜欢羽毛球运动的人数为 $\dfrac{6}{5}x$，男生中喜欢羽毛球运动的人数为 $\dfrac{3}{5}x$，所以得到的列联表如下：

单位：人

是否喜欢羽毛球运动	性别		合计
	男	女	
喜欢	$\frac{3}{5}x$	$\frac{6}{5}x$	$\frac{9}{5}x$
不喜欢	$\frac{2}{5}x$	$\frac{9}{5}x$	$\frac{11}{5}x$
合计	x	$3x$	$4x$

由 $\chi^2=\dfrac{4x\cdot\left(\frac{27}{25}x^2-\frac{12}{25}x^2\right)^2}{x\cdot3x\cdot\frac{9x}{5}\cdot\frac{11x}{5}}=\dfrac{4x}{33}>3.841=x_{0.05}$，解得 $x>31.688\,25$，又列联表中所有数据均为整数，所以 x 的最小值为 35，故被调查的男生至少有 35 人.

13. e^{-2}　[解析] 由已知可得，$\overline{x}=\dfrac{3+4+6+7}{4}=5$，$\overline{z}=\dfrac{2+2.5+4.5+7}{4}=4$，所以有 $4=1.2\times5+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=-2$，所以 $\hat{z}=1.2x-2$，由 $z=\ln y$，得 $\ln\hat{y}=1.2x-2$，所以 $\hat{y}=e^{1.2x-2}=e^{-2}\cdot e^{1.2x}$，则 $c=e^{-2}$.

14. 解：(1) 由频率分布直方图的性质可得 $0.05+a+b+c+0.35=1$，即 $a+b+c=0.6$，因为 a,b,c 成等差数列，所以 $2b=a+c$，所以 $b=0.2$，

又 $2c=3b$，所以 $c=0.3$，$a=0.1$，

所以 $\overline{x}=7.5\times0.1+8.5\times0.3+9.5\times0.35+10.5\times0.2+11.5\times0.05=9.3$.

(2) 由甲地试验结果的频率分布直方图可得，抗疲劳次数超过 9 万次的零件个数为 $100\times(0.35+0.2+0.05)=60$，不超过 9 万次的个数为 $100-60=40$，由乙地试验结果的频数分布表可得，抗疲劳次数超过 9 万次的零件个数为 $30+25+20=75$，不超过 9 万次的零件个数为 $10+15=25$，所以补全 2×2 列联表如下：

单位：个

地点	质量		合计
	质量不优秀	质量优秀	
甲地	40	60	100
乙地	25	75	100
合计	65	135	200

零假设为 H_0：零件质量与地点无关联，根据列联表中的数据，得 $\chi^2=\dfrac{200\times(40\times75-25\times60)^2}{65\times135\times100\times100}=\dfrac{200}{39}\approx5.128>3.841=x_{0.05}$，根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为零件质量与地点有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.05.

15. 解：(1) 由题意得 $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$，

$\overline{y}=\dfrac{1}{5}\times(10+12+17+20+26)=17$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=295$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=164$，所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{295-5\times3\times17}{\sqrt{55-5\times3^2}\times\sqrt{164}}=\sqrt{\dfrac{40}{41}}>0.75$，因此，$y$ 与 x 有较强的线性相关关系.

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{295-5\times3\times17}{55-45}=4$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=17-4\times3=5$，所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=4x+5$.

(2) 由题意知，100 位购车车主中，男性车主有 70 位，女性车主有 30 位，购置新能源汽车的男性车主有 30 位，购置新能源汽车的女性车主有 15 位.

设 $A=$“一位车主购得新能源汽车”，$B=$“车主是女性”，则一位车主购得新能源汽车，这位车主是女性的概率为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{15}{100}}{\frac{30}{100}+\frac{15}{100}}=\dfrac{1}{3}$.

16. 解：(1) 依据散点图可以判断，$y=e^{bx+a}$ 更适合作为未佩戴头盔人数 y 与 x 日的经验回归方程类型.

(2)由 $Y_i=\ln y_i$，得 $Y=\ln(e^{bx+a})=bx+a$，依题意得 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iY_i-10\overline{x}\,\overline{Y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2}=\dfrac{79.75-10\times5.5\times1.9}{385-10\times5.5^2}=-\dfrac{24.75}{82.5}=-0.3$，$\hat{a}=\overline{Y}-\hat{b}\overline{x}=1.9-(-0.3)\times5.5=3.55$，所以 $\hat{Y}=-0.3x+3.55$，即 $\hat{y}=e^{-0.3x+3.55}$.

(3)零假设为 H_0：市民骑电动自行车是否佩戴头盔与性别无关联.根据列联表中的数据，得 $\chi^2=\dfrac{40\times(8\times6-14\times12)^2}{20\times20\times22\times18}=\dfrac{40\times120\times120}{20\times20\times22\times18}\approx3.636>2.706=x_{0.1}$，根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为市民骑电动自行车是否佩戴头盔与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.1.

第十单元　计数原理、概率、随机变量及其分布

第 60 讲　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

1. C　[解析] 因为每名同学均有 2 门外语课程可以选择，所以不同的选法有 $2\times2\times2=2^3$(种).故选 C.

2. B　[解析] 分 3 类：取一本语文书有 5 种方法，取一本数学书有 4 种方法，取一本英语书有 3 种方法.由分类加法计数原理得，不同的取法有 5+4+3=12(种)，故选 B.

3. B　[解析] 由题意可知，分三步完成：第一步，从 2 种主食中任选一种，有 2 种选法；第二步，从 3 种素菜中任选一种，有 3 种选法；第三步，从 6 种荤菜中任选一种，有 6 种选法.根据分步乘法计数原理，共有 2×3×6=36(种)不同的选取方法，故选 B.

4. D　[解析] 应该分步完成：第一步，因为甲不去北京，所以甲从上海、西安、长沙三个城市中任选一个，有 3 种选法；第二步，乙、丙、丁从北京、上海、西安、长沙四个城市中分别任选一个，有 $4\times4\times4=64$(种)选法.由分步乘法计数原理可得，不同的选法有 3×64=192(种).故选 D.

5. ABD　[解析] 若从东面上山，则上山走法有 2 种，下山走法有 10 种，由分步乘法计数原理可得共有 20 种走法，故 A 正确；若从西面上山，则上山走法有 3 种，下山走法有 9 种，由分步乘法计数原理可得共有 27 种走法，故 B 正确；若从南面上山，则上山走法有 3 种，下山走法有 9 种，由分步乘法计数原理可得共有 27 种走法，故 C 错误；若从北面上山，则上山走法有 4 种，下山走法有 8 种，由分步乘法计数原理可得共有 32 种走法，故 D 正确.故选 ABD.

6. 16　10　[解析] 从 1,5,9,13 中任选一个数作分子，4,8,12,16 中任选一个数作分母，可构造 $4\times4=16$(个)不同的分数.由真分数的定义知，①若 1 为分子，则分母有 4 种选择；②若 5 为分子，则分母有 3 种选择；③若 9 为分子，则分母有 2 种选择；④若 13 为分子，则分母有 1 种选择.所以真分数共有 4+3+2+1=10(个).

7. 48　[解析] 先涂矩形 A，再依次涂矩形 B,C,D，根据分步乘法计数原理，共有 $4\times3\times2\times2=48$(种)涂色方法.

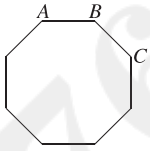
8. D　[解析] 由数字 1,2,3,4 组成的可以有重复数字的三位奇数中，个位数字从两个奇数中选择，十位、百位没有限制，依据分步乘法计数原理，共有 $2\times4\times4=32$(个)，故选 D.

9. C　[解析] 从盒子中每次取出一个小球，共取 3 次，有 $4^3=64$(种)取法，其中取得小球标号的最大值不是 4 的取法有 $3^3=27$(种)，所以取得小球标号的最大值是 4 的取法有 64−27=37(种)，故选 C.

10. D　[解析] 由题意，甲单位不接种需要打三针的重组蛋白疫苗，即甲单位不可预约 C 医院，则甲单位可预约 A,B 两家医院.①若甲单位预约 A 医院，乙单位预约 A 医院，则丙单位可预约 B,C 医院，有 2 种情况；②若甲单位预约 A 医院，乙单位预约 B 或 C 医院，则丙单位可预约 A,B,C 医院，有 $2\times3=6$(种)情况；③若甲单位预约 B 医院，乙单位预约 A 或 C 医院，则丙单位可预约 A,B,C 医院，有 $2\times3=6$(种)情况；④若甲单位预约 B 医院，乙单位预约 B 医院，则丙单位可预约 A,C 医院，有 2 种情况.所以甲单位不接种需要打三针的重组蛋白疫苗的预约方案种数为 2+6+6+2=16.故选 D.

11. BC　[解析] 因为百位上的数字不能为 0，所以组成的三位数的个数为 $4\times4\times3=48$，故 A 错误；将所有三位数的偶数分为两类，①个位数为 0，则有 $4\times3=12$(个)，②个位数为 2 或 4，则有 $2\times3\times3=18$(个)，所以在组成的三位数中，偶数的个数为 12+18=30，故 B 正确；将组成的三位数中的“凹数”分为三类，①十位为 0，则有 $4\times3=12$(个)，②十位为 1，则有 $3\times2=6$(个)，③十位为 2，则有 $2\times1=2$(个)，所以在组成的三位数中，“凹数”的个数为 12+6+2=20，故 C 正确，D 错误.故选 BC.

12. 24　[解析] 梯形的上、下底平行且不相等，如图.若以 AB 为底边，则可构成 2 个梯形，根据对称性可知，此类梯形有 $2\times8=16$(个)；若以 AC 为底边，则可构成 1 个梯形，此类梯形共有 $1\times8=8$(个).所以梯形的个数是 16+8=24.



13. 896　[解析] 集合{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}中的完全平方数有 1,4,9，令 $B=\{1,4,9\}$，$C=\{2,3,5,6,7,8,10\}$，则集合 $B=\{1,4,9\}$ 的非空子集有 $2^3-1=7$(个)，集合 $C=\{2,3,5,6,7,8,10\}$ 的子集有 $2^7=128$(个)，则满足条件的集合 A 为集合 B 的非空子集与集合 C 的子集的并集，故共有 $7\times128=896$(个).

14. 1200　960　[解析] 第一空：若 C,E 的涂色相同，则共有 $5\times4\times3\times2\times3=360$(种)不同的涂色方法；若 C,E 的涂色不相同，则共有 $5\times4\times3\times2\times(1\times3+2\times2)=840$(种)不同的涂色方法.故共有 360+840=1200(种)不同的涂色方法.第二空：因为区域 D 不能涂甲颜色，所以区域 D 的涂色方法有 4 种.若 C,E 的涂色相同，则共有 $4\times4\times3\times3\times2=288$(种)不同的涂色方法；若 C,E 的涂色不相同，则共有 $4\times4\times3\times2\times(1\times3+2\times2)=672$(种)不同的涂色方法.故共有 288+672=960(种)不同的涂色方法.

15. C　[解析] 在三阶魔方中，随机选择一层，有 9 种选法，每一层有 2 种旋转方式，故每一次旋转魔方，有 $9\times2=18$(种)旋转方式，所以若将一个已还原的三阶魔方按 5 步打乱，且每一步互相独立，则共有 18^5 种打乱方式.故选 C.

16. 80　[解析] 因为 $\cos^2a_{n+1}=\sin^2a_n$，$\cos^2a_{n+1}+\sin^2a_{n+1}=1$，所以 $\sin^2a_n+\sin^2a_{n+1}=1$，又 $\sin^2a_1=\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}$，所以 $\sin^2a_2=\dfrac{3}{4}$，$\sin^2a_3=\dfrac{1}{4}$，$\sin^2a_4=\dfrac{3}{4}$，所以 $\sin a_2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin a_3=\pm\dfrac{1}{2}$，$\sin a_4=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 $a_1=\dfrac{\pi}{6}$，$a_5=\dfrac{25\pi}{6}$，$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，所以 a_2，$a_4\in\left\{\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3},\dfrac{10\pi}{3},\dfrac{11\pi}{3}\right\}$，$a_3\in\left\{\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6},\dfrac{17\pi}{6},\dfrac{19\pi}{6},\dfrac{23\pi}{6}\right\}$.当 $a_3=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，a_2 有 2 种选法，a_4 有 6 种选法，一共有 $2\times6=12$(种)选法；当 $a_3=\dfrac{7\pi}{6}$ 时，a_2 有 2 种选法，a_4 有 6 种选法，一共有 $2\times6=12$(种)选法；当 $a_3=\dfrac{11\pi}{6}$ 时，a_2 有 4 种选法，a_4 有 4 种选法，一共有 $4\times4=16$(种)选法；当 $a_3=\dfrac{13\pi}{6}$ 时，a_2 有 4 种选法，a_4 有 4 种选法，一共有 $4\times4=16$(种)选法；当 $a_3=\dfrac{17\pi}{6}$ 时，a_2 有 6 种选法，a_4 有 2 种选法，一共有 $6\times2=12$(种)选法；当 $a_3=\dfrac{19\pi}{6}$ 时，a_2 有 6 种选法，a_4 有 2 种选法，一共有 $6\times2=12$(种)选法；当 $a_3=\dfrac{23\pi}{6}$ 时，a_2 有 8 种选法，a_4 有 0 种选法，一共有 $8\times0=0$(种)选法.所以满足条件的数列 $\{a_n\}$ 共有 12+12+16+16+12+12+0=80(个).

第 61 讲　排列与组合

1. A　[解析] 根据 $C_n^3=C_n^7$，得 $n=3+7=10$，所以 $A_n^2=A_{10}^2=10\times9=90$.故选 A.

2. C　[解析] 在 1,2,…,9 中任取 3 个数，其大小关系确定，所以“渐升数”共有 $C_9^3=84$(个).故选 C.

3. B　[解析] 两人恰好有两项科目相同的选法有 $C_5^2A_3^2=60$(种).故选 B.

4. C　[解析] 根据题意，分两步进行：第一步，安排 3 名同学站成一排，不同的站法共有 A_3^3 种；第二步，安排 2 名老师，采用插空法，不同的站法共有 A_4^2 种.由分步乘法计数原理可得，不同的站法共有 $A_3^3A_4^2=72$(种).故选 C.

5. B　[解析] 由题得 3 个 2，1 个 0，2 个 5 中，除去四个数字 2,0,2,5 后，还剩 1 个 2，1 个 5，将 2025 看作 1 个元素，与 2,5 共 3 个元素全排列，有 $A_3^3=6$(个)六位数.故选 B.

6. 30 240　[解析] 先将 10 人全排列，即为 A_{10}^{10}，再将甲、乙、丙、丁、戊五人全排列，即为 A_5^5，故共有 $\dfrac{A_{10}^{10}}{A_5^5}=30\ 240$(种)不同排法.

7. 65　[解析] 从 8 名同学中任选 4 名，有 C_8^4 种方法，其中全是女生的选法有 C_5^4 种，所以不同的选派方案共有 $C_8^4-C_5^4=70-5=65$(种).

8. C　[解析] 问题等价于将 8 个完全相同的小球放入 3 个不同的盒子，每个盒子至少 1 个球，由隔板法可知，不同的分配方案种数为 $C_7^2=21$.故选 C.

9. B　[解析] ①若 A 校去乙地，则有 $C_4^1C_3^1A_2^2=24$(种)不同的选择；②若 A 校

与另一所学校去丙地，则有$C_4^1C_3^2=12$(种)不同的选择；③若A校单独去丙地，则有$C_4^2=6$(种)不同的选择.所以共有$24+12+6=42$(种)不同的选择，故选B.

10. AC [解析] 对于A，若数学课不安排在第一节且不安排在最后一节课，则数学课有3节课可选，其余科目没有要求，有A_4^4种安排方法，则一共有$3A_4^4=72$(种)不同的安排方法，故A正确；对于B，语文课和数学课捆绑在一起，看作一个元素，与余下的科目一起排列，则有$A_4^4=24$(种)不同的安排方法，故B错误；对于C，先安排英语、物理、化学3节课，有$A_3^3=6$(种)不同的安排方法，把语文课和数学课安排在英语、物理、化学3节课产生的4个空位上，有$A_4^2=12$(种)不同的安排方法，则共有$6\times12=72$(种)不同的安排方法，故C正确；对于D，若语文课、数学课、英语课按从前到后的顺序安排，则有$\frac{A_5^5}{A_3^3}=20$(种)不同的安排方法，故D错误.故选AC.

11. ABC [解析] 对于A，将9本相同的书分给3位同学，每人至少一本，利用挡板法分析，在9本书之间的8个空隙中任选2个，插入挡板即可，有$C_8^2=28$(种)不同的分法，故A正确.对于B，根据题意，9本书内容都不一样，则每本书都可以分给3人中的任意一人，即有3种分法，所以9本书有3^9种不同的分法，故B正确.对于C，若内容完全一样的9本书分给3位同学，则3人中有可能有人分不到书，则先借给这3人每人一本书，此时每人至少分1本书，再利用隔板法，可得有$C_{11}^2=55$(种)不同的分法，故C正确.对于D，可以分为11类情况：①“1,2,6”型，有$C_9^1C_8^2C_6^6\times4=1008$(种)分法；②“1,3,5”型，有$C_9^1C_8^3C_5^5\times4=2016$(种)分法；③“1,4,4”型，有$C_9^1C_8^4C_4^4\times2=1260$(种)分法；④“1,7,1”型，有$C_9^1C_8^7C_1^1=72$(种)分法；⑤“1,8,0”型，有$C_9^1C_8^8=9$(种)分法；⑥“2,2,5”型，有$C_9^2C_7^2C_5^5\times3=2268$(种)分法；⑦“2,3,4”型，有$C_9^2C_7^3C_4^4\times6=7560$(种)分法；⑧“2,7,0”型，有$C_9^2C_7^7\times2=72$(种)分法；⑨“3,3,3”型，有$C_9^3C_6^3C_3^3=1680$(种)分法；⑩“3,6,0”型，有$C_9^3C_6^6\times2=168$(种)分法；⑪“4,5,0”型，有$C_9^1C_5^5\times2=252$(种)分法.所以共有$1008+2016+1260+72+9+2268+7560+72+1680+168+252=16\,365$(种)不同的分法，故D错误.故选ABC.

12. 120 [解析] 当五位数的万位为4时，个位数可以是0,2，此时满足条件的偶数共有$C_2^1\times A_4^3=48$(个)；当五位数的万位为5时，个位数可以是0,2,4，此时满足条件的偶数共有$C_3^1\times A_4^3=72$(个).所以比40 000大的偶数共有$48+72=120$(个).

13. 30 [解析] 分两类：第一类，甲、丙两人去同一个村庄，共有$C_3^2A_3^3$种分配方法；第二类，甲、丙和除乙以外的某一人去同一村庄，共有$C_2^1A_3^3$种分配方法.故共有$C_3^2A_3^3+C_2^1A_3^3=30$(种)不同的分配方法.

14. 43 200 [解析] 甲和乙必须相邻，采用捆绑法，将其看作一个整体，与除丙、丁外的其他6人排成一圈，共有$A_2^2\cdot\frac{A_7^7}{7}=1440$(种)排法.甲和丙、丁不能相邻，采用插空法，甲和乙与除了丙、丁外的其他6人排成一圈后形成7个空，但甲与丙、丁不能相邻，故丙、丁只有6个空位可选，有$A_6^2=30$(种)选法.根据分步乘法计数原理可知，不同的安排方法有$30\times1440=43\,200$(种).

15. C [解析] 8个除颜色外完全相同的球，要使红球互不相邻，则最多有4个红球，根据红球个数分类讨论：1个红球7个黑球时，先排7个黑球共有1种排法，从8个空里面选出1个空让红球插入，有$C_8^1=8$(种)选法；2个红球6个黑球时，先排6个黑球共有1种排法，从7个空里面选出2个空让红球插入，有$C_7^2=21$(种)选法；3个红球5个黑球时，先排5个黑球共有1种排法，从6个空里面选出3个空让红球插入，有$C_6^3=20$(种)选法；4个红球4个黑球时，先排4个黑球共有1种排法，从5个空里面选出4个空让红球插入，有$C_5^4=5$(种)选法.所以满足条件的不同排列方法的种数为$8+21+20+5=54$.故选C.

16. B [解析] 由题意得$a_{n+1}\geqslant a_n$，$a_{n+2}-a_{n+1}\geqslant a_{n+1}-a_n$，$a_1=a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$，$a_6=8$，又$a_6-a_5=3$，所以当$n\geqslant5$时，$a_{n+1}-a_i\geqslant3(i=1,2,\cdots,n)$，所以$\{a_n\}$的所有“平缓数组”有$(a_1,a_2)$，$(a_1,a_3)$，$(a_1,a_4)$，$(a_2,a_3)$，$(a_2,a_4)$，$(a_3,a_4)$，$(a_4,a_5)$，共7个，其中组差为0的有1个，为$(a_1,a_2)$，组差为1的有3个，为$(a_1,a_3)$，$(a_2,a_3)$，$(a_3,a_4)$，组差为2的有3个，为$(a_1,a_4)$，$(a_2,a_4)$，$(a_4,a_5)$，所以随机抽取的3个“平缓数组”的组差中至少有2个相等的取法种数为$2C_3^2C_4^1+2C_3^3=26$，故选B.

第62讲　二项式定理

1. D [解析] $(1-2x)^8$的展开式共有9项，所以中间一项为第5项，则中间一项的二项式系数为C_8^4.

2. D [解析] $(2x+3)^4$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_4^r(2x)^{4-r}3^r$.当$r=3$时，$T_4=3^3\times2^1\times C_4^3\cdot x=216x$，故选D.

3. C [解析] $\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^6$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^k\left(\frac{1}{x}\right)^{6-k}(-\sqrt{x})^k=(-1)^kC_6^kx^{\frac{3k}{2}-6}$，令$\frac{3k}{2}-6=0$，解得$k=4$，所以$\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^6$的展开式中的常数项为$(-1)^4C_6^4=15$.故选C.

4. BD [解析] 对于A，因为$\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$的展开式一共有五项，所以展开式中二项式系数最大的项为第三项，故A错误；对于B，令$x=1$，则$\left(x-\frac{1}{x}\right)^4=0$，所以展开式中各项系数的和为0，故B正确；对于C，$\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_4^rx^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=C_4^r(-1)^rx^{4-2r}(r=0,1,2,3,4)$，令$4-2r=4$，得$r=0$，故展开式中含$x^4$的项的系数为$C_4^0\cdot(-1)^0=1$，故C错误；对于D，展开式中所有项的二项式系数的和为$2^4=16$，故D正确.故选BD.

5. AD [解析] 由题意知$(x-2)^n=(-2+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则$a_0=C_n^0(-2)^n=-32$，得$n=5$，A正确；令$x=1$，由$(x-2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，得$(1-2)^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，即$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$，故$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=-1-a_0=-1+32=31$，B错误；$a_3=C_5^3(-2)^2=40$，C错误；$a_4=C_5^4(-2)^1=-10$，D正确.故选AD.

6. 5 [解析] $(1+x)^6$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^rx^r$，∴展开式中x^3的系数为$C_6^3-C_6^2=20-15=5$.

7. 12 [解析] 由题意可知，$(x-1)^3$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_3^rx^{3-r}(-1)^r$，令$3-r=2$，则$r=1$，所以$(x-1)^3$的展开式中$x^2$的系数为$C_3^1\times(-1)=-3$；$(x-1)^6$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^kx^{6-k}(-1)^k$，令$6-k=2$，则$k=4$，所以$(x-1)^6$的展开式中$x^2$的系数为$C_6^4(-1)^4=15$.所以$a_2=C_3^1(-1)+C_6^4(-1)^4=12$.

8. B [解析] $(x-2y)^5$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_5^kx^{5-k}(-2y)^k=(-2)^kC_5^kx^{5-k}y^k$，令$k=3$，得$T_4=-8C_5^3x^2y^3=-80x^2y^3$，所以$\frac{(x-2y)^5}{xy^3}$的展开式中$x$的系数为$-80$.故选B.

9. D [解析] 令$x=0$，得$a_0=1$，令$x=1$，得$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2024}=2^{2024}$，两式相减得$a_1+a_2+\cdots+a_{2024}=2^{2024}-1=4^{1012}-1$，因为$4^{1012}=(3+1)^{1012}=C_{1012}^03^{1012}+C_{1012}^13^{1011}+\cdots+C_{1012}^{1011}3+C_{1012}^{1012}$，其中$C_{1012}^03^{1012}+C_{1012}^13^{1011}+\cdots+C_{1012}^{1011}3^1$能被3整除，所以$4^{1012}$被3除的余数为1，故$a_1+a_2+\cdots+a_{2024}$能被3整除.故选D.

10. B [解析] $(x+3)(x+2)^8=[(x+1)+2][(x+1)+1]^8$，其中$[(x+1)+1]^8$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_8^r(x+1)^{8-r}\cdot1^r=C_8^r(x+1)^{8-r}$，其中$r\in\mathbf{N}$且$r\leqslant8$，当$r=0$时，$T_1=C_8^0(x+1)^8=(x+1)^8$，此时只需乘第一个因式$[(x+1)+2]$中的2，可得$2(x+1)^8$；当$r=1$时，$T_2=C_8^1(x+1)^7=8(x+1)^7$，此时只需乘第一个因式$[(x+1)+2]$中的$(x+1)$，可得$8(x+1)^8$.所以$a_8=2+8=10$.故选B.

11. AB [解析] $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^4$的展开式中二项式系数的最大值为$C_4^2=6$.$\left(x+\frac{a}{x}\right)^3$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_3^rx^{3-r}a^rx^{-r}=C_3^ra^rx^{3-2r}$，令$3-2r=-1$，得$r=2$，故$\left(x+\frac{a}{x}\right)^3$的展开式中$\frac{1}{x}$的系数为$C_3^2a^2$，故$3a^2=6$，解得$a=\pm\sqrt{2}$.故选AB.

12. AC [解析] 令$x=1$，得$(2\times1-1)^{10}=1=a_0$，所以选项A正确；令$x=2$，得$3^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$，所以$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=3^{10}-1$，所以选项B错误；因为$(2x-1)^{10}=[2(x-1)+1]^{10}$，所以$T_{r+1}=C_{10}^r[2(x-1)]^{10-r}$，则$a_2=C_{10}^8\cdot2^2=180$，所以选项C正确；$(2x-1)^{10}=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$，两边对$x$求导得$10\times(2x-1)^9\times2=a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+\cdots+10a_{10}(x-1)^9$，令$x=2$得$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=20\times3^9$，所以选项D错误.故选AC.

13. -30 [解析] 因为$\left(-x^2+\frac{1}{\sqrt{x^3}}+y\right)^5$是由5个$\left(-x^2+\frac{1}{\sqrt{x^3}}+y\right)$相乘得到，所以要想得到$\frac{y^2}{x}$，则$-x^2$取1个，$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$取2个，$y$取2个，故所求系数为$C_5^1\cdot(-1)\cdot C_4^2=-30$.

14. 3　53 [解析] 当$x=1$时，$(1+a)^3=64$，得$a=3$，则原式$=(2-x^2)(1+$

$3x)^3=2(1+3x)^3-x^2(1+3x)^3$，$2(1+3x)^3$ 的展开式中含 x^2 的项的系数是 $2\times C_3^2\cdot 3^2=54$，$x^2(1+3x)^3$ 的展开式中含 x^2 的项的系数为 1，所以 $(2-x^2)(1+3x)^3$ 的展开式中含 x^2 的项的系数为 $54-1=53$.

15. 7 ［解析］$(2+3x)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{10}^r\cdot 2^{10-r}(3x)^r=3^r\cdot 2^{10-r}\cdot C_{10}^r x^r$，设系数最大的项为第 $k+1$ 项，可得 $\begin{cases}3^k\cdot 2^{10-k}\cdot C_{10}^k\geqslant 3^{k-1}\cdot 2^{11-k}\cdot C_{10}^{k-1},\\ 3^k\cdot 2^{10-k}\cdot C_{10}^k\geqslant 3^{k+1}\cdot 2^{9-k}\cdot C_{10}^{k+1},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{3\times 10!}{k!\cdot(10-k)!}\geqslant\dfrac{10!\times 2}{(k-1)!\cdot(11-k)!},\\ \dfrac{10!\times 2}{k!\cdot(10-k)!}\geqslant\dfrac{3\times 10!}{(k+1)!\cdot(9-k)!},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{3}{k}\geqslant\dfrac{2}{11-k},\\ \dfrac{2}{10-k}\geqslant\dfrac{3}{k+1},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{28}{5}\leqslant k\leqslant\dfrac{33}{5}$，因为 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=6$，所以展开式中系数最大的项为第 7 项.

16. C ［解析］因为 $C_n^0(x+2)^n-C_n^1(x+2)^{n-1}+C_n^2(x+2)^{n-2}-\cdots+(-1)^nC_n^n=(x+2-1)^n=(x+1)^n$，所以 $(x+1)^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，当 $x=1$ 时，$a_0+a_1+\cdots+a_n=(1+1)^n=2^n$，当 $x=0$ 时，$a_n=(0+1)^n=1$，易知 $a_0=C_n^0=C_n^n=a_n=1$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=2^n-2$，故选 C.

17. $\dfrac{1}{630}$　$\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)}$

［解析］由题意知，“莱布尼茨三角形”第 8 行的第 5 个数是 $\dfrac{1}{(8+1)C_8^4}=\dfrac{1}{630}$. 由“莱布尼茨三角形”的特点可知，每个数均等于其“脚下”两个数之和，则 $\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-3}}=\dfrac{1}{nC_{n-1}^{n-3}}$，$\dfrac{1}{nC_{n-1}^{n-3}}+\dfrac{1}{nC_{n-1}^{n-4}}=\dfrac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-4}}$，$\dfrac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-4}}+\dfrac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-5}}=\dfrac{1}{(n-2)C_{n-3}^{n-5}}$，…，$\dfrac{1}{5C_4^2}+\dfrac{1}{5C_4^1}=\dfrac{1}{4C_3^1}$，$\dfrac{1}{4C_3^1}+\dfrac{1}{4C_3^0}=\dfrac{1}{3C_2^0}$，将上述各式相加，得 $\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-3}}+\dfrac{1}{nC_{n-1}^{n-4}}+\cdots+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+S_n=\dfrac{1}{3}$，$\therefore S_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)}$.

第 63 讲　随机事件与概率、古典概型

1. B ［解析］从放有两个红球、一个白球的袋子中一次任意取出两个球包含的样本点为 AB，AC，BC，所以它的一个样本空间为 $\{AB,AC,BC\}$. 故选 B.

2. C ［解析］由对立事件的概念知，“至少一枚硬币正面朝上”的对立事件为“两枚硬币反面朝上”. 故选 C.

3. B ［解析］因为支付方式只有现金支付和非现金支付两种，所以该群体中的成员支付方式只有三类：只用现金支付、只用非现金支付和既用现金支付也用非现金支付. 不用现金支付的概率即为只用非现金支付的概率，所以所求概率 $P=1-0.45-0.15=0.4$. 故选 B.

4. B ［解析］从芳香度分别为 1，2，3，4 的四种添加剂中随机抽取两种添加剂，包含的样本点为 $(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$，共 6 种，其中选用的两种添加剂芳香度之和为 5 包含的样本点为 $(1,4)$，$(2,3)$，共 2 种，则所求概率 $P=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$. 故选 B.

5. ABD ［解析］概率反映的是随机性的规律，但每次试验出现的结果具有不确定性，因此 A，B，D 中说法错误；抛掷均匀塑料圆板出现正面向上与反面向上的概率相等，是公平的，因此 C 中说法正确. 故选 ABD.

6. 0.25 ［解析］20 组随机数中表示三次投篮恰有两次命中的是 191，271，932，812，393，其频率为 $\dfrac{5}{20}=0.25$，所以估计该运动员三次投篮恰有两次命中的概率为 0.25.

7. 0.7　0.91 ［解析］由于小明是 B 型血，所以血型为 O，B 的人可以给小明输血，故任找一个人，其血可以输给小明的概率为 $30\%+40\%=0.7$. 两个人都不可以给小明输血的概率为 $(1-0.7)\times(1-0.7)=0.09$，所以任找两个人，则小明有血可以输的概率为 $1-0.09=0.91$.

8. A ［解析］记两个标有数字 1 的小球分别为 A，a，两个标有数字 2 的小球分别为 B，b，两个标有数字 3 的小球分别为 C，c，从中任取两个小球包含的样本点为 Aa，AB，Ab，AC，Ac，aB，ab，aC，ac，Bb，BC，Bc，bC，bc，Cc，共 15 个，其中两个小球上的数字之和大于 4 包含的样本点为 BC，Bc，bC，bc，Cc，共 5 个，所以两个小球上的数字之和大于 4 的概率 $P=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$. 故选 A.

9. B ［解析］因为事件 A，B 互斥，它们都不发生的概率为 $\dfrac{1}{7}$，所以 $P(A+B)=P(A)+P(B)=1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$. 将 $P(A)=2P(B)$ 代入上式可得 $P(B)=\dfrac{2}{7}$，所以 $P(A)=\dfrac{4}{7}$，$P(\overline{A})=\dfrac{3}{7}$. 故选 B.

10. C ［解析］因为只拨动一粒珠子至梁上，所以数字只表示 1 或 5，因为个位、十位、百位、千位分别随机拨动一粒珠子至梁上，所以所得的四位数的个数为 $2^4=16$. 若所得四位数能被 3 整除，则数字 1 和 5 各出现 2 次，这样的四位数有 1155，1515，1551，5511，5115，5151，共 6 个，所以 $P(A)=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$. 能被 5 整除的四位数，其个位数为 5，则这样的四位数有 1115，1155，1515，1555，5555，5115，5155，5515，共 8 个，所以 $P(B)=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$. 既能被 3 整除，又能被 5 整除的四位数有 1155，1515，5115，共 3 个，所以 $P(AB)=\dfrac{3}{16}$，所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{16}=\dfrac{11}{16}$. 故选 C.

11. B ［解析］将编号为 1，2，3，4 的 4 个小球随机放入编号为 1，2，3，4 的 4 个凹槽中，共有 $A_4^4=24$（种）放法，恰有 2 个凹槽与其放入小球编号相同的放法有 $C_4^2=6$（种），4 个凹槽与其放入小球编号相同的放法有 1 种，所以至少有 2 个凹槽与其放入小球编号相同的概率 $P=\dfrac{C_4^2+1}{A_4^4}=\dfrac{7}{24}$，故选 B.

12. CD ［解析］对于 A，因为 3 次抽到的球全是红球为 3 次抽到的球颜色全相同的一种情况，所以事件 A 与事件 B 不互斥，故 A 错误；对于 B，事件 A 与事件 C 不可能同时发生，是互斥事件，但一次试验中还可能 3 次抽到的球全是黄球，所以事件 A 与事件 C 不是对立事件，故 B 错误；对于 C，$P(C)=1-\dfrac{2}{8}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$，故 C 正确；对于 D，因为事件 A 与事件 C 互斥，$P(A)=\dfrac{1}{8}$，所以 $P(A\cup C)=P(A)+P(C)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{8}$，故 D 正确. 故选 CD.

13. $\dfrac{3}{56}$ ［解析］从八张卡片中随机抽出三张，样本空间中总的样本点个数为 $C_8^3=\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2}=56$. 因为 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$，所以要使抽出的三张卡片上的数字之和与其余五张卡片上的数字之和相等，则抽出的三张卡片上的数字之和应为 18，则抽出的三张卡片上的数字应为 8，7，3 或 8，6，4 或 7，6，5，共包含 3 个样本点，所以抽出的三张卡片上的数字之和与其余五张卡片上的数字之和相等的概率为 $\dfrac{3}{56}$.

14. 解：(1) 从中任取 1 个小猫摆件，分别记得到黑猫、白猫、红猫为事件 A，B，C，因为 A，B，C 两两互斥，所以由题意得 $\begin{cases}P(A+B)=\dfrac{5}{7},\\ P(B+C)=\dfrac{4}{7},\\ P(A+B+C)=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}P(A)+P(B)=\dfrac{5}{7},\\ P(B)+P(C)=\dfrac{4}{7},\\ P(A)+P(B)+P(C)=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}P(A)=\dfrac{3}{7},\\ P(B)=\dfrac{2}{7},\\ P(C)=\dfrac{2}{7},\end{cases}$ 所以任取 1 个小猫摆件，得到黑猫、白猫、红猫的概率分别是 $\dfrac{3}{7}$，$\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{2}{7}$.

(2) 由 (1) 知黑猫、白猫、红猫摆件的个数分别为 3，2，2，记黑猫摆件为 a，b，c，白猫摆件为 m，n，红猫摆件为 x，y，则从 7 个小猫摆件中任取 2 个小猫摆件包含的样本点为 ab，ac，am，an，ax，ay，bc，bm，bn，bx，by，cm，cn，cx，cy，mn，mx，my，nx，ny，xy，共 21 个，其中 2 个小猫摆件是黑猫包含的样本点为 ab，ac，bc，共 3 个，2 个小猫摆件是白猫包含的样本点为 mn，共 1 个，2 个小猫摆件是红猫包含的样本点为 xy，共 1 个，所以 2 个小猫摆件颜色相同的概率为 $\dfrac{3+1+1}{21}=\dfrac{5}{21}$，则 2 个小猫摆件颜色不相同的概率是 $1-\dfrac{5}{21}=\dfrac{16}{21}$.

15. B ［解析］所有的涂色方案分三类：用到 3 种颜色，即⑤用一种颜色，①③同色，②④同色，涂色方法有 $A_5^3=60$（种）；用到 4 种颜色，即⑤用一种颜色，①③不同色，②④同色或⑤用一种颜色，①③同色，②④不同色，涂色方法有 $2A_5^4=240$（种）；用到 5 种颜色，涂色方法有 $A_5^5=120$（种）. 因此，所求概率是 $\dfrac{60}{60+240+120}=\dfrac{1}{7}$. 故选 B.

16. $\dfrac{4}{15}$ ［解析］由题可知，要使直到某种颜色的球全部取出为止，最后一个球是白球，则摸球的次数可能为 2，3，4. 设两

次取球便结束，最后一个球是白球的概率为 P_1，两次取球便结束，且最后一个球为白球的情况为两个球都是白球，有2种情况，故 $P_1=\frac{2}{A_6^2}=\frac{1}{15}$. 设三次取球便结束，最后一个球是白球的概率为 P_2，三次取球便结束，且最后一球为白球的情况为前两次一白一红，有 $C_3^1C_2^1A_2^2=12$（种）情况，故 $P_2=\frac{12}{A_6^3}=\frac{1}{10}$. 设四次取球便结束，最后一个球是白球的概率为 P_3，四次取球便结束，且最后一球为白球的情况为前三次两红一白，有 $2\cdot C_3^2C_3^2A_2^2=36$（种）情况，故 $P_3=\frac{36}{A_6^4}=\frac{1}{10}$. 设直到某种颜色的球全部取出为止，最后一个球是白球的概率是 P，则 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$.

第64讲　随机事件的相互独立性与条件概率

1. D　[解析] ∵两次均未中奖的概率是 $0.4\times0.4=0.16$，∴若可以连抽两次，则中奖的概率是 $1-0.16=0.84$. 故选D.

2. A　[解析] 用 A,B 分别表示“甲被选中”和“乙被选中”. 一共有10名特种兵，从中选出4名，则 $P(A)=\frac{C_9^3}{C_{10}^4}=\frac{2}{5}$. 从10名特种兵中随机选出4名，如果甲和乙都被选中，那么剩余2个被选中的人可从甲和乙之外的8名特种兵中任意选择2名，故选取方式有 C_8^2 种，所以 $P(AB)=\frac{C_8^2}{C_{10}^4}=\frac{28}{210}=\frac{2}{15}$. 故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}$. 故选A.

3. B　[解析] 因为事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，所以 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{9}$，所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$. 故选B.

4. C　[解析] 记甲、乙两人各射击一次的得分之和为 X，则 $P(X=2)=\frac{3}{5}\times(1-p)+\left(1-\frac{3}{5}\right)\times p=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}p=\frac{9}{20}$，解得 $p=\frac{3}{4}$. 故选C.

5. ABC　[解析] $P(A)=\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{5}$，故A正确；$P(AB)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{3}{10}$，故B正确；$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$，故C正确；$P(\overline{A})=\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{2}{5}$，$P(\overline{A}B)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{3}{10}$，$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$，故D错误. 故选ABC.

6. $\frac{5}{12}$　[解析] 根据题意可得该同学在这次竞赛中仅有一项测试结果为优秀的概率为 $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

7. $\frac{1}{3}$　[解析] 没有取到黄球，可以是“第一次取到红球”或“第一次取到绿球，第二次取到红球”，用事件 R_1 表示第一次取到红球，R_2 表示第二次取到红球，G_1 表示第一次取到绿球，则 $P(R_1)=\frac{1}{4}$，$P(G_1R_2)=P(G_1)P(R_2|G_1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，所以没有取到黄球的概率 $P=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

8. B　[解析] ∵$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，且 $P(A|B)=P(B|A)=\frac{1}{2}$，∴$P(A)=P(B)$，又 $P(\overline{A})=\frac{3}{4}$，∴$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{1}{4}$，∴$P(B)=\frac{1}{4}$. 故选B.

9. C　[解析] 分别记甲、乙、丙三人获得优秀等级为事件 A,B,C，记甲、乙、丙三人中恰有两人没有获得优秀等级为事件 D，记乙获得优秀等级为事件 E. 由题知，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(C)=0.7$，所以 $P(D)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0.5\times0.4\times0.3+0.5\times0.6\times0.3+0.5\times0.4\times0.7=0.29$，$P(DE)=P(\overline{A}B\overline{C})=0.5\times0.6\times0.3=0.09$，所以 $P(E|D)=\frac{0.09}{0.29}=\frac{9}{29}$. 故选C.

10. AD　[解析] 对于A，由题意知，每次只摸出一个球，$A_1\cap A_2=\varnothing$，$P(A_1)=\frac{3}{7}$，$P(A_2)=\frac{4}{7}$，则 $P(A_1)+P(A_2)=1$，所以 A_1,A_2 是对立事件，故A正确；对于B，$P(A_1)=\frac{3}{7}$，$P(B_2)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{8}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{28}$，$P(A_1B_2)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{8}=\frac{3}{28}$，则 $P(A_1B_2)\neq P(A_1)P(B_2)$，所以 A_1,B_2 不相互独立，故B错误；对于C，$P(B_2|A_2)=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}}{\frac{4}{7}}=\frac{3}{8}$，故C错误；对于D，$P(A_2B_1)=\frac{4}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{14}$，$P(A_1B_2)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{8}=\frac{3}{28}$，所以 $P(B_1|A_2)+P(B_2|A_1)=\frac{P(A_2B_1)}{P(A_2)}+\frac{P(A_1B_2)}{P(A_1)}=\frac{7}{8}$，故D正确. 故选AD.

11. BC　[解析] 显然事件 B,C 相互独立，且 $A=BC$，所以 $P(A)=P(B)\cdot P(C)$，故A错误，B正确；事件 $\overline{A}$ 包含“视频甲未入选，图片乙入选”“视频甲入选，图片乙未入选”“视频甲、图片乙都未入选”三种情况，因此 $P(\overline{A})=P(\overline{B}C)+P(B\overline{C})+P(\overline{B}\,\overline{C})$，则 $P(\overline{A})>P(\overline{B}C)+P(B\overline{C})$，故C正确；依题意，$P(\overline{B}C)=P(\overline{B})P(C)=\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{1}{b}=\frac{a-1}{ab}$，$P(B\overline{C})=P(B)P(\overline{C})=\frac{1}{a}\cdot\left(1-\frac{1}{b}\right)=\frac{b-1}{ab}$，因为 $a,b\in\mathbf{N}$ 且 $a>b>1$，所以 $\frac{a-1}{ab}>\frac{b-1}{ab}$，即 $P(\overline{B}C)>P(B\overline{C})$，故D错误. 故选BC.

12. $\frac{2}{3}$　[解析] 至少有两人去南湖的情况有三种：两人去，三人去，四人去，其概率为 $\frac{C_4^2C_2^1C_1^1+C_4^3\times2+C_4^4}{3^4}=\frac{33}{81}$，至少有两人去南湖且有人去净月的概率为 $\frac{C_4^2\times3+C_4^3}{3^4}=\frac{22}{81}$，所以在至少有两人去南湖的条件下有人去净月的概率为 $\frac{\frac{22}{33}}{=}\frac{2}{3}$.

13. $\frac{41}{72}$　$\frac{3}{5}$　[解析] 第3次投壶的人是乙的情况有甲甲乙、甲乙乙、乙乙乙、乙甲乙，所以第3次投壶的人是乙的概率 $P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{41}{72}$. 第2次投壶的人是甲的情况有甲甲、乙甲，第1次投壶的人是乙的情况有乙，设“第2次投壶的人是甲”为事件 A，“第1次投壶的人是乙”为事件 B，则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$.

14. 解：(1)∵甲教师总得分为0，∴甲教师在三个项目的比赛中赢一项输两项，
∴所求概率为 $0.4\times0.4\times0.4+0.6\times0.6\times0.4+0.6\times0.4\times0.6=0.352$.
(2)不妨设教师甲在三个项目中获胜的事件依次为 A,B,C，则教师甲获得冠军的概率 $p_1=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})=0.4\times0.6\times0.6+0.6\times0.6\times0.6+0.4\times0.4\times0.6+0.4\times0.6\times0.4=0.552$，∴教师乙获得冠军的概率 $p_2=1-p_1=0.448$，
∴$|p_1-p_2|=0.104$，$\sqrt{\frac{2|p_1^2-p_2^2|}{5}+0.1}\approx0.376$，∴$|p_1-p_2|<\sqrt{\frac{2|p_1^2-p_2^2|}{5}+0.1}$，
∴甲、乙获得冠军的实力没有明显差别.

15. 解：(1)四人实力旗鼓相当，即各比赛每人的胜率均为50%，即为 $\frac{1}{2}$.
①由题意，第一轮比赛 A,D 一组，B,C 一组，要 A 获得季军，则 A 进入胜者组，后续连败两轮，或 A 进入负者组，后续两轮先胜后败，所以 A 获得季军的概率为 $\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.
②用 W_i 表示“D 在所参加的比赛 i 中胜利”，L_i 表示“D 在所参加的比赛 i 中失败”，事件 E 表示“D 获得亚军”，事件 F 表示“D 所参加的所有比赛中失败了两场”，事件 F 包括 L_1L_4，$L_1W_4L_5$，$W_1L_3L_5$，$W_1L_3W_5L_6$，$L_1W_4W_5L_6$ 五种情况，这五种情况彼此互斥，
则 $P(F)=P(L_1L_4)+P(L_1W_4L_5)+P(W_1L_3L_5)+P(W_1L_3W_5L_6)+P(L_1W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$，事件 EF 包括 $W_1L_3W_5L_6$，$L_1W_4W_5L_6$ 两种情况，则 $P(EF)=P(W_1L_3W_5L_6)+P(L_1W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，所以所求概率为 $P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{5}$.

(2)由题意得，一场比赛中 A 获胜的概率为 $\frac{3}{4}$，B，C，D 之间获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$.

要使 D 进入决赛且先前与对手已有过招，可分为三种情况：

①若 A 与 D 在决赛中相遇，则 A：1 胜，3 胜，D：1 负 4 胜 5 胜，或 A：1 负 4 胜 5 胜，D：1 胜，3 胜，其概率 $P_1=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{128}$；

②若 B 与 D 在决赛中相遇，则 D：1 胜，3 胜，B：2 胜 3 负 5 胜，或 D：1 胜，3 负，5 胜，B：2 胜 3 胜，其概率 $P_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{128}$；

③若 C 与 D 在决赛中相遇，同 B 与 D 在决赛中相遇，其概率 $P_3=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{128}$.

所以 D 进入决赛且先前与对手已有过招的概率 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{37}{128}$.

第 65 讲　全概率公式及应用

1. A　[解析] 因为 $P(A)=P(\overline{A})$，$P(A)+P(\overline{A})=1$，所以 $P(A)=P(\overline{A})=0.5$，因为 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.5\times P(B|A)+0.5\times0.4=0.3$，所以 $P(B|A)=0.2$. 故选 A.

2. D　[解析] 用事件 A 表示“抽中第一批”，事件 B 表示“抽中合格品”，则 $P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})=0.6\times(1-0.05)+0.4\times(1-0.04)=0.57+0.384=0.954$. 故选 D.

3. B　[解析] 设事件 A 为“第一次摸出的球是白球”，事件 B 为“第二次摸出的球是黄球”，则 $P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})=\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$. 故选 B.

4. A　[解析] 设事件 $A_1=$“该汽车是货车”，事件 $A_2=$“该汽车是客车”，事件 $B=$“一辆汽车中途停车修理”，则 $P(A_1)=\frac{2}{3}$，$P(A_2)=\frac{1}{3}$，$P(B|A_1)=0.02$，$P(B|A_2)=0.01$，则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$，故该汽车是货车的概率为 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{0.02\times\frac{2}{3}}{0.02\times\frac{2}{3}+0.01\times\frac{1}{3}}=0.8$. 故选 A.

5. D　[解析] 设第一天他俩结伴回家的概率为 p，则由全概率公式可得 $0.5p+0.6(1-p)=1-0.46$，即 $-0.1p+0.6=0.54$，解得 $p=0.6$. 故选 D.

6. 0.74　[解析] 因为 $P(A)=0.4$，$P(B|A)=0.2$，$P(B|\overline{A})=0.3$，所以 $P(\overline{A})=0.6$，所以 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.4\times0.2+0.6\times0.3=0.26$，所以 $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.26=0.74$.

7. $\frac{5}{9}$　[解析] 设事件 A 为“抽到的学生来自高三(1)班”，事件 B 为“抽到的学生来自高三(2)班”，事件 C 为“抽到的学生参加数学兴趣社团”，则 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(C|A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$，$P(C|B)=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$，由全概率公式得 $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{9}{40}$，由乘法公式得 $P(AC)=P(A)P(C|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$，由条件概率公式得 $P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{9}{40}}=\frac{5}{9}$.

8. A　[解析] 由题可知 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}=\frac{23}{40}$，$P(A_2)=\frac{2}{5}$，$P(B|A_2)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，则 $P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{23}{40}}=\frac{8}{23}$. 故选 A.

9. C　[解析] 记事件 D 为“选取的这个人患流感”，事件 E 为“此人选自 A 地区”，事件 F 为“此人选自 B 地区”，事件 G 为“此人选自 C 地区”，则由题意可得 $P(E)=\frac{5}{20}=0.25$，$P(F)=\frac{7}{20}=0.35$，$P(G)=\frac{8}{20}=0.4$，$P(D|E)=0.06$，$P(D|F)=0.05$，$P(D|G)=0.04$. 由全概率公式可得 $P(D)=P(E)\cdot P(D|E)+P(F)\cdot P(D|F)+P(G)\cdot P(D|G)=0.25\times0.06+0.35\times0.05+0.4\times0.04=0.0485$，故 A 错误；$P(E)=\frac{5}{20}=0.25$，$P(D|E)=0.06$，则此人选自 A 地区且患流感的概率为 $P(E)\cdot P(D|E)=0.25\times0.06=0.015$，故 B 错误；由贝叶斯公式可得 $P(E|D)=\frac{P(E)\cdot P(D|E)}{P(D)}=\frac{0.25\times0.06}{0.0485}=\frac{30}{97}$，故 C 正确；从这三个地区任意选取 1 人，此人患流感的概率为 0.0485，任意选取 100 人，设这 100 人中患流感的人数为 X，则 $X\sim B(100,0.0485)$，所以 $E(X)=100\times0.0485=4.85$，故 D 错误. 故选 C.

10. ABC　[解析] 设事件 A 为“李明与甲组选手比赛”，事件 B 为“李明与乙组选手比赛”，事件 C 为“李明获胜”，则由题可知 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{1}{3}$. 对于 A，李明与甲组选手比赛且获胜的概率为 $P(AC)=P(A)P(C|A)=\frac{2}{3}\times0.6=\frac{2}{5}$，故 A 正确；对于 B，李明获胜的概率为 $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=\frac{2}{3}\times0.6+\frac{1}{3}\times0.5=\frac{17}{30}$，故 B 正确；对于 C，若李明获胜，则对手来自甲组的概率为 $P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{17}{30}}=\frac{12}{17}$，故 C 正确；对于 D，若李明获胜，则对手来自乙组的概率为 $P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(B)P(C|B)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{3}\times0.5}{\frac{17}{30}}=\frac{5}{17}$，故 D 错误. 故选 ABC.

11. CD　[解析] 对于 A，第一次投篮的人是甲的概率为 $\frac{C_2^1}{2^2}=\frac{1}{2}$，故 A 错误；对于 C，设 A，B 分别表示“第一次投篮的人是甲”和“第二次投篮的人是乙”，则 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{7}$，故 C 正确；对于 B，D，用 A_n 表示“第 n 次投篮的人是甲”，则当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=P(A_n)=P(A_n|A_{n-1})P(A_{n-1})+P(A_n|\overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}})=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}(1-a_{n-1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}a_{n-1}$，故 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}a_{n-1}(n\geqslant2)$，则 $a_2=\frac{5}{12}$，$a_3=\frac{31}{72}$，$6a_n+a_{n-1}=3(n\geqslant2)$，所以第三次投篮的人是乙的概率为 $1-\frac{31}{72}=\frac{41}{72}$，故 B 错误，D 正确. 故选 CD.

12. 3　[解析] 记 A_1，A_2，A_3 分别表示从甲筐中随机取出一个水果为苹果、梨子、橙子，则 A_1，A_2，A_3 互斥，所以 $P(A)=P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)=\frac{5}{10}\times\frac{x+1}{x+4}+\frac{3}{10}\times\frac{x}{x+4}+\frac{2}{10}\times\frac{x}{x+4}=\frac{2x+1}{2(x+4)}\geqslant\frac{1}{2}$，解得 $x\geqslant3$，故整数 x 的最小值为 3.

13. $\frac{10}{13}$　[解析] 设粒子从 i 号仓出发最终从 1 号仓到达容器外的概率为 P_i，则 $\begin{cases}P_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}P_2,\\P_2=\frac{1}{3}P_1+\frac{1}{3}P_3,\\P_3=\frac{1}{2}P_2,\end{cases}$ 得 $P_1=\frac{10}{13}$.

14. 解：(1)记事件 A 表示“球取自甲箱”，事件 $\overline{A}$ 表示“球取自乙箱”，事件 B 表示“取得黑球”，则 $P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$，

$P(B|A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(B|\overline{A})=\frac{2}{5}$，

由全概率公式得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{30}$.

(2)该球取自乙箱的可能性更大，理由如下：该球取自甲箱的概率 $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{11}{30}}=\frac{5}{11}$，该球取自乙箱的概率 $P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{11}{30}}=\frac{6}{11}$，

因为 $P(A|B)<P(\overline{A}|B)$，所以该球取自乙箱的可能性更大.

15. 解：(1)用事件 A_1 表示“第一回合该运动员赢球”，事件 A_2 表示“第二回合该运动员赢球”，事件 B 表示“第二回合比赛有运动员得分”，

由已知得 $P(A_1)=\frac{3}{4}$，$P(A_2)=\frac{3}{4}$，$P(\overline{A_1})=\frac{1}{4}$，$P(\overline{A_2})=\frac{1}{4}$，$P(B|A_1)=P(A_2)$，$P(B|\overline{A_1})=P(\overline{A_2})$，则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(\overline{A_1})P(B|\overline{A_1})=P(A_1)P(A_2)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$，即第二回合比赛有运动员得分的概率为 $\frac{5}{8}$.

(2)设运动员甲先发球，记事件 M_i 表示第 i 回合运动员甲赢球，记事件 M 表示运动员甲先得第一分，则 $M=M_1\cup(\overline{M_1}M_2M_3)\cup(\overline{M_1}M_2\overline{M_3}M_4M_5)\cup\cdots$，则 $P(M)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots$，所以 $P(M)>\frac{1}{2}$，即第一回合发球者在整场比赛中先得第一分的概率大于 $\frac{1}{2}$，则比赛双方运动员实力相当的情况下，先发球者更大概率占据心理上的优势，所以旧制不合理.

增分微练 9　利用数列递推关系解决概率问题

1. 解：(1)记“第 i 次投篮的人是甲”为事件 A_i，“第 i 次投篮的人是乙”为事件 B_i，所以 $P(B_2)=P(A_1B_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)=0.5\times(1-0.6)+0.5\times0.8=0.6$.

(2)设 $P(A_i)=p_i$，依题可知，$P(B_i)=1-p_i$，$P(A_{i+1})=P(A_iA_{i+1})+P(B_iA_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}|A_i)+P(B_i)P(A_{i+1}|B_i)$，

即 $p_{i+1}=0.6p_i+(1-0.8)\times(1-p_i)=0.4p_i+0.2$，构造等比数列 $\{p_i+\lambda\}$，

设 $p_{i+1}+\lambda=\frac{2}{5}(p_i+\lambda)$，解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$，

则 $p_{i+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_i-\frac{1}{3}\right)$，

又 $p_1=\frac{1}{2}$，$p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，所以 $\left\{p_i-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$，公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列，

则 $p_i-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$，即 $p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$，即第 i 次投篮的人是甲的概率为 $\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$.

2. 解：(1)设“抽到甲参与传球训练”为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_6^2}{C_7^3}=\frac{3}{7}$.

(2)设经过 n 次传球后甲接到球的概率为 P_n，则 $P_n=P_{n-1}\times0+(1-P_{n-1})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P_{n-1}(n\geqslant2)$，即 $P_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{4}\right)(n\geqslant2)$，

而 $P_1-\frac{1}{4}=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$，所以 $\left\{P_n-\frac{1}{4}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，则 $P_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，即 $P_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

3. 解：由题意可得每次叫价增加 1 元的概率为 $\frac{2}{3}$，每次叫价增加 2 元的概率为 $\frac{1}{3}$.

设叫价为 n 元的概率为 P_n，叫价出现 n $(3\leqslant n\leqslant10)$ 元的情况只有下列两种：

①叫价为 $n-1$ 元，且骰子点数大于 2，其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}$；

②叫价为 $n-2$ 元，且骰子点数小于 3，其概率为 $\frac{1}{3}P_{n-2}$.

所以 $P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}(n\geqslant3)$，易得 $P_1=\frac{2}{3}$，$P_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$，因为 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-P_{n-2})(n\geqslant3)$，所以当 $n\geqslant2$ 时，数列 $\{P_n-P_{n-1}\}$ 是首项为 $\frac{1}{9}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，

所以 $P_n-P_{n-1}=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}(n\geqslant2)$，所以 $P_{10}=P_1+(P_2-P_1)+(P_3-P_2)+\cdots+(P_9-P_8)+(P_{10}-P_9)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{9}\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^9\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\approx0.75$，故甲同学获得该笔记本购买资格的概率约为 0.75.

4. 解：(1)依题意得，每次抛出游戏币 a_2 落下时正面朝上的概率均为 $\frac{1}{4}$，故 $X\sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$，所以 $E(X)=\frac{1}{4}\times10=\frac{5}{2}$.

由 $C_{10}^t\left(\frac{1}{4}\right)^t\left(\frac{3}{4}\right)^{10-t}\geqslant C_{10}^{t-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{t-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{11-t}$，

$C_{10}^t\left(\frac{1}{4}\right)^t\left(\frac{3}{4}\right)^{10-t}\geqslant C_{10}^{t+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{t+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{9-t}$，得 $\frac{7}{4}\leqslant t\leqslant\frac{11}{4}$，

所以当 $t=2$ 时，$P(X=t)$ 最大.

(2)记事件 A_i 为“第 a_i 枚游戏币向上抛出后，正面朝上”，则 $P(A_i)=\frac{1}{2i}$，$i=1,2,3$，Y 的所有可能取值为 0，1，2，3，由事件 A_i 相互独立，得 $P(Y=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{16}$，

$P(Y=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{23}{48}$，

$P(Y=2)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{6}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{8}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{12}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{24}=\frac{3}{16}$，

$P(Y=3)=P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{48}$. 故 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{23}{48}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{48}$

(3)不妨假设按照 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的顺序抛这 n 枚游戏币.

记抛出游戏币 a_k 后，正面朝上的游戏币个数为奇数的概率为 P_k，$k=1,2,\cdots,n$，

则 $P_k=P_{k-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2k}\right)+(1-P_{k-1})\cdot\frac{1}{2k}=P_{k-1}-\frac{P_{k-1}}{2k}+\frac{1}{2k}-\frac{P_{k-1}}{2k}=\left(1-\frac{1}{k}\right)P_{k-1}+\frac{1}{2k}$，$k\geqslant2$，

即 $P_k=\frac{k-1}{k}\cdot P_{k-1}+\frac{1}{2k}$，$k\geqslant2$，

即 $kP_k=(k-1)P_{k-1}+\frac{1}{2}$，$k\geqslant2$.

记 $b_k=kP_k$，则 $b_k-b_{k-1}=\frac{1}{2}$，$k\geqslant2$，

故数列 $\{b_k\}$ 是首项为 $1\times P_1=\frac{1}{2}$，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，故 $b_k=\frac{1}{2}+(k-1)\times\frac{1}{2}=\frac{k}{2}$，则 $kP_k=\frac{k}{2}$，故 $P_k=\frac{1}{2}$，$k=1,2,3,\cdots,n$，则 $P_n=\frac{1}{2}$，因此这个游戏规则公平.

5. 解：(1)设家用机器人经过前三道工序后是合格品的概率为 p，则 $p=\left(1-\frac{1}{23}\right)\times\left(1-\frac{1}{24}\right)\times\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{22}{25}$，

设“家用机器人智能自动检测合格”为事件 A，“人工抽检合格”为事件 B，

则 $P(A)=\frac{99}{100}$，$P(AB)=\frac{22}{25}$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{22}{25}\times\frac{100}{99}=\frac{8}{9}$，

即在人工抽检时，工人抽检一个家用 AI 机器人恰好为合格品的概率为 $\frac{8}{9}$.

(2)设乙箱中有 n 个球的概率为 P_n $(1\leqslant n\leqslant10)$，抽到奇数和偶数的概率都为 $\frac{1}{2}$.

若第一次抽到奇数，家用机器人运 1 个乒

乒球，概率为$\frac{1}{2}$，即$P_1=\frac{1}{2}$，

若乙箱中有2个球，分两种情况，

所以$P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

乙箱中有$n(3\leqslant n\leqslant 9)$个球的情况有：

①家用机器人已运$(n-2)$个球，又抽出偶数，其概率为$\frac{1}{2}P_{n-2}$；

②家用机器人已运$(n-1)$个球，又抽出奇数，其概率为$\frac{1}{2}P_{n-1}$.

所以$P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}(3\leqslant n\leqslant 9)$，

所以$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$ $(3\leqslant n\leqslant 9)$，又$P_2-P_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

所以当$2\leqslant n\leqslant 9$时，数列$\{P_n-P_{n-1}\}$是首项为$\frac{1}{4}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，

所以$P_n-P_{n-1}=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2\leqslant n\leqslant 9)$，所以$P_2-P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$，$P_3-P_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$，…，$P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2\leqslant n\leqslant 9)$，

上述各式相加得$P_n-P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right](2\leqslant n\leqslant 9)$，

又$P_1=\frac{1}{2}$，所以$P_n=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right](2\leqslant n\leqslant 9)$，经检验，当$n=1$时上式也成立，所以$P_n=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right](1\leqslant n\leqslant 9,n\in\mathbf{N}^*)$，

所以$P_9=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right]=\frac{341}{512}$，即获得“优惠券”的概率为$\frac{341}{512}$.

第66讲　离散型随机变量的分布列、数字特征

1. D　[解析] $P(X\geqslant 9)=1-P(X=8)=1-0.36=0.64$，故选D.

2. B　[解析] 由已知得$\begin{cases}m+2n=\frac{5}{3},\\ m+n=1,\end{cases}$得$m=\frac{1}{3}$，故选B.

3. A　[解析] $E(X)=0\times 0.7+1\times 0.1+2\times 0.1+3\times 0.1=0.6$，$E(Y)=0\times 0.5+1\times 0.3+2\times 0.2=0.7$. 由于$E(Y)>E(X)$，故甲比乙生产的标准件的质量好.

4. A　[解析] 由题意知，X的所有可能取值为2，3，则$P(X=2)=\frac{1}{C_3^2}=\frac{1}{3}$，$P(X=3)=\frac{2}{C_3^2}=\frac{2}{3}$，所以$E(X)=2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$，则$D(X)=2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{2}{3}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，故选A.

5. ABD　[解析] 因为随机变量X的分布列为$P(X=k)=\frac{a}{k+1}(k=1,2,5)$，所以由分布列的性质可知，$P(X=1)+P(X=2)+P(X=5)=\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{6}=1$，解得$a=1$. $P(0<X<3.5)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，故A中结论错误；因为$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{6}=2$，所以$E(3X+2)=3E(X)+2=3\times 2+2=8$，故B中结论错误；$D(X)=\frac{1}{2}\times(1-2)^2+\frac{1}{3}\times(2-2)^2+\frac{1}{6}\times(5-2)^2=2$，故C中结论正确；因为$D(X)=2$，所以$D(3X+1)=9\times D(X)=18$，故D中结论错误. 故选ABD.

6. 0.8　[解析] 因为随机变量X服从两点分布，且$P(X=1)=0.2$，所以$P(X=0)=1-P(X=1)=1-0.2=0.8$，因为$Y=3X-2$，所以$P(Y=-2)=P(X=0)=0.8$.

7. $\frac{3}{16}$　[解析] 依题意，X^2的所有可能取值为0，1，且$P(X^2=0)=\frac{1}{4}$，$P(X^2=1)=\frac{3}{4}$，则$E(X^2)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$，所以$D(X^2)=\left(0-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$.

8. B　[解析] 依题意可得X的所有可能取值为200，180，160，$P(X=200)=0.4$，$P(X=180)=0.3$，$P(X=160)=0.3$，则$E(X)=200\times 0.4+(180+160)\times 0.3=182$. 故选B.

9. A　[解析] 由题意可知$a+b=1$，若$E(X)=\frac{4}{3}$，则$a+2b=\frac{4}{3}$，得$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$，$D(X)=\left(\frac{4}{3}-1\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，故充分性成立. 若$D(X)=\frac{2}{9}$，则$(a+2b-1)^2a+(a+2b-2)^2b=ab^2+b(b-1)^2=-b^2+b=\frac{2}{9}$，解得$b=\frac{1}{3}$或$b=\frac{2}{3}$，当$b=\frac{1}{3}$时，$a=\frac{2}{3}$，此时$E(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$；当$b=\frac{2}{3}$时，$a=\frac{1}{3}$，此时$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$，则$E(X)=\frac{4}{3}$或$E(X)=\frac{5}{3}$，故必要性不成立. 故选A.

10. ABD　[解析] 由离散型随机变量X的分布列性质可得$m=1-0.1-0.2-0.2-0.1=0.4$，故A正确；$E(X)=0\times 0.1+1\times 0.2+2\times 0.4+3\times 0.2+4\times 0.1=2$，$D(X)=(0-2)^2\times 0.1+(1-2)^2\times 0.2+(2-2)^2\times 0.4+(3-2)^2\times 0.2+(4-2)^2\times 0.1=1.2$，故B正确；由于$Y=2X+1$，故$E(Y)=2E(X)+1=5$，$D(Y)=4D(X)=4.8$，故C错误，D正确. 故选ABD.

11. ABC　[解析] 对于A，当$n=1$时，$i=1$，$p_1=1$，$H(X)=-(1\times\log_3 1)=0$，A正确；对于B，当$n=3$且$p_i=\frac{1}{3}(i=1,2,3)$时，$H(X)=-3\left(\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{3}\right)=1$，B正确；对于C，$p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，$H(X)=-n\left(\frac{1}{n}\log_3\frac{1}{n}\right)=\log_3 n$，则$H(X)$随着$n$的减小而减小，C正确；对于D，当$n=2$时，$H(X)=-[p_1\log_3 p_1+(1-p_1)\log_3(1-p_1)]$，当$p_1=\frac{1}{4}$时，$H(X)=-\left(\frac{1}{4}\log_3\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\log_3\frac{3}{4}\right)$，当$p_1=\frac{3}{4}$时，$H(X)=-\left(\frac{3}{4}\log_3\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\log_3\frac{1}{4}\right)$，两者相等，D错误. 故选ABC.

12. $\frac{13}{4}$　[解析] 由题意得a的所有可能取值为1，2，$P(a=2)=\frac{C_3^3}{C_4^3}=\frac{1}{4}$，$P(a=1)=\frac{C_3^2C_1^1}{C_4^3}=\frac{3}{4}$，$b$的所有可能取值为3，4，5，$P(b=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(b=4)=\frac{C_3^2C_1^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(b=5)=\frac{C_4^2C_1^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，所以$E(X)=E(b-a)=E(b)-E(a)=\left(3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{3}{5}\right)-\left(2\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{2}-\frac{5}{4}=\frac{13}{4}$.

13. $\frac{6}{5}$　[解析] X的所有可能取值为0，1，2，3，大正方体8个顶点处的8个小正方体涂有3面油漆；每一条棱上除了两个顶点处的小正方体外剩余的都涂有2面油漆，所以涂有2面油漆的小正方体有$3\times 12=36$(个)；每个表面去掉四条棱上的16个小正方体，还剩9个小正方体，这9个都涂有1面油漆，所以一共有$9\times 6=54$(个)小正方体涂有1面油漆；剩余的$125-(8+36+54)=27$(个)小正方体6个面都没有涂油漆. 所以$P(X=0)=\frac{27}{125}$，$P(X=1)=\frac{54}{125}$，$P(X=2)=\frac{36}{125}$，$P(X=3)=\frac{8}{125}$，$E(X)=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{150}{125}=\frac{6}{5}$.

14. 解：(1)设第一次取出的4件产品中恰有3件优质品为事件A_1，第一次取出的4件产品全是优质品为事件A_2，

第二次取出的4件产品全是优质品为事件B_1，第二次取出的1件产品是优质品为事件B_2，这批产品通过检验为事件A，依题意有$A=(A_1B_1)\cup(A_2B_2)$，且A_1B_1与A_2B_2互斥，

所以$P(A)=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)=P(A_1)P(B_1\mid A_1)+P(A_2)P(B_2\mid A_2)=\frac{4}{16}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{64}$.

(2)X的所有可能取值为400，500，800，

$P(X=800)=\frac{1}{4}$，$P(X=500)=\frac{1}{16}$，

$P(X=400)=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$，故$X$的分布列为

X	400	500	800
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

15. 解：(1)设顾客抽一次奖获得购物券的金额为X元，则X的所有可能取值为

200，80，10，$P(X=200)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$，$P(X=80)=\frac{C_2^1C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$，$P(X=10)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$，所以 X 的分布列为

X	200	80	10
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

(2)方案甲，设改进方案后顾客抽一次奖获得购物券的金额为 Y 元，则 Y 的所有可能取值为 200，80，10，$P(Y=200)=\frac{C_3^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{22}$，$P(Y=80)=\frac{C_3^1C_9^1}{C_{12}^2}=\frac{9}{22}$，$P(Y=10)=\frac{C_9^2}{C_{12}^2}=\frac{6}{11}$，则 $E(Y)=200\times\frac{1}{22}+80\times\frac{9}{22}+10\times\frac{6}{11}=\frac{520}{11}$.

方案乙，设改进方案后顾客抽一次奖获得购物券的金额为 Z 元，则 $E(Z)=210\times\frac{1}{45}+90\times\frac{16}{45}+20\times\frac{28}{45}=\frac{442}{9}$. 因为 $E(Z)>E(Y)$，所以希望采用方案乙.

16. 解：(1)用事件 A 表示该小组初赛胜利，则 $P(A)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{23}{24}$，

所以该小组初赛胜利的概率为 $\frac{23}{24}$.

(2)若依次派出甲、乙、丙进行闯关，设初赛闯关的人员数目为 X_1，则 X_1 的所有可能取值为 1，2，3，则 $P(X_1=1)=p_1$，$P(X_1=2)=(1-p_1)p_2$，$P(X_1=3)=(1-p_1)(1-p_2)$，故 $E(X_1)=p_1+2(1-p_1)p_2+3(1-p_1)(1-p_2)=p_1p_2-2p_1-p_2+3$.

若依次派出丙、乙、甲进行闯关，设初赛闯关的人员数目为 X_2，则 X_2 的所有可能取值为 1，2，3，则 $P(X_2=1)=p_3$，$P(X_2=2)=(1-p_3)p_2$，$P(X_2=3)=(1-p_3)(1-p_2)$，故 $E(X_2)=p_3+2(1-p_3)p_2+3(1-p_3)(1-p_2)=p_2p_3-2p_3-p_2+3$.

则 $E(X_1)-E(X_2)=p_1p_2-2p_1-p_2+3-(p_2p_3-2p_3-p_2+3)=p_1p_2-2p_1-p_2p_3+2p_3=p_2(p_1-p_3)-2(p_1-p_3)=(p_1-p_3)(p_2-2)$，因为 $1>p_1>p_2>p_3$，所以 $p_1-p_3>0$，$p_2-2<0$，所以 $E(X_1)<E(X_2)$，所以要使初赛闯关人员数目的期望较小，应先派出甲闯关.

(3)由题意可得 $\frac{1}{8}=a^2b$，$b=\frac{1}{8a^2}$，

则 $p=a^2(1-b)+C_2^1a(1-a)b=a^2+2ab-\frac{3}{8}=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$.

令 $f(a)=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$，$0<a\leqslant1$，

则 $f'(a)=2a-\frac{1}{4a^2}=\frac{8a^3-1}{4a^2}=\frac{(2a-1)(4a^2+2a+1)}{4a^2}$，令 $f'(a)=0$，得 $a=\frac{1}{2}$，所以当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f'(a)<0$，$f(a)$ 单调递减，

当 $\frac{1}{2}<a\leqslant1$ 时，$f'(a)>0$，$f(a)$ 单调递增，所以 $f(a)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$，所以 p 的最小值为 $\frac{3}{8}$.

第 67 讲　二项分布与超几何分布、正态分布

1. B　[解析] $\because X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$P(X\geqslant4)=P(X\leqslant-2)$，$\therefore\mu=\frac{4-2}{2}=1$. 故选 B.

2. A　[解析] 由题可知，X 服从超几何分布，所以 $P(X=2)=\frac{C_7^2C_8^8}{C_{15}^{10}}$. 故选 A.

3. C　[解析] 依题意，四道题中恰好做对两道的概率 $P=C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$. 故选 C.

4. C　[解析] 由题图可知 $X\sim N\left(1,\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$，因为 $P(X<0)=p$，所以 $P(0<X<1)=\frac{1-2p}{2}=\frac{1}{2}-p$，$D(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. 故选 C.

5. BCD　[解析] 对于 A，因为 $X\sim B(4,p)$，$E(X)=\frac{3}{2}D(X)$，所以 $\frac{3}{2}\times4p(1-p)=4p$，得 $p=\frac{1}{3}$，故 A 错误；对于 B，由 A 知随机变量 $X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，则 $E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，故 B 正确；对于 C，$E(2X+1)=2E(X)+1=\frac{11}{3}$，故 C 正确；对于 D，$D(2X+1)=4D(X)=4\times4\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{9}$，故 D 正确. 故选 BCD.

6. $\frac{14}{15}$　[解析] 由题意知 X 服从超几何分布，X 的所有可能取值为 0，1，2，$P(X=0)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$，$P(X=1)=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$，所以 $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{7}{15}+\frac{7}{15}=\frac{14}{15}$.

7. $\frac{16}{27}$　[解析] 因为 $P(X>0)=2P(X\leqslant0)$，$P(X>0)+P(X\leqslant0)=1$，所以 $P(X\leqslant0)=\frac{1}{3}$，$P(X>0)=\frac{2}{3}$，所以至少有 3 个季度的收益率为正值的概率为 $C_4^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}+C_4^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{27}$.

8. C　[解析] 由题意可知，逆时针方向移动的概率为 $\frac{2}{3}$，顺时针方向移动的概率为 $\frac{1}{3}$，由 A 点出发，3 次移动后到达点 B，则 3 次移动中有 2 次逆时针方向移动，1 次顺时针方向移动，所以所求概率 $P=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$. 故选 C.

9. B　[解析] 根据题意得标准差为 $57.4\times0.36=20.664$，所以测试结果 X 近似服从正态分布 $N(57.4,20.664^2)$，又因为 $84\%=0.5+\frac{0.68}{2}$，且 $P(|X-\mu|\leqslant\sigma)\approx0.68$，所以全体学生成绩的第 84 百分位数约为 $57.4+20.664\approx78$. 故选 B.

10. AC　[解析] 从中随机有放回地摸出 3 个球，则每次摸到红球的概率为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，则 $X_1\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，故 $E(X_1)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$，$D(X_1)=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}$. 从中随机不放回地摸出 3 个球，则 X_2 的可能取值是 0，1，2，3，则 $P(X_2=0)=\frac{C_4^0\cdot C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，$P(X_2=1)=\frac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，$P(X_2=2)=\frac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，$P(X_2=3)=\frac{C_4^3\cdot C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$，所以随机变量 X_2 的分布列为

X_2	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$E(X_2)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$，$D(X_2)=\left(0-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(1-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(2-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{3}{10}+\left(3-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{1}{30}=\frac{14}{25}$. 故 $E(X_1)=E(X_2)$，$D(X_1)>D(X_2)$. 故选 AC.

11. ACD　[解析] 对于选项 A，因为 $M\sim N(250,\sigma^2)$，所以 $P(M>249)=P(M<251)=0.75$，A 正确. 对于选项 B，因为 $P(M<251)=0.75$，所以 $P(249<M<250)=P(250<M<251)=0.75-0.5=0.25$，所以 $P(251<M<253)=0.7-0.25\times2=0.2$，B 错误. 对于选项 C，因为 $P(249<M<253)=0.7$，所以 $P(M>253)=0.75-0.7=0.05$，若从该阿胶产品中随机选取 1000 盒，则质量大于 253 g 的盒数 $X\sim B(1000,0.05)$，所以 $D(X)=1000\times0.05\times(1-0.05)=47.5$，C 正确. 对于选项 D，$P(251<M<253)=0.2$，若从该阿胶产品中随机选取 1000 盒，则质量在 (251，253) 内的盒数 $Y\sim B(1000,0.2)$，所以 $E(Y)=1000\times0.2=200$，D 正确. 故选 ACD.

12. $\frac{17}{81}$　[解析] 依题意，当 $X>0$ 时，X 的所有可能取值为 1，3，5，设质点向右移动的次数为 Y，则 $Y\sim B\left(5,\frac{1}{3}\right)$，所以 $P(X>0)=P(X=5)+P(X=3)+P(X=1)=P(Y=5)+P(Y=4)+P(Y=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^5+C_5^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}+C_5^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{17}{81}$.

13. 8 或 9　[解析] 设击中目标的次数为 X，由题可知，$X\sim B(14,0.6)$，则 $P(X=k)=C_{14}^k\cdot0.6^k\cdot0.4^{14-k}$，$0\leqslant k\leqslant14$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}C_{14}^k\cdot0.6^k\cdot0.4^{14-k}\geqslant C_{14}^{k-1}\cdot0.6^{k-1}\cdot0.4^{15-k},\\C_{14}^k\cdot0.6^k\cdot0.4^{14-k}\geqslant C_{14}^{k+1}\cdot0.6^{k+1}\cdot0.4^{13-k},\end{cases}$ 化简得 $\begin{cases}0.6\times(14-k+1)\geqslant0.4k,\\0.4\times(k+1)\geqslant0.6(14-k),\end{cases}$ 解得 $8\leqslant k\leqslant9$，又 $k\in\mathbf{Z}$，所以最有可能击中目标 8 或 9 次.

14. 解：(1)10 个超大城市中包含 4 个一线城市，所以从 10 个超大城市中随机抽取一个城市，该城市是一线城市的概率为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

(2)10 个超大城市中包含 6 个新一线城市，X 的所有可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\dfrac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$，$P(X=1)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$，$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$，$P(X=3)=\dfrac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{30}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{9}{5}$.

(3)$E(X)=E(Y)$.

理由如下：从 10 个超大城市中按可放回抽样的方式随机抽取 3 个城市，

随机变量 $Y\sim B\left(3,\dfrac{3}{5}\right)$，$E(Y)=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$，所以 $E(X)=E(Y)$.

15. 解：(1)依题意 $X\sim N(180,\sigma^2)$，令 $Y=\dfrac{X-180}{\sigma}$，则 $Y\sim N(0,1)$，

由题意 $P(X\geqslant360)=\dfrac{30}{2000}=\dfrac{3}{200}$，

则 $P(X<360)=1-\dfrac{3}{200}=0.985$，

所以 $P\left(Y<\dfrac{360-180}{\sigma}\right)=0.985$，

又因为 $P(Y<2.17)\approx0.985$，所以 $\dfrac{360-180}{\sigma}\approx2.17$，解得 $\sigma\approx83$.

(2)由(1)可得 $X\sim N(180,83^2)$，

设最低录取分数为 x_0，则 $P(X\geqslant x_0)=P\left(Y\geqslant\dfrac{x_0-180}{83}\right)=\dfrac{300}{2000}=\dfrac{3}{20}$，

则 $P\left(Y<\dfrac{x_0-180}{83}\right)=1-\dfrac{3}{20}=0.85$，

又因为 $P(Y<1.04)\approx0.85$，所以 $\dfrac{x_0-180}{83}\approx1.04$，所以 $x_0\approx266.32$，所以该单位的最低录取分数线为 266 分.

(3)考生甲的成绩为 286 分，大于 266 分，$P(X<286)=P\left(Y<\dfrac{286-180}{83}\right)\approx P(Y<1.28)\approx0.900$，则不低于考生甲的成绩的人数约为 $2000\times(1-0.900)=200$，即考生甲大约排在第 200 名，所以甲能获得高薪职位.

16. 解：(1)这 500 名学生中参加公益劳动时间在(12,14]，(14,16]，(16,18]内的学生人数分别为 $500\times0.10=50$，$500\times0.08=40$，$500\times0.02=10$，若采用按比例分配的分层随机抽样的方法抽取 10 人，

则从参加公益劳动时间在(14,16]内的学生中抽取 $\dfrac{40}{50+40+10}\times10=4$(人)，

从这 10 人中随机抽取 3 人，则 X 的所有可能取值为 0,1,2,3，

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$，

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

则 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$.

(2)由频率分布直方图得，$2\times(0.02+0.03+0.05+0.05+0.15+a+0.05+0.04+0.01)=1$，解得 $a=0.10$，

则参加公益劳动时间在(10,12]内的概率 $P=0.1\times2=0.2$，所以 $P_{20}(k)=C_{20}^k0.2^k(1-0.2)^{20-k}=C_{20}^k0.2^k0.8^{20-k}$.

依题意得 $\begin{cases}P_{20}(k)\geqslant P_{20}(k-1),\\P_{20}(k)\geqslant P_{20}(k+1),\end{cases}$

即 $\begin{cases}C_{20}^k0.2^k0.8^{20-k}\geqslant C_{20}^{k-1}0.2^{k-1}0.8^{21-k},\\C_{20}^k0.2^k0.8^{20-k}\geqslant C_{20}^{k+1}0.2^{k+1}0.8^{19-k},\end{cases}$

即 $\begin{cases}0.2\times\dfrac{20-k+1}{k}\geqslant0.8,\\0.8\geqslant0.2\times\dfrac{20-k}{k+1},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{16}{5}\leqslant k\leqslant\dfrac{21}{5}$，因为 k 为非负整数，所以 $k=4$，

即当 $P_{20}(k)$ 最大时，$k=4$.

培优专训(八)　概率与其他知识的交汇问题

1. 解：(1)由题得 2×2 列联表如下，

单位：人

对宣传活动是否了解	性别		合计
	男	女	
了解	40	20	60
不了解	20	20	40
合计	60	40	100

(2)零假设为 H_0：该校学生对该宣传活动的了解情况与性别无关联，由(1)可得 $\chi^2=\dfrac{100\times(40\times20-20\times20)^2}{60\times40\times60\times40}=\dfrac{25}{9}\approx2.778<3.841=x_{0.05}$，

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，

因此可以认为 H_0 成立，即认为该校学生对该宣传活动的了解情况与性别无关联.

(3)由(1)可知抽取的 100 名学生中了解该活动的男生和女生分别为 40 人和 20 人，所以从了解该活动的学生中随机抽取 1 人，抽到女生的概率为 $\dfrac{20}{40+20}=\dfrac{1}{3}$，

由题意可知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3，且 $X\sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，所以 $P(X=0)=C_3^0\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$，$P(X=1)=C_3^1\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$，

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

数学期望 $E(X)=3\times\dfrac{1}{3}=1$.

2. 解：(1)从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加“体育锻炼”活动时间在[50,60)内的概率为 $\dfrac{9}{6+9+10+10+6+4}=\dfrac{1}{5}$.

(2)依题意，X 的所有可能取值为 0,1,2，参加“体育锻炼”活动时间在[80,90)内的学生人数为 15，其中初中生 10 人，

参加“体育锻炼”活动时间在[90,100)内的学生人数为 12，其中初中生 8 人.

记事件 C 为“从参加活动时间在[80,90)内的学生中随机抽取 1 人，抽到的是初中学生”，事件 D 为“从参加活动时间在[90,100)内的学生中随机抽取 1 人，抽到的是初中学生”，事件 C,D 相互独立，

$P(C)=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$，$P(D)=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$，

则 $P(X=0)=P(\overline{C}\,\overline{D})=P(\overline{C})P(\overline{D})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，$P(X=1)=P(C\overline{D}+\overline{C}D)=P(C)P(\overline{D})+P(\overline{C})P(D)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，$P(X=2)=P(CD)=P(C)P(D)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{9}+1\times\dfrac{4}{9}+2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{3}$.

(3)根据男女生人数先补全初高中学生各区间人数，如下表，

类别		时间		
		[0,50)	[50,60)	[60,70)
性别	男	5	12	13
	女	6	9	10
学段	初中	$11-m$	8	11
	高中	m	13	12

类别		时间		
		[70,80)	[80,90)	[90,100)
性别	男	8	9	8
	女	10	6	4
学段	初中	11	10	8
	高中	7	5	4

在[50,100)内初中生参加活动的总时间 $t_1=8\times55+11\times65+11\times75+10\times85+8\times95=3590$，在[50,100)内高中生参加活动的总时间 $t_2=13\times55+12\times65+7\times75+5\times85+4\times95=2825$，

则 $\mu_0=\dfrac{1}{100}\times(11\times25+3590+2825)=66.9$，$\mu_1=\dfrac{1}{59-m}[25(11-m)+3590]=\dfrac{2390}{59-m}+25$，

$\mu_2=\dfrac{1}{41+m}(25m+2825)=25+\dfrac{1800}{41+m}$，

由 $\mu_0=\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$，得 $83.8=\dfrac{2390}{59-m}+$

$\frac{1800}{41+m}$，可得 $m=9$.

3. 解：(1)记事件“$X=2$ 且乙获胜”为事件 A，则这两个球均由乙得分，

所以 $P(A)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

(2)事件“$X=4$”表示在双方 10∶10 平后，甲先发球，两人又打了 4 个球，且这 4 个球中前两球是甲、乙各得 1 分，后两个球均由甲得分，或均由乙得分，

所以 $P(X=4)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

(3)证明：由比赛规则可知，

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$a_n=0$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，事件“$X=n$ 且甲获胜”表示在双方 10∶10 平后，甲先发球，两人又打了 $2k$ 个球，且这 $2k$ 个球的得分情况为：前 $(2k-2)$ 个球是每两个球甲、乙各得 1 分，最后第 $2k-1$，$2k$ 个球均由甲得分. 记“比赛 2 局结果为平局”为事件 B，则 $P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $a_{n+2}=\frac{1}{2}a_n$.

又因为 $a_2=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$，所以 $a_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$.

综上，$a_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}, & n=2k,\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{N}^*$.

当 $n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]$，

当 $n=2k,k\in\mathbf{N}^*$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right]$，

因为 $0<1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}<1$，$0<1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}<1$，所以 $\sum_{i=1}^{n}a_i<\frac{2}{3}$.

4. 解：(1)根据题意，某天采访刚好到第五位可停止当天采访，即采访的前四位中有一位是“达标成年人”，第五位必是“达标成年人”，所以某天采访刚好到第五位可停止当天采访的概率为 $C_4^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{32}{243}$.

(2)依题意，$P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2$，$P(X=3)=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$，$P(X=4)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$，…，$P(X=n)=C_{n-1}^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1}{3}$，

由题得 $\left(\frac{1}{3}\right)^2+C_2^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+C_3^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+C_{n-1}^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}>\frac{1}{3}$，化简得 $\frac{1}{9}\left[1+2\times\frac{2}{3}+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]>\frac{1}{3}$，即 $1+2\times\frac{2}{3}+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}>3$，

记 $S=1+2\times\frac{2}{3}+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ ①，

则 $\frac{2}{3}S=1\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ②，由①−②，可得 $\frac{1}{3}S=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，即 $\frac{1}{3}S=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}-(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，得 $S=9-(2n+4)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$，

由此可得，$9-(2n+4)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}>3$，

即 $6>(2n+4)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$，

设 $a_n=(2n+4)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}(n\in\mathbf{N}^*)$，

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+6)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{(2n+4)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}=\frac{2n+6}{3n+6}<1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，

又 $a_3=10\times\frac{2}{3}=\frac{20}{3}>6$，$a_4=12\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{3}<6$，

所以整数 n 的最小值为 4.

5. 解：(1)由题意知样本相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{700}{\sqrt{80\times8000}}=\frac{7}{8}=0.875>0.75$，

所以 y 与 x 之间具有较强的线性相关关系，可用线性回归模型进行拟合.

(2)由题意可得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{700}{80}=8.75$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=\frac{4000}{20}-8.75\times\frac{80}{20}=200-8.75\times4=165$，所以 $\hat{y}=8.75x+165$.

(3)以频率估计概率，甲款垃圾处理机器的使用年限 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5
P	0.05	0.2	0.15	0.1	0.5

$E(X)=1\times0.05+2\times0.2+3\times0.15+4\times0.1+5\times0.5=3.8$.

乙款垃圾处理机器的使用年限 Y 的分布列为

Y	1	2	3	4	5
P	0.15	0.2	0.1	0.05	0.5

$E(Y)=1\times0.15+2\times0.2+3\times0.1+4\times0.05+5\times0.5=3.55$.

因为 $E(X)>E(Y)$，所以该机构选择购买甲款垃圾处理机器才能使用更长久.

6. 解：(1)由题意，估计从该品牌芯片的生产线中随机抽取 100 件产品质量指标值的平均数 $\overline{x}=10\times(0.01\times50+0.025\times60+0.04\times70+0.015\times80+0.01\times90)=69$.

即 $\mu\approx\overline{x}=69$，$\sigma\approx s\approx11$，所以 $X\sim N(69,11^2)$，所以 $P(X\geqslant80)=\frac{1-P(69-11<X<69+11)}{2}=\frac{1-P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)}{2}\approx\frac{1-0.6827}{2}=0.15865\approx0.16$，

所以从生产线中任取一件芯片，该芯片为 A 等品的概率约为 0.16.

(2)(i)样本中质量指标值在 $[45,55)$ 内的芯片件数为 $0.01\times10\times100=10$，

质量指标值在 $[85,95]$ 内的芯片件数为 $0.01\times10\times100=10$，故 M 的所有可能取值为 0，1，2，3，$P(M=0)=\frac{C_{10}^3C_{10}^0}{C_{20}^3}=\frac{2}{19}$，

$P(M=1)=\frac{C_{10}^2C_{10}^1}{C_{20}^3}=\frac{15}{38}$，

$P(M=2)=\frac{C_{10}^1C_{10}^2}{C_{20}^3}=\frac{15}{38}$，$P(M=3)=\frac{C_{10}^0C_{10}^3}{C_{20}^3}=\frac{2}{19}$，

随机变量 M 的分布列为

M	0	1	2	3
P	$\frac{2}{19}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{2}{19}$

$E(M)=0\times\frac{2}{19}+1\times\frac{15}{38}+2\times\frac{15}{38}+3\times\frac{2}{19}=\frac{3}{2}$.

(ii)设每箱产品中 A 等品有 Y 件，则每箱产品中 B 等品有 $(100-Y)$ 件，

设每箱产品的利润为 Z 元，由题意知 $Z=mY+(100-Y)\ln(25-m)=[m-\ln(25-m)]Y+100\ln(25-m)$，

由(1)知，在每箱芯片中抽 1 件，抽中 A 等品的概率为 0.16，所以 $Y\sim B(100,0.16)$，所以 $E(Y)=100\times0.16=16$，

所以 $E(Z)=E\{[m-\ln(25-m)Y]+100\ln(25-m)\}=[m-\ln(25-m)]E(Y)+100\ln(25-m)=16[m-\ln(25-m)]+100\ln(25-m)=16m+84\ln(25-m)$.

令 $f(x)=16x+84\ln(25-x)(1<x<24)$，由 $f'(x)=16-\frac{84}{25-x}=0$，得 $x=\frac{79}{4}$，又当 $x\in\left(1,\frac{79}{4}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\frac{79}{4},24\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

所以当 $x=\frac{79}{4}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，

所以当 $m=\frac{79}{4}$ 时，每箱产品的利润最大.

重点强化练（一）

1. C ［解析］若 $a>1$，则 $4a+\frac{1}{a-1}=4(a-1)+\frac{1}{a-1}+4\geqslant 2\sqrt{4(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}+4=8$，当且仅当 $4(a-1)=\frac{1}{a-1}$，即 $a=\frac{3}{2}$ 时，等号成立，所以 $4a+\frac{1}{a-1}$ 的最小值为 8. 故选 C.

2. C ［解析］由已知得 $x>2$，所以 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-2}}=\frac{(\sqrt{x-2})^2+2}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $\sqrt{x-2}=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$，即 $x=4$ 时，等号成立，所以 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$. 故选 C.

3. A ［解析］根据题意可得 $\frac{3}{a}+\frac{6}{b}=\frac{1}{3}(a+2b)\left(\frac{3}{a}+\frac{6}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(3+\frac{6a}{b}+\frac{6b}{a}+12\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(15+2\sqrt{\frac{6a}{b}\cdot\frac{6b}{a}}\right)=9$，当且仅当 $\frac{6a}{b}=\frac{6b}{a}$，即 $a=b=1$ 时，等号成立，所以 $\frac{3}{a}+\frac{6}{b}$ 的最小值为 9. 故选 A.

4. B ［解析］当 $a=2,b=3$ 时，满足 $a^2+b^2>2ab$，但不满足 $a^2>b^2$，故充分性不成立；因为 $a^2>b^2$，所以 $a\neq b$，又 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$，所以 $a^2+b^2>2ab$，故必要性成立. 所以“$a^2+b^2>2ab$”是“$a^2>b^2$”的必要不充分条件. 故选 B.

5. C ［解析］对于 A，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$，其中 $y-x<0$，但 xy 的符号不确定，所以 A 不正确；对于 B，取 $x=\pi,y=\frac{\pi}{4}$，此时 $\tan x-\tan y=0-1=-1<0$，所以 B 不正确；对于 C，函数 $f(x)=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，因为 $x>y$，所以 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x<\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^y$，可得 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^y<0$，所以 C 正确；对于 D，取 $x=2,y=-3$，此时 $\ln|x|-\ln|y|=\ln 2-\ln 3=\ln\frac{2}{3}<0$，所以 D 不正确. 故选 C.

6. B ［解析］因为实数 x,y 满足 $3xy+y^2=1$，$y>0$，所以 $x=\frac{1-y^2}{3y}$，所以 $2x+y=\frac{2-2y^2}{3y}+y=\frac{2}{3y}+\frac{1}{3}y\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{3y}\cdot\frac{1}{3}y}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $\frac{2}{3y}=\frac{1}{3}y$，即 $y=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $2x+y$ 的最小值是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 故选 B.

7. D ［解析］由 $ax^2+bx+c>0(a,b,c\in\mathbf{R})$ 的解集为 $(-4,1)$，可知 1 和 -4 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，且 $a<0$. 由根与系数的关系可得 $\begin{cases}-4+1=-\frac{b}{a},\\-4\times 1=\frac{c}{a},\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}b=3a,\\c=-4a,\end{cases}$ 所以 $\frac{c^2+9}{a+b}=\frac{(-4a)^2+9}{a+3a}=\frac{16a^2+9}{4a}=4a+\frac{9}{4a}=-\left(-4a+\frac{9}{-4a}\right)\leqslant-2\sqrt{-4a\times\frac{9}{-4a}}=-6$，当且仅当 $-4a=\frac{9}{-4a}$，即 $a=-\frac{3}{4}$ 时，等号成立，所以 $\frac{c^2+9}{a+b}$ 的取值范围为 $(-\infty,-6]$. 故选 D.

8. C ［解析］已知 x,y 均为正实数，设 $M=\max\left\{\frac{2}{x},\frac{1}{y},x^2+4y^2\right\}$，则 $M\geqslant\frac{2}{x}>0$，$M\geqslant\frac{1}{y}>0$，$M\geqslant x^2+4y^2>0$，则 $3M\geqslant\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+x^2+4y^2\geqslant\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+2\sqrt{x^2\cdot 4y^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+4xy$，当且仅当 $x^2=4y^2$，即 $x=2y$ 时，等号成立. 又因为 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+4xy\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot 4xy}=6$，当且仅当 $\frac{2}{x}=\frac{1}{y}=4xy$，即 $x=2y=1$ 时，等号成立，所以 $3M\geqslant 6$，即 $M\geqslant 2$，所以 $M=\max\left\{\frac{2}{x},\frac{1}{y},x^2+4y^2\right\}$ 的最小值为 2. 故选 C.

9. BD ［解析］当 $a=-2,b=-3,c=-4$ 时，$-2>-3>-4$，但 $-2+(-3)>-4$ 不成立，故 A 中命题是假命题. 因为 $a>b>|c|\geqslant 0$，所以根据不等式性质可得 $a^2>b^2>c^2$，故 B 中命题是真命题. 因为 $a<b<0$，所以 $\frac{1}{ab}>0$，所以 $a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}<0$，即 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$，又 $c<0$，所以 $\frac{c}{b}>\frac{c}{a}>0$，故 C 中命题是假命题. 因为 $a>b>c>0$，所以 $\frac{b}{a}-\frac{b+c}{a+c}=\frac{ab+bc-ab-ac}{a(a+c)}=\frac{c(b-a)}{a(a+c)}<0$，所以 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$，故 D 中命题是真命题. 故选 BD.

10. AD ［解析］对于 A，利用基本不等式可得 $\forall x>0,x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，故 A 中命题是真命题；对于 B，$\forall x<0,x+\frac{1}{x}=-\left(-x+\frac{1}{-x}\right)\leqslant-2\sqrt{-x\cdot\frac{1}{-x}}=-2$，当且仅当 $x=-1$ 时，等号成立，故 B 中命题是假命题；对于 C，易知 $\forall x>0,\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，故 C 中命题是假命题；对于 D，易知当 $x=-1$ 时，$\frac{x}{1+x^2}=-\frac{1}{2}$，所以 $\exists x<0,\frac{x}{1+x^2}\leqslant-\frac{1}{2}$，故 D 中命题是真命题. 故选 AD.

11. BCD ［解析］对于 A，因为 x,y 为正实数，所以 $xy=2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}$，当且仅当 $y=2x=4$ 时取等号，因此 $xy\geqslant 8$，故 A 错误；对于 B，由 $2x+y=xy$，得 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，则 $8x+y=(8x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=10+\frac{y}{x}+\frac{16x}{y}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{16x}{y}}=18$，当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{16x}{y}$，即 $y=4x=6$ 时取等号，故 B 正确；对于 C，由 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，得 $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{4}{xy}=1$，即 $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1-\frac{4}{xy}$，而 $xy\geqslant 8$，因此 $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1-\frac{4}{xy}\geqslant 1-\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $y=2x=4$ 时取等号，故 C 正确；对于 D，由 $2x+y=xy$，得 $xy-2x-y+2=2$，即 $(x-1)(y-2)=2$，由 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，得 $x>1,y>2$，因此 $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{y-2}\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{x-1}\cdot\frac{1}{y-2}}=\sqrt{6}$，当且仅当 $\frac{3}{x-1}=\frac{1}{y-2}$，即 $x-1=3(y-2)=\sqrt{6}$ 时取等号，故 D 正确. 故选 BCD.

12. -2 ［解析］因为 $x>0,y>0$ 且 $x+2y=1$，所以 $1=x+2y\geqslant 2\sqrt{2xy}$，解得 $2xy\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{4}$ 时，等号成立，所以 $2xy$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$，所以 $\log_2 x+\log_2(2y)=\log_2(2xy)\leqslant\log_2\frac{1}{4}=-2$，即 $\log_2 x+\log_2(2y)$ 的最大值为 -2.

13. 2 ［解析］方法一：由 $4x^2+9y^2+6xy-3=0$，可得 $4x^2+9y^2+12xy=3+6xy$，由基本不等式得 $(2x+3y)^2=3+2x\cdot 3y\leqslant 3+\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2$，可得 $\frac{3}{4}(2x+3y)^2\leqslant 3$，所以 $2x+3y\leqslant 2$，当且仅当 $2x=3y$ 时取等号，由 $\begin{cases}2x=3y,\\4x^2+9y^2+6xy-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=\frac{1}{3},\end{cases}$ 故 $2x+3y$ 的最大值为 2.

方法二：由 $4x^2+9y^2+6xy-3=0$，可得 $(x^2+9y^2+6xy)+3x^2=3$，因为 $x>0$，$y>0$，所以由权方和不等式得 $\frac{(x+3y)^2}{1}+\frac{x^2}{\frac{1}{3}}\geqslant\frac{(x+3y+x)^2}{1+\frac{1}{3}}$，即 $4\geqslant(2x+3y)^2$，所以 $2x+3y\leqslant 2$，当且仅当 $\frac{x+3y}{1}=\frac{x}{\frac{1}{3}}$，即 $2x=3y$ 时取等号，由 $\begin{cases}2x=3y,\\4x^2+9y^2+6xy-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=\frac{1}{3},\end{cases}$ 故 $2x+3y$ 的最大值为 2.

14. $\frac{1}{5}$ ［解析］令 $b-a=m,c-b=n,1-c=p$，$X=\max\{b-a,c-b,1-c\}=\max\{m,n,p\}$，其中 $m,n,p>0$，$\begin{cases}b=1-n-p,\\a=1-m-n-p.\end{cases}$ ① 若 $b\geqslant 2a$，则 $1-$

$n-p\geqslant 2-2m-2n-2p$，得 $2m+n+p\geqslant 1$，又 $\begin{cases}2X\geqslant 2m,\\X\geqslant n,\\X\geqslant p,\end{cases}$ $\therefore 4X\geqslant 2m+n+p\geqslant 1$，则 $X\geqslant\frac{1}{4}$. ②若 $a+b\leqslant 1$，则 $2-m-2n-2p\leqslant 1$，得 $m+2n+2p\geqslant 1$，又 $\begin{cases}X\geqslant m,\\2X\geqslant 2n,\\2X\geqslant 2p,\end{cases}$ $\therefore 5X\geqslant m+2n+2p\geqslant 1$，$\therefore X\geqslant\frac{1}{5}$，当且仅当 $m+2n+2p=1$ 且 $\max\{m,n,p\}=\frac{1}{5}$ 时等号成立. 综上，X 的最小值为 $\frac{1}{5}$.

重点强化练（二）

1. A ［解析］函数 $f(x)=\frac{3}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，又 $f(-x)=-\frac{3}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)=\frac{3}{x}$ 为奇函数，则函数 $f(x)$ 的图象关于原点(0,0)对称. 又 $y=f(x-1)+1$ 的图象是由 $f(x)=\frac{3}{x}$ 的图象先向右平移1个单位长度，再向上平移1个单位长度得到的，所以函数 $y=f(x-1)+1$ 的图象关于点(1,1)对称. 故选 A.

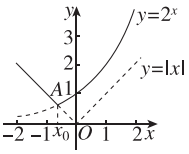
2. D ［解析］由函数图象关于 y 轴对称可知函数 $f(x)$ 为偶函数，且 $f(2)<0$. 对于A，若 $f(x)=\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}$，则 $f(-x)=\frac{5(e^{-x}-e^x)}{(-x)^2+2}=-\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}=-f(x)$，函数为奇函数，其图象关于原点对称，故A不符合题意；对于B，若 $f(x)=\frac{5\sin x}{x^2+1}$，则 $f(-x)=\frac{5\sin(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{5\sin x}{x^2+1}=-f(x)$，函数为奇函数，其图象关于原点对称，故B不符合题意；对于C，$f(x)=\frac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}>0$ 恒成立，故C不符合题意；对于D，若 $f(x)=\frac{5\cos x}{x^2+1}$，则 $f(-x)=\frac{5\cos(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{5\cos x}{x^2+1}=f(x)$，函数为偶函数，其图象关于 y 轴对称，且 $f(2)=\frac{5\cos 2}{2^2+1}<0$，故D符合题意. 故选 D.

3. C ［解析］作函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称的图象即为函数 $y=f(-x)$ 的图象，再将所得图象向右平移2个单位长度得函数 $y=f[-(x-2)]=f(2-x)$ 的图象. 故选 C.

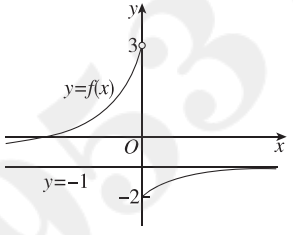
4. D ［解析］由 $\frac{f'(x)}{f(x)}>0$，得 $f'(x)\cdot f(x)>0$. 由图可知，当 $x\in(-\infty,4)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(4,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. 所以当 $x\in(1,4)$ 时，$f'(x)>0$ 且 $f(x)>0$；当 $x\in(6,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$ 且 $f(x)<0$. 综上，$x\in(1,4)\cup(6,+\infty)$. 故选 D.

5. C ［解析］对于A选项，当 $x=1$ 时，$y=\sqrt{3}>1$，故A错误；对于B选项，记 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$，则 $f(-x)=-x\sqrt{4-x^2}=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，不符合题意，故B错误；对于C选项，记 $h(x)=\sqrt{-x^2+2|x|}$，则 $h(-x)=\sqrt{-x^2+2|x|}=h(x)$，故 $h(x)=\sqrt{-x^2+2|x|}$ 为偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$h(x)=\sqrt{-x^2+2|x|}=\sqrt{-x^2+2x}=\sqrt{-(x-1)^2+1}$，此函数在(0,1)上单调递增，在(1,2)上单调递减，且 $h(0)=0$，$h(1)=1$，$h(2)=0$，故C正确；对于D选项，$y=\sqrt{-x^2+2x}$ 的定义域为[0,2]，不关于原点对称，故该函数既不是奇函数也不是偶函数，不符合题意，故D错误. 故选 C.

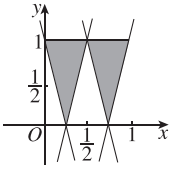
6. B ［解析］设 $g(x)=\begin{cases}|x|,|x|>2^x,\\2^x,|x|\leqslant 2^x,\end{cases}$ 作出 $y=|x|$，$y=2^x$ 的图象，如图所示，则 $g(x)$ 的图象如图中实线部分所示，得 $g(x)=\begin{cases}-x,x<x_0,\\2^x,x\geqslant x_0\end{cases}$ $(x_0\in(-1,0))$. 不妨取 $f(x)=\begin{cases}-x,x<x_0,\\2^x,x\geqslant x_0\end{cases}$ $(x_0\in(-1,0))$. 取 $a=1,b=-3$，满足 $f(1)=2\leqslant|-3|=3$，但 $a>b$，故A错误. 取 $a=-1,b=0$，满足 $f(-1)=1>0$，但 $a<b$，故C错误. 取 $a=-4,b=1$，满足 $f(-4)=4>2^1=2$，但 $a<b$，故D错误. 若 $f(a)\leqslant 2^b$，因为 $f(x)\geqslant 2^x$，所以 $f(a)\geqslant 2^a$，则 $2^a\leqslant f(a)\leqslant 2^b$，则 $a\leqslant b$，故B正确. 故选 B.



7. C ［解析］因为函数 $h(x)$ 的图象向左平移一个单位长度，再向上平移一个单位长度后得函数 $y=-\frac{4}{x}$ 的图象，所以 $h(x)=-\frac{4}{x-1}-1$. 当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增，又 $-\frac{4}{x-1}>0$，所以 $-1<f(x)<3$；当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-\left(\frac{1}{e}\right)^x-1$ 单调递增，又 $-\left(\frac{1}{e}\right)^x<0$，所以 $-2\leqslant f(x)<-1$. 作出 $f(x)$ 的图象如图，由 $f(x+2)<f(x^2)$，$x^2\geqslant 0$，得 $0\leqslant x+2<x^2$，解得 $-2\leqslant x<-1$ 或 $x>2$，所以实数 x 的取值范围为 $[-2,-1)\cup(2,+\infty)$. 故选 C.



8. B ［解析］$f(x)=|2x-1|=\begin{cases}2x-1,x\geqslant\frac{1}{2},\\1-2x,x<\frac{1}{2}.\end{cases}$ $f[f(x)]=|2f(x)-1|$，当 $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 时，$f(x)=|2x-1|=1-2x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$f[f(x)]=2f(x)-1=2(1-2x)-1=1-4x$；当 $x\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 时，$f(x)=|2x-1|=1-2x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f[f(x)]=1-2f(x)=1-2(1-2x)=4x-1$；当 $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ 时，$f(x)=|2x-1|=2x-1\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，$f[f(x)]=1-2f(x)=1-2(2x-1)=3-4x$；当 $x\in\left[\frac{3}{4},1\right]$ 时，$f(x)=|2x-1|=2x-1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$f[f(x)]=2f(x)-1=2(2x-1)-1=4x-3$. 画出函数 $y=f[f(x)]$ 的图象，曲线 $y=f[f(x)]$，$x\in[0,1]$ 与直线 $y=1$ 围成的封闭图形如图中阴影部分所示，易知其面积为 $\frac{1}{2}$. 故选 B.



9. AB ［解析］因为 $a^x=b^{-x}$，即 $a^x=\left(\frac{1}{b}\right)^x$，所以 $a=\frac{1}{b}$. 当 $a>1$ 时，$0<b<1$，指数函数 $y=b^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且其图象过点(0,1)，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增且其图象过点(1,0)，将 $y=\log_a x$ 的图象关于 y 轴对称得到 $y=\log_a(-x)$ 的图象，则 $y=\log_a(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减且其图象过点(−1,0)，故A符合题意；当 $0<a<1$ 时，$b>1$，同理可得，指数函数 $y=b^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且其图象过点(0,1)，$y=\log_a(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增且其图象过点(−1,0)，故B符合题意. 故选 AB.

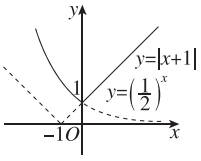
10. ACD ［解析］对于A，因为函数 $y=e^x$ 与函数 $y=-e^{-x}$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以双曲正弦函数 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 也是增函数，故A正确；对于B，双曲余弦函数 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，在 y 轴两侧双曲余弦函数的单调性不同，所以双曲余弦函数不是增函数，故B错误；对于C，$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$，因为 $y=e^{2x}+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $y=e^{2x}+1>1$，所以 $y=\frac{-2}{e^{2x}+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 $\tanh x=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$ 是增函数，故C正确；对于D，由C知 $\tanh x=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$，则 $\tanh(x+y)=\frac{e^{2x+2y}-1}{e^{2x+2y}+1}$，$\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\cdot\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}=\frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}+1)+(e^{2y}-1)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)+(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)}=\frac{e^{2x+2y}+e^{2x}-e^{2y}-1+e^{2x+2y}-e^{2x}+e^{2y}-1}{e^{2x+2y}+e^{2x}+e^{2y}+1+e^{2x+2y}-e^{2x}-e^{2y}+1}=\frac{2e^{2x+2y}-2}{2e^{2x+2y}+2}=\frac{e^{2x+2y}-1}{e^{2x+2y}+1}$，故 $\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$，故D正确. 故选 ACD.

11. ABD ［解析］由题意得 $e^k=n(n>1)$，$e^{-k}=m=\frac{1}{n}$，$\because n<2m$，$\therefore n<2\times\frac{1}{n}$，$\therefore 1<n<\sqrt{2}$. 对于A，$n+m=n+\frac{1}{n}$，$\because$ 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 上单调递增，$\therefore n+m=n+\frac{1}{n}<\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故A正确；$n-m=n-\frac{1}{n}$，$\because$ 函数 $y=x-\frac{1}{x}$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 上单调递增，$\therefore n-m=n-\frac{1}{n}<\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故B正确；$\because n-m-1<\frac{\sqrt{2}}{2}-1<0$，$\therefore n<m+1$，$\therefore n^n<n^{m+1}$，$n^{m+1}<(m+1)^{m+1}$，$\therefore n^n<(m+1)^{m+1}$，故C错误；令 $y=\frac{\ln x}{x}$，则 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，可得当 $x\in(1,e)$ 时，$y'>0$，$\therefore y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，$\because 1<$

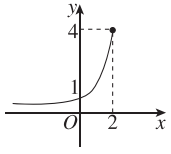
1803.163.com

$n<\sqrt{2}$，$\therefore m=\frac{1}{n}\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\therefore m+1\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1,2\right)$，$\therefore \frac{\ln n}{n}<\frac{\ln(m+1)}{m+1}$，$\therefore \ln n^{m+1}<\ln(m+1)^n$，$\therefore n^{m+1}<(m+1)^n$，故 D 正确. 故选 ABD.

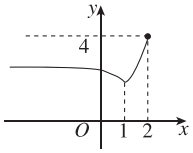
12. 1 ［解析］在同一坐标系内作出函数 $y=|x+1|$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象，如图，观察图象知，当 $x<0$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x>|x+1|$，当 $x=0$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x=|x+1|$，当 $x>0$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<|x+1|$，因此 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x,x\leqslant 0,\\ x+1,x>0,\end{cases}$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=1$.



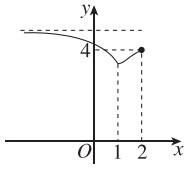
13. $(-\infty,2]$ ［解析］当 $m\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)=|2^x-m|+m=2^x-m+m=2^x$ 的图象如图①，满足题意；当 $0<m\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)=|2^x-m|+m$ 的图象是由 $y=2^x$ 的图象先向下平移 m 个单位后，再把 x 轴下方的图象对称到上方，再向上平移 m 个单位得到的，如图②，根据图象可知满足题意；当 $m>2$ 时，$f(x)$ 的大致图象如图③，不满足题意. 故 m 的取值范围是 $(-\infty,2]$.



①



②



③

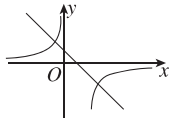
14. $2\sqrt{2}$ ［解析］设 $f(x)=x^3-\frac{2}{x}$，可得函数 $f(x)=x^3-\frac{2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因为 $f(-x)=(-x)^3-\frac{2}{-x}=-x^3+\frac{2}{x}=-\left(x^3-\frac{2}{x}\right)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，所以曲线 C 关于原点对称. 因为两条直线 l_1,l_2 均过坐标原点 O，所以 M,N 关于原点对称，P,Q 关于原点对称，根据对称性，可知 $|OP|=|OQ|$，$|OM|=|ON|$，$\angle POM=\angle QON$，所以 $\triangle OPM\cong\triangle OQN$，所以 $S_{\triangle OQN}=S_{\triangle OPM}=\sqrt{2}$，又 $\triangle OQM$ 和 $\triangle OQN$ 等底等高，所以 $S_{\triangle OQM}=\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle MNQ}=2\sqrt{2}$.

重点强化练（三）

1. B ［解析］函数 $f(x)=\ln x+x-\frac{2}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且函数 $y=\ln x$，$y=x$，$y=-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上都单调递增，所以函数 $f(x)=\ln x+x-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $f(1)=\ln 1+1-2=-1<0$，$f(2)=\ln 2+2-1=\ln 2+1>0$，所以 $f(1)\cdot f(2)<0$，所以零点所在的区间为 $(1,2)$. 故选 B.

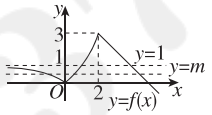
2. A ［解析］因为 $f(x)=ax+3$ 在区间 $[-1,2]$ 上存在零点，所以 $f(-1)\cdot f(2)\leqslant 0$，解得 $a\geqslant 3$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$. 因为集合 $\{a\mid a\leqslant -2\}$ 是集合 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-\frac{3}{2}\text{ 或 }a\geqslant 3\right\}$ 的真子集，所以“$a\leqslant -2$”是“函数 $f(x)=ax+3$ 在区间 $[-1,2]$ 上存在零点”的充分不必要条件. 故选 A.

3. D ［解析］由 $f(x)=0$ 得 $\ln\frac{x-2}{x}=1-x$，令 $g(x)=\ln\frac{x-2}{x}$，$y=1-x$，因为 $g(x)+g(2-x)=\ln\frac{x-2}{x}+\ln\frac{-x}{2-x}=\ln 1=0$，所以函数 $g(x)=\ln\frac{x-2}{x}$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，又因为 $y=1-x$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，如图所示，两个函数图象有两个交点，设两个交点的横坐标分别为 x_1,x_2，这两个交点关于点 $(1,0)$ 对称，所以 $x_1+x_2=2$. 故选 D.



4. B ［解析］由题意得 $e^a+a-2=0$，$\ln b+b-2=0$，即 $\ln b+e^{\ln b}-2=0$，令 $f(x)=e^x+x-2$，则 $f(a)=f(\ln b)=0$，又 $f'(x)=e^x+1>0$ 恒成立，所以 $f(x)=e^x+x-2$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 $a=\ln b$，又 $\ln b+b-2=0$，所以 $a+b=2$. 故选 B.

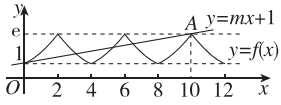
5. B ［解析］当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=|2^x-1|=1-2^x<1$. 由 $[f(x)]^2-(m+1)f(x)+m=0$，可得 $f(x)=1$ 或 $f(x)=m$. 由题意可知，关于 x 的方程 $f(x)=1$，$f(x)=m$ 共有 5 个不同的实数根，作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，由图可知，方程 $f(x)=1$ 有 2 个根，故方程 $f(x)=m$ 有 3 个根，则 $0<m<1$. 故选 B.



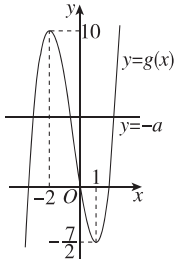
6. B ［解析］由 $e^x+x+\ln x=\ln a+\frac{a}{x}$ 得 $e^x+x=\frac{a}{x}+\ln\frac{a}{x}$，设函数 $F(x)=e^x+x$，$x\in[1,+\infty)$，问题转化为求方程 $F(x)=F\left(\ln\frac{a}{x}\right)$ 的根的个数，$F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，故问题转化为求 $x+\ln x=\ln a$，$x\in[1,+\infty)$ 的根的个数问题. 令 $h(x)=x+\ln x$，$x\in[1,+\infty)$，易知 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(x)\in[1,+\infty)$，所以当 $a\geqslant e$ 时，方程 $x+\ln x=\ln a$ 只有一根，所以方程 $e^x+x+\ln x=\ln a+\frac{a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$ 的根的个数为 1. 故选 B.

7. A ［解析］令 $\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)=0$，得 $x=-\frac{1}{6}+k(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，$x=-\frac{1}{6}$；当 $k=1$ 时，$x=\frac{5}{6}$. 由正弦型函数可知，当 $x\in\left[-\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right]$ 时，$\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant 0$；当 $x\in\left[-1,-\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6},1\right]$ 时，$\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 0$. 因为不等式 $(|x-a|-b)\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 0$，$x\in[-1,1]$ 恒成立，所以当 $x\in\left[-\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right]$ 时，$|x-a|-b\leqslant 0$；当 $x\in\left[-1,-\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{6},1\right]$ 时，$|x-a|-b\geqslant 0$. 设 $f(x)=|x-a|-b$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $|x-a|-b=0$ 的两个根应为 $-\frac{1}{6}$ 和 $\frac{5}{6}$，即 $\begin{cases}\left|-\frac{1}{6}-a\right|-b=0,\\ \left|\frac{5}{6}-a\right|-b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $2a+b=\frac{7}{6}$，故选 A.

8. D ［解析］$f[2-(x+2)]=f(-x)=f[(x+2)+2]=f(x+4)$，又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4. 由 $f(2-x)=f(x+2)$ 得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=(\sqrt{e})^x$，可得 $f(x)$ 的大致图象如图所示. 在区间 $[0,10]$ 内，函数 $g(x)=f(x)-mx-1(m>0)$ 有 5 个零点，等价于 $y=f(x)$ 与 $y=mx+1(m>0)$ 的图象在 $[0,10]$ 上有 5 个交点. 结合图象，当直线 $y=mx+1(m>0)$ 过点 $A(10,e)$ 时，m 取到最大值，此时 $e=10m+1$，则 $m=\frac{e-1}{10}$，则实数 m 的取值范围是 $\left(0,\frac{e-1}{10}\right]$. 故选 D.



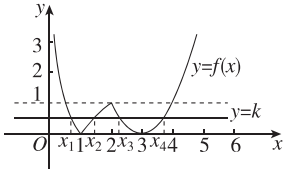
9. BCD ［解析］函数 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+a$ 有 3 个零点，等价于 $x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+a=0$ 有 3 个不同的根，即函数 $y=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x$ 与函数 $y=-a$ 的图象有 3 个交点. 令 $g(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x$，则 $g'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$，由 $g'(x)>0$ 得 $x>1$ 或 $x<-2$，由 $g'(x)<0$ 得 $-2<x<1$，所以 $g(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x$ 在 $(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,1)$ 上单调递减. 又 $g(-2)=10$，$g(1)=-\frac{7}{2}$，所以 $g(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x$ 的大致图象如图所示，所以 $-\frac{7}{2}<-a<10$，解得 $-10<a<\frac{7}{2}$. 故选 BCD.



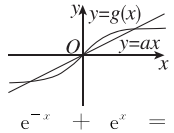
10. ABD ［解析］如图所示，在同一坐标系内作出函数 $y=f(x)$ 和 $y=k$ 的图象. 对于 A，由图象知，要使方程 $f(x)=k$ 有四个不同的根，则 $0<k<1$，所以 A 正确；对于 B,C，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\log_2\frac{1}{2}\right|=1$，$f(2)=|\log_2 2|=1$，$f(4)=4^2-6\times 4+9=1$，且函数 $y=x^2-6x+9$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，所以由图象得 $\frac{1}{2}<x_1<$

138-3-PDF

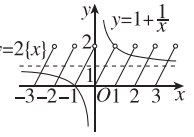
$1<x_2<2<x_3<3<x_4<4$，且$-\log_2 x_1=\log_2 x_2$，$x_3+x_4=6$，所以$\log_2 x_2+\log_2 x_1=\log_2(x_1x_2)=0$，可得$x_1x_2=1$，所以$x_1x_2+x_3+x_4=7$，$x_1=\dfrac{1}{x_2}$，所以$2x_1+x_2=\dfrac{2}{x_2}+x_2$，其中$1<x_2<2$，当$x\in(1,2)$时，$x+\dfrac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}=2\sqrt{2}$，当且仅当$x=\sqrt{2}$时，取等号，所以$2x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{2}$，所以B正确，C不正确；对于D，由$x_1x_2=1$，可得$x_1+2x_2=\dfrac{1}{x_2}+2x_2$（$1<x_2<2$），令$h(x)=2x+\dfrac{1}{x}$（$1<x<2$），可得函数$h(x)$在$(1,2)$上单调递增，$h(1)=3$，$h(2)=\dfrac{9}{2}$，所以$3<x_1+2x_2<\dfrac{9}{2}$，所以D正确. 故选ABD.



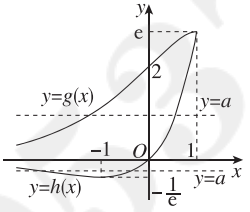
11. ACD　[解析] 因为函数$f(x)=ax(e^x+e^{-x})-e^x+e^{-x}$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=a(-x)(e^{-x}+e^x)-e^{-x}+e^x=-[ax(e^x+e^{-x})-e^x+e^{-x}]=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数，则$f(0)=0$，又因为$f(x)$有三个零点且$x_1<x_2<x_3$，所以$x_1=-x_3$，$x_2=0$，所以$x_1+x_2+x_3=0$，故A正确；由$f(x)=ax(e^x+e^{-x})-e^x+e^{-x}=0$，得$ax=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$，令$g(x)=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$，则$g'(x)=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$，所以$g(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，要使函数$f(x)$有3个零点，则$y=ax$与$y=g(x)$的图象有3个交点，如图，又$g'(x)=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x})^2+2e^{2x}+1}=\dfrac{4}{e^{2x}+\dfrac{1}{e^{2x}}+2}\leqslant\dfrac{4}{2\sqrt{e^{2x}\cdot\dfrac{1}{e^{2x}}}+2}=1$，当且仅当$x=0$时取等号，所以$0<g'(x)\leqslant 1$，所以$0<a<1$，故B错误；$ax_1+1=\left(1-\dfrac{2}{e^{2x_1}+1}\right)+1=\dfrac{2e^{2x_1}}{e^{2x_1}+1}>0$，故C正确；由$ax_3=1-\dfrac{2}{e^{2x_3}+1}$，得$a=\dfrac{1}{x_3}\left(1-\dfrac{2}{e^{2x_3}+1}\right)$，要使$ax_3+a=1-\dfrac{2}{e^{2x_3}+1}+\dfrac{1}{x_3}\left(1-\dfrac{2}{e^{2x_3}+1}\right)>1$成立，则$e^{2x_3}-2x_3-1>0$成立，令$h(x)=e^{2x}-2x-1(x>0)$，则$h'(x)=2(e^{2x}-1)>0(x>0)$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$h(x)>h(0)=0$，于是$e^{2x_3}-2x_3-1>0$，则$ax_3+a>1$，故D正确. 故选ACD.



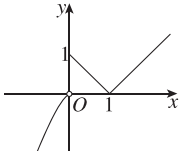
12. -1　[解析] 对于$2x\{x\}-x-1=0$，显然$x=0$不是方程的解，可化为$2\{x\}=1+\dfrac{1}{x}$，作出函数$y=2\{x\}$和$y=1+\dfrac{1}{x}$的大致图象，如图. 考虑函数$y=2\{x\}$和$y=1+\dfrac{1}{x}$的图象的交点，除了$(-1,0)$外，其余点成对关于点$(0,1)$对称，故所有实根之和为-1.



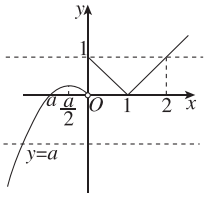
13. $\left(-\dfrac{1}{e},0\right)\cup(0,e)$　[解析] 令$f(x)=0$，可得$(x-1)e^x+|e^x-a|=0$，即$|e^x-a|=-(x-1)e^x$，因为$|e^x-a|\geqslant 0$，所以$-(x-1)e^x\geqslant 0$，所以$x\leqslant 1$，可得$a-e^x=(1-x)e^x$或$a-e^x=(x-1)e^x$，即$a=(2-x)e^x$或$a=xe^x$. 令$g(x)=(2-x)e^x$，$h(x)=xe^x$，可得$g'(x)=(1-x)e^x$，$h'(x)=(x+1)e^x$. 当$x\leqslant 1$时，可得$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$在$(-\infty,1]$上单调递增，且$g(1)=e$，当$x\to-\infty$时，$g(x)>0$且$g(x)\to 0$. 当$x<-1$时，可得$h'(x)<0$，$h(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，当$-1<x\leqslant 1$时，可得$h'(x)>0$，$h(x)$在$(-1,1]$上单调递增，且$h(-1)=-\dfrac{1}{e}$，$h(1)=e$，当$x<0$时，$h(x)<0$，当$x\to-\infty$时，$h(x)\to 0$. 作出函数$y=g(x)$，$y=h(x)$的图象，如图所示. 函数$f(x)=(x-1)e^x+|e^x-a|$有且只有两个零点，即直线$y=a$与$f(x)$和$g(x)$的图象共有两个交点，则$-\dfrac{1}{e}<a<0$或$0<a<e$，故实数a的取值范围为$\left(-\dfrac{1}{e},0\right)\cup(0,e)$.



14. 2　$(-2,0)$　[解析] 当$a=1$时，$f(x)=\begin{cases}|x-1|,x\geqslant 0,\\-x^2+x,x<0,\end{cases}$令$f(x)=0$，解得$x=1$，令$y=f[f(x)]=0$，则$f(x)=1$，故$x=0$或$x=2$，此时$y=f[f(x)]$有2个零点. 设$t=f(x)$，当$x\geqslant 0$时，$f(x)=|x-1|$，此时$t\geqslant 0$，由$f(t)=0$，得$t=1$，即$f(x)=|x-1|=1$，解得$x=0$或$x=2$，所以$y=f[f(x)]$在$[0,+\infty)$上有2个零点. 当$x<0$时，$f(x)=-x^2+ax$的图象的对称轴为直线$x=\dfrac{a}{2}$，若$a\geqslant 0$，函数$y=f(x)$的大致图象如图所示，



此时$f(x)=-x^2+ax<0$，即$t<0$，则$f(t)<0$，所以$f(t)=0$无解，则$y=f[f(x)]$无零点，此时$y=f[f(x)]$共有2个零点，不符合题意. 若$a<0$，$f(x)$的大致图象如图所示，令$-t^2+at=0$，解得$t=a<0$，显然$f(x)=a$在$(-\infty,0)$上存在唯一负根，要使$y=f[f(x)]$恰有3个零点，只需$y=f[f(x)]$在$(0,+\infty)$上除$x=0$和$x=2$外不能再有其他零点，即$f(x)=1$不能再有除$x=0$和$x=2$外的其他解，故$f\left(\dfrac{a}{2}\right)\in(0,1)$，即$0<-\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{2}<1$，解得$-2<a<2$，所以$a\in(-2,0)$.



重点强化练（四）

1. C　[解析] 由$y'=3x^2-1$，得$y'|_{x=0}=-1$，即直线l的斜率为-1，根据倾斜角与斜率关系及其范围知，l的倾斜角为$\dfrac{3\pi}{4}$. 故选C.

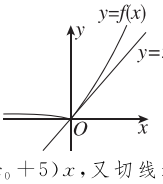
2. A　[解析] 由$f(x)=x^2+\ln x$，得$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$，所以$f'(1)=2+1=3$，所以$f(x)=x^2+\ln x$的图象在点$(1,1)$处的切线方程是$y-1=3(x-1)$，即$3x-y-2=0$.

3. A　[解析] 由$y=e^x+a$，得$y'=e^x$，设切点坐标为(t,e^t+a)，由$e^t=1$，得$t=0$，∴切点坐标为$(0,1+a)$，代入$y=x-1$，得$1+a=-1$，即$a=-2$.

4. B　[解析] 由$f(x)=xe^x+1$，得$f'(x)=(x+1)e^x$. 设切点坐标为$(x_0,x_0e^{x_0}+1)$，则切线方程为$y-x_0e^{x_0}-1=e^{x_0}(x_0+1)(x-x_0)$，把$(2,1)$代入可得$-x_0e^{x_0}=e^{x_0}(x_0+1)(2-x_0)$，即$x_0^2-2x_0-2=0$，因为$\Delta=12>0$，所以该方程有2个不同的实数解，故切线有2条.

5. B　[解析] 由给定定义得，将$xy+\ln y=2$的两边同时对x求导，可得$y+xy'+\dfrac{1}{y}\times y'=0$，将$(2,1)$代入，得$1+2y'+y'=0$，解得$y'=-\dfrac{1}{3}$，故切线斜率为$-\dfrac{1}{3}$，则切线方程为$y-1=-\dfrac{1}{3}(x-2)$，即$x+3y-5=0$. 故选B.

6. D　[解析] 设直线$y=mx$与$y=x^2+5x(x\geqslant 0)$的图象相切于点$P(x_0,y_0)$（$x_0\geqslant 0$），$y'=2x+5$，则$m=2x_0+5$，所以切线方程为$y=(2x_0+5)x$，又切线过$P(x_0,y_0)$，所以$x_0^2+5x_0=(2x_0+5)x_0$，解得$x_0=0$，所以$P(0,0)$，$m=5$. 作出$y=f(x)$的图象及直线$y=5x$，如图，由图象可知，当$0\leqslant k\leqslant 5$时，$f(x)\geqslant kx$恒成立.



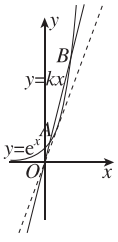
7. D　[解析] 因为$y=\ln x-n+4$，所以$y'=\dfrac{1}{x}$，令$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{e}$，可得$x=e$，结合题设，将$x=e$代入，得$\dfrac{1}{e}\cdot e+m=\ln e-n+4$，即$m+n=4$，则$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\dfrac{m+n}{4}=\dfrac{1}{4}\left(2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\right)\geqslant\dfrac{1}{4}\times(2+2)=1$，当且仅当$m=n=2$时，等号成立，故$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$的最小值是1.

8. B　[解析] 依题意，设切点坐标为$(t,(t+1)e^t)$，由$y=(x+1)e^x$，得$y'=(x+2)e^x$，则函数$y=(x+1)e^x$的图象在点$(t,(t+1)e^t)$处的切线方程为$y-(t+1)e^t=(t+2)e^t(x-t)$，由切线过点$(1,m)$，得$m=(t+1)e^t+(t+2)e^t(1-t)=(-t^2+3)e^t$，令$g(t)=(-t^2+3)e^t$，依题意，直线$y=m$与函数$y=g(t)$的图象有

三个交点，$g'(t)=(-t^2-2t+3)e^t=-(t+3)(t-1)e^t$，当 $t<-3$ 或 $t>1$ 时，$g'(t)<0$，当 $-3<t<1$ 时，$g'(t)>0$，所以函数 $g(t)$ 在 $(-\infty,-3)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-3,1)$ 上单调递增．当 $t=-3$ 时，函数 $g(t)$ 取得极小值 $g(-3)=-6e^{-3}$，当 $t=1$ 时，函数 $g(t)$ 取得极大值 $g(1)=2e$，当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)<0$ 且 $g(x)\to0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，因此当 $-6e^{-3}<m<0$ 时，直线 $y=m$ 与函数 $y=g(t)$ 的图象有三个交点，所以实数 m 的取值范围是 $(-6e^{-3},0)$．故选 B．

9. BCD ［解析］因为 $f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3\geqslant-3$，所以 l_m 的斜率的最小值为 -3，故 A 错误，B 正确．因为 $f'(0)=0$，$f(0)=1$，所以 l_0 的方程为 $y=1$，故 C 正确．因为 $f'(-1)=9$，$f(-1)=-3$，所以 l_{-1} 的方程为 $y+3=9(x+1)$，即 $y=9x+6$，故 D 正确．故选 BCD．

10. ABC ［解析］在同一坐标系中作出曲线 $y=e^x$ 与直线 $y=kx(k>0)$，如图所示．当直线 $y=kx(k>0)$ 与曲线 $y=e^x$ 相切时，设切点坐标为 (a,e^a)，因为 $y'=e^x$，所以 $k=\dfrac{e^a}{a}=e^a$，解得 $a=1$，$k=e$，因为直线 $y=kx(k>0)$ 交曲线 $y=e^x$ 于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，所以有 $k>e$，故 A 正确；当 k 从 e 开始增大时，观察图象可知从 $|OB|<2|OA|$ 变化到 $|OB|>2|OA|$，故必存在一个 k，使得 $|OB|=2|OA|$，即 A 为 OB 的中点，故 B 正确；由题得 $0<x_1<x_2$，所以 $y_1+y_2=e^{x_1}+e^{x_2}>2\sqrt{e^{x_1}\cdot e^{x_2}}=2e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，故 C 正确；$k_1=e^{x_1}>0$，$k_2=e^{x_2}>0$，故 $k_1k_2\neq-1$，故 D 错误．故选 ABC．



11. ACD ［解析］$f'(x)=2x-1$，所以 $f(x)$ 的图象在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线方程为 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$，令 $y=0$，得 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\dfrac{x_n^2-x_n-6}{2x_n-1}=\dfrac{x_n^2+6}{2x_n-1}$，故 A 正确；$\dfrac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-3}=\dfrac{\frac{x_n^2+6}{2x_n-1}+2}{\frac{x_n^2+6}{2x_n-1}-3}=\left(\dfrac{x_n+2}{x_n-3}\right)^2$，故 $\ln\dfrac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-3}=2\ln\dfrac{x_n+2}{x_n-3}$，即 $a_{n+1}=2a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，故 B 错误，C 正确；$S_{2025}=\dfrac{1\times(1-2^{2025})}{1-2}=2^{2025}-1$，故 D 正确．故选 ACD．

12. $x-\pi y+\pi=0$ ［解析］$y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，可得曲线在点 $M(-\pi,0)$ 处的切线斜率 $k=\dfrac{-\pi\cos(-\pi)-\sin(-\pi)}{(-\pi)^2}=\dfrac{1}{\pi}$，所以曲线在点 $M(-\pi,0)$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{\pi}(x+\pi)$，即 $x-\pi y+\pi=0$．

13. $-2\ln2$ ［解析］设直线 $y=kx+b$ 与函数 $y=e^{x-1}$ 和 $y=e^x-2$ 的图象的切点分别为 $P_1(x_1,e^{x_1-1})$，$P_2(x_2,e^{x_2}-2)$，令 $f(x)=e^{x-1}$，$g(x)=e^x-2$，因为 $f'(x)=e^{x-1}$，$g'(x)=e^x$，所以曲线 $y=e^{x-1}$ 在点 P_1 处的切线方程为 $y-e^{x_1-1}=e^{x_1-1}(x-x_1)$，整理得 $y=e^{x_1-1}x+(1-x_1)e^{x_1-1}$，曲线 $y=e^x-2$ 在点 P_2 处的切线方程为 $y-(e^{x_2}-2)=e^{x_2}(x-x_2)$，整理得 $y=e^{x_2}x+(1-x_2)e^{x_2}-2$．

因为直线 $y=kx+b$ 是两函数图象的公切线，所以

$$\begin{cases}k=e^{x_1-1}=e^{x_2}①,\\ b=(1-x_1)e^{x_1-1}=(1-x_2)e^{x_2}-2②,\end{cases}$$

由①可得 $x_1-1=x_2$，代入②得 $-x_2e^{x_2}=(1-x_2)e^{x_2}-2$，整理得 $e^{x_2}=2$，所以 $x_2=\ln2$，代入②得 $b=(1-\ln2)e^{\ln2}-2=-2\ln2$．

14. $\dfrac{3\sqrt5}{5}$ ［解析］设直线 $y=2x+c$ 与曲线 $y=\ln x-\dfrac{1}{x}$ 相切，切点坐标为 $\left(t,\ln t-\dfrac{1}{t}\right)(t>0)$，由 $y=\ln x-\dfrac{1}{x}$，求导得 $y'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，由 $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}=2$，即 $2t^2-t-1=0$，得 $t=1$，因此切点坐标为 $(1,-1)$，所以 $|AB|$ 的最小值为 $\dfrac{|2\times1-(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt5}{5}$．

15. 解：(1)由 $f(x)=f'(1)x^2-x+2\ln x$，求导可得 $f'(x)=2f'(1)x-1+\dfrac{2}{x}$，所以 $f'(1)=2f'(1)-1+2$，解得 $f'(1)=-1$，则 $f(x)=-x^2-x+2\ln x$．

(2)$g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+x^2+x]+a=\ln x+a$，求导可得 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$．由 $y=e^x+2x$ 得 $y'=e^x+2$，故曲线 $y=e^x+2x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率 $k=e^0+2=3$，所以曲线 $y=e^x+2x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=3(x-0)$，化简可得 $y=3x+1$．令 $g'(x)=\dfrac{1}{x}=3$，解得 $x=\dfrac{1}{3}$，将其代入切线方程 $y=3x+1$，可得 $y=2$，又 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\ln\dfrac{1}{3}+a$，所以 $\ln\dfrac{1}{3}+a=2$，解得 $a=2+\ln3$．

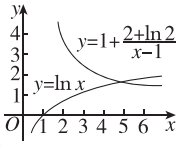
16. 解：(1)$f(1)=0-\dfrac{1}{3}+1-1=-\dfrac{1}{3}$，$f'(x)=2\ln x+2-x^2+1=2\ln x-x^2+3$，则 $f'(1)=2$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+\dfrac{1}{3}=2(x-1)$，即 $y=2x-\dfrac{7}{3}$．

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，令 $h(x)=2\ln x-x^2+3$，则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=\dfrac{2(1+x)(1-x)}{x}$．当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)=2\ln x-x^2+3$ 在 $x=1$ 时取得最大值 2，即 $f'(x)\leqslant2$．

$g'(x)=e^x+e^{-x}\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，所以 $g'(x)$ 的最小值为 2．因为 $l_1\parallel l_2$，所以 $f'(x_1)=g'(x_2)=2$，得 $x_1=1$，$x_2=0$，所以 $A\left(1,-\dfrac{1}{3}\right)$，$B(0,0)$，所以直线 AB 的方程为 $y-0=\dfrac{-\frac{1}{3}-0}{1-0}(x-0)$，即 $y=-\dfrac{1}{3}x$．

17. 解：(1)设切点为 (x_0,y_0)，则 $y_0=2e^{x_0}$，$g'(x)=2e^x$，则切线方程为 $y-2e^{x_0}=2e^{x_0}(x-x_0)$，整理可得 $y=2e^{x_0}x-2e^{x_0}x_0+2e^{x_0}$，可得 $k=2e^{x_0}$，$b=-2e^{x_0}x_0+2e^{x_0}$，则 $x_0=\ln\dfrac{k}{2}$，可得 $b=k\left(1-\ln\dfrac{k}{2}\right)$，故 b 与 k 的函数关系式为 $b=k\left(1-\ln\dfrac{k}{2}\right)$．

(2)$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，则过点 $(m,f(m))$ 的曲线 $y=f(x)$ 的切线方程为 $y-\ln m=\dfrac{1}{m}(x-m)$，整理可得 $y=\dfrac{1}{m}x+\ln m-1$．



设直线 l 与曲线 $y=g(x)$ 相切于点 $(x_1,2e^{x_1})$，则有 $y-2e^{x_1}=2e^{x_1}(x-x_1)$，所以 $2e^{x_1}=\dfrac{1}{m}$，即 $x_1=-\ln(2m)$，所以可得 $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{\ln(2m)}{m}+\dfrac{1}{m}$，结合方程 $y=\dfrac{1}{m}x+\ln m-1$，可得 $\dfrac{\ln(2m)}{m}+\dfrac{1}{m}=\ln m-1$，整理可得 $\ln m=1+\dfrac{2+\ln2}{m-1}$．

画出 $y=\ln x$ 与 $y=1+\dfrac{2+\ln2}{x-1}(x>1)$ 的图象，如图所示，当 $x>1$ 时，两图象只有一个交点，所以 $\ln m=1+\dfrac{2+\ln2}{m-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上只有一个解，即直线 l 只有一条．

重点强化练（五）

1. 解：(1)当 $a=1$，$b=-2$ 时，$f(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}-x$，$x>0$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}-1=\dfrac{x-x^2+2}{x^2}$，令 $f'(x)=2$，得 $\dfrac{x-x^2+2}{x^2}=2$，所以 $3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)=0$，解得 $x=1$(负值舍去)，

又 $f(1)=-3$，所以切点坐标为 $(1,-3)$，结合切线的斜率为 2，可得切线方程为 $y+3=2(x-1)$，即 $2x-y-5=0$．

(2)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}-1=\dfrac{-x^2+ax-b}{x^2}$，

因为 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，所以 $f'(1)=-1+a-b=0$，可得 $a=b+1$，则 $f'(x)=\dfrac{-x^2+(b+1)x-b}{x^2}=-\dfrac{(x-1)(x-b)}{x^2}$．

当 $b\leqslant0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x\in(0,1)$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(1,+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，不满足题意；

当 $0<b<1$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x\in(b,1)$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(0,b)\cup(1,+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(b,1)$ 上单调递增，在 $(0,b)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，不满足题意；

当 $b=1$ 时，$f'(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant0$，$f(x)$

在$(0,+\infty)$上单调递减，$f(x)$无极值，不满足题意；
当$b>1$时，令$f'(x)>0$，得$x\in(1,b)$，令$f'(x)<0$，得$x\in(0,1)\cup(b,+\infty)$，则$f(x)$在$(1,b)$上单调递增，在$(0,1)$，$(b,+\infty)$上单调递减，
所以$x=1$是$f(x)$的极小值点，满足题意.
综上，b的取值范围是$(1,+\infty)$.

2. 解：(1)由题知$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f'(x)=ae^x-1$.
当$a\leqslant 0$时，$f'(x)<0$恒成立，故$f(x)$在$\mathbf{R}$上是减函数；
当$a>0$时，令$f'(x)>0$，得$x>-\ln a$，令$f'(x)<0$，得$x<-\ln a$，
故$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减，在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.
综上，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上是减函数；当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减，在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.
(2)证明：方法一：由(1)知，当$a>0$时，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$，令$g(a)=1+a^2+\ln a-\left(2\ln a+\frac{3}{2}\right)=a^2-\ln a-\frac{1}{2}$$(a>0)$，则$g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$$(a>0)$.
令$g'(a)>0$，得$a>\frac{\sqrt{2}}{2}$，
令$g'(a)<0$，得$0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$g(a)$在$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增，故$g(a)\geqslant g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}>0$，
即$f(x)_{\min}>2\ln a+\frac{3}{2}$，
所以$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，故得证.
方法二：当$a>0$时，由(1)得$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=1+a^2+\ln a$，要证$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，只需证$1+a^2+\ln a>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证$a^2-\frac{1}{2}>\ln a$，易证$\ln a\leqslant a-1$，所以只需证明$a^2-\frac{1}{2}>a-1$，即证$a^2-a+\frac{1}{2}>0$. 因为$a^2-a+\frac{1}{2}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$恒成立，所以$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$成立，故得证.

3. 解：(1)当$a=-\frac{1}{2}$时，$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2+3$，$x\in(0,+\infty)$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}$，当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x>1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，
所以$f(x)$在$x=1$处取得极大值$f(1)=\frac{5}{2}$，无极小值.
(2)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax=\frac{1+2ax^2}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，
当$a\geqslant 0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.
当$a<0$时，若$x\in\left(0,-\frac{\sqrt{-2a}}{2a}\right)$，则$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left(0,-\frac{\sqrt{-2a}}{2a}\right)$上单调递增，若$x\in\left(-\frac{\sqrt{-2a}}{2a},+\infty\right)$，则$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$\left(-\frac{\sqrt{-2a}}{2a},+\infty\right)$上单调递减. 综上所述，当$a\geqslant 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；
当$a<0$时，$f(x)$在$\left(0,-\frac{\sqrt{-2a}}{2a}\right)$上单调递增，$\left(-\frac{\sqrt{-2a}}{2a},+\infty\right)$上单调递减.
(3)当$a=0$时，$f(x)=\ln x+3$.
$xf(x)>kx-k+2$，$x\in(1,+\infty)$恒成立，即$k<\frac{x\ln x+3x-2}{x-1}$恒成立.
令$F(x)=\frac{x\ln x+3x-2}{x-1}$，$x>1$，则$F'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，令$m(x)=x-\ln x-2$，$x>1$，则$m'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，所以$m(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，又$m(3)=3-\ln 3-2=1-\ln 3<0$，$m(4)=2-\ln 4>0$，所以存在唯一的实数$b\in(3,4)$，使得$m(b)=0$，即$m(b)=b-\ln b-2=0$，所以$\ln b=b-2$，
当$x\in(1,b)$时，$m(x)<0$，即$F'(x)<0$，当$x\in(b,+\infty)$时，$m(x)>0$，即$F'(x)>0$，所以$F(x)$在$(1,b)$上单调递减，在$(b,+\infty)$上单调递增，
所以$F(x)_{\min}=F(b)=\frac{b\ln b+3b-2}{b-1}=\frac{b(b-2)+3b-2}{b-1}=b+2\in(5,6)$，故$k<b+2$，又$k\in\mathbf{Z}$，所以整数$k$的最大值为5.

4. 解：(1)当$a=3$时，$f(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}+4e^x-3x-5$，$f'(x)=-e^{2x}+4e^x-3=-(e^x-1)(e^x-3)$，则当$e^x\in(0,1)\cup(3,+\infty)$，即$x\in(-\infty,0)\cup(\ln 3,+\infty)$时，$f'(x)<0$，当$e^x\in(1,3)$，即$x\in(0,\ln 3)$时，$f'(x)>0$，
故$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$，$(\ln 3,+\infty)$，单调递增区间为$(0,\ln 3)$.
(2)证明：$f'(x)=-e^{2x}+4e^x-a$，令$t=e^x$，$\varphi(t)=-t^2+4t-a$，令$t_1=e^{x_1}$，$t_2=e^{x_2}$，则t_1,t_2是方程$t^2-4t+a=0$的两个正根，则$\Delta=(-4)^2-4a=16-4a>0$，即$a<4$，故$t_1+t_2=4$，$t_1t_2=a>0$，所以$0<a<4$，所以$f(x_1)+f(x_2)+x_1+x_2=-\frac{1}{2}e^{2x_1}+4e^{x_1}-ax_1-5-\frac{1}{2}e^{2x_2}+4e^{x_2}-ax_2-5+x_1+x_2=-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)+4(t_1+t_2)-(a-1)(\ln t_1+\ln t_2)-10=-\frac{1}{2}[(t_1+t_2)^2-2t_1t_2]+4(t_1+t_2)-(a-1)\ln(t_1t_2)-10=-\frac{1}{2}(16-2a)+16-(a-1)\ln a-10=a-(a-1)\ln a-2$.
要证$f(x_1)+f(x_2)+x_1+x_2<0$，即证$a-(a-1)\ln a-2<0(0<a<4)$.
令$g(x)=x-(x-1)\ln x-2(0<x<4)$，则$g'(x)=1-\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\ln x$，令$h(x)=\frac{1}{x}-\ln x(0<x<4)$，则$h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$，则$g'(x)$在$(0,4)$上单调递减，又$g'(1)=\frac{1}{1}-\ln 1=1$，$g'(2)=\frac{1}{2}-\ln 2<0$，故存在$x_0\in(1,2)$，使$g'(x_0)=\frac{1}{x_0}-\ln x_0=0$，即$\frac{1}{x_0}=\ln x_0$，则当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)>0$，当$x\in(x_0,4)$时，$g'(x)<0$，故$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，$g(x)$在$(x_0,4)$上单调递减，则$g(x)\leqslant g(x_0)=x_0-(x_0-1)\ln x_0-2=x_0-(x_0-1)\times\frac{1}{x_0}-2=x_0+\frac{1}{x_0}-3$，又$x_0\in(1,2)$，则$x_0+\frac{1}{x_0}\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$，故$g(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}-3<0$，
即$g(x)<0$，即$f(x_1)+f(x_2)+x_1+x_2<0$.

5. 解：(1)因为函数$f(x)$在$x=x_0$处的泰勒展开式为$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$(其中$f^{(n)}(x)$表示$f(x)$的$n$次导数)，所以$y=e^x$，$y=\sin x$，$y=\cos x$在$x=0$处的泰勒展开式分别为$y=e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$，$y=\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$，$y=\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$.
(2)证明：把$y=e^x$在$x=0$处的泰勒展开式中的x替换为ix，可得$e^{ix}=1+(ix)+\frac{1}{2!}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\frac{1}{4!}(ix)^4+\cdots+\frac{1}{n!}(ix)^n+\cdots=\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\right]+i\cdot\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots\right]=\cos x+i\cdot\sin x$，
所以$e^{i\pi}=\cos\pi+i\cdot\sin\pi=-1$，
即$e^{i\pi}+1=0$.
(3)证明：结合$y=\sin x$在$x=0$处的泰勒展开式，先证当$x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$时，$\sin x>x-\frac{1}{6}x^3$，令$f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$，$x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$，所以$f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$，$f''(x)=x-\sin x$，
$f'''(x)=1-\cos x$，又$x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$，所以$f'''(x)>0$，所以$f''(x)$在$\left(0,\frac{3}{2}\right)$上单调递增，所以$f''(x)>f''(0)=0$，所以$f'(x)$在$\left(0,\frac{3}{2}\right)$上单调递增，所以$f'(x)>f'(0)=0$，所以$f(x)$在$\left(0,\frac{3}{2}\right)$上单调递增，所以$f(x)>f(0)=0$.
令$g(x)=x-\frac{1}{6}x^3-\ln(x+1)$，$x\in\left(0,\right.$

$\frac{3}{2}\Big)$，则 $g'(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x(x-1)(x+2)}{x+1}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $\Big(1,\frac{3}{2}\Big)$ 上单调递减，而 $g(0)=0$，$g\Big(\frac{3}{2}\Big)=\frac{15}{16}-\ln\frac{5}{2}>0$，所以当 $x\in\Big(0,\frac{3}{2}\Big)$ 时，$g(x)>0$ 恒成立，所以 $\sin x>x-\frac{1}{6}x^3>\ln(x+1)$，所以 $e^{\sin x}>x+1$.

重点强化练（六）

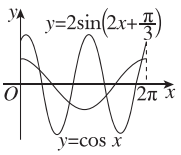
1. A ［解析］令 $y=\lg t$，$t=\tan x-1$，函数 $t=\tan x-1$ 的定义域为 $\Big\{x\Big|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\Big\}$，函数 $y=\lg t$ 的定义域为 $t>0$，则 $\tan x-1>0$，即 $\Big\{x\Big|\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\Big\}$，所以 $y=\lg(\tan x-1)$ 的定义域为 $\Big\{x\Big|\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\Big\}$，故选 A.

2. D ［解析］令 $\sin\Big(2x+\frac{\pi}{4}\Big)=0$，则 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{3\pi}{8}$，所以其中一个对称中心为 $\Big(\frac{3\pi}{8},0\Big)$，故选 D.

3. A ［解析］$f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $y=\sin 2\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)=\sin\Big(2x+\frac{\pi}{2}\Big)=\cos 2x$ 的图象，再把所得图象的横坐标缩短为原来的一半，得到 $g(x)=\cos 4x$ 的图象，故选 A.

4. A ［解析］对于选项 A，因为 $y=\cos\Big(2x+\frac{\pi}{2}\Big)=-\sin 2x$，所以其为奇函数，其最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，若 $x\in\Big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\Big]$，则 $2x\in\Big(\frac{\pi}{2},\pi\Big]$，且 $y=\sin x$ 在 $\Big(\frac{\pi}{2},\pi\Big]$ 上单调递减，则 $y=\sin 2x$ 在 $\Big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\Big]$ 上单调递减，所以 $y=-\sin 2x$ 在 $\Big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\Big]$ 上单调递增，故 A 正确；对于选项 B，由选项 A 可知 $y=\sin 2x$ 在 $\Big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\Big]$ 上单调递减，故 B 错误；对于选项 C，$y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处无意义，故 C 错误；对于选项 D，$y=\sin\Big(2x+\frac{\pi}{2}\Big)=\cos 2x$，若 $x\in\Big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\Big]$，则 $2x\in\Big(\frac{\pi}{2},\pi\Big]$，因为 $y=\cos x$ 在 $\Big(\frac{\pi}{2},\pi\Big]$ 上单调递减，所以 $y=\cos 2x$ 在 $\Big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\Big]$ 上单调递减，故 D 错误. 故选 A.

5. C ［解析］当 $x=0$ 时，$y=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{\pi}{12}$，此时 $y=2\sin\Big(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\Big)=2$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=\pi$，得 $x=\frac{\pi}{3}$，此时 $y=2\sin\Big(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\Big)=0$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，得 $x=\frac{7\pi}{12}$，此时 $y=2\sin\Big(2\times\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\Big)=-2$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$，得 $x=\frac{5\pi}{6}$，此时 $y=2\sin\Big(2\times\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\Big)=0$，当 $x=\pi$ 时，$y=2\sin\Big(2\times\pi+\frac{\pi}{3}\Big)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，函数 $y=2\sin\Big(2x+\frac{\pi}{3}\Big)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 结合周期，利用五点法作出 $y=\cos x$ 和 $y=2\sin\Big(2x+\frac{\pi}{3}\Big)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，由图知，共有 4 个交点. 故选 C.



6. B ［解析］由题设有 $f(x)=f\Big(\frac{10\pi}{3}-x\Big)$，且可知 $f(x)=g\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)$，所以 $f\Big(\frac{10\pi}{3}-x\Big)=g\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{10\pi}{3}+x\Big)$，故 $g\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)=g\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{10\pi}{3}+x\Big)$，所以 $g(x)$ 的图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{10\pi}{3}\Big)=-\frac{7\pi}{6}$. 又 $g(x)$ 的周期为 2π，所以其图象的一条对称轴方程可以为 $x=-\frac{7\pi}{6}+2\pi=\frac{5\pi}{6}$. 故选 B.

7. A ［解析］由 $f\Big(\frac{\pi}{4}\Big)=1$，得 $\sin\Big(\frac{\pi}{4}\omega+\varphi\Big)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，结合图象可知 $\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 由 $f\Big(\frac{5\pi}{8}\Big)=0$，结合图象可知 $\frac{5\pi}{8}\omega+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\Big(2x-\frac{\pi}{4}\Big)$. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\theta(\theta>0)$ 个单位长度后，得到 $y=\sin\Big(2x-2\theta-\frac{\pi}{4}\Big)$ 的图象，则 $-2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因此 $\theta=-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，而 $\theta>0$，所以当 $k=1$ 时，θ 取得最小值 $\frac{\pi}{8}$. 故选 A.

8. C ［解析］由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\Big(\frac{\pi}{3},0\Big)$ 中心对称，且 $x=-\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的极值点，可得 $\begin{cases}\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi+\frac{\pi}{2},\\-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi\end{cases}$ $(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，即 $\begin{cases}\omega=\dfrac{3(2k+1)}{4},\\\varphi=\dfrac{k'\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ $(k,k'\in\mathbf{Z})$，其中 $k=k_1-k_2$，$k'=k_1+k_2=2k_1-k$，$k,k',k_1,k_2\in\mathbf{Z}$. 因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，当 $k'=-1$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，$k=2k_1+1$，$k_1\in\mathbf{Z}$，当 $k'=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，$k=2k_1$，$k_1\in\mathbf{Z}$. 因为 $f(x)$ 在区间 $\Big(0,\frac{2\pi}{5}\Big)$ 内有唯一的极大值点，所以 $\frac{2\pi}{5}-0=\frac{2\pi}{5}\leqslant 2T=\frac{4\pi}{\omega}$，解得 $0<\omega\leqslant 10$，即 $0<\frac{3(2k+1)}{4}\leqslant 10$，所以 $-\frac{1}{2}<k\leqslant\frac{37}{6}$. 当 $k=6$ 时，$\omega=\frac{39}{4}$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $\frac{39}{4}x+\frac{\pi}{4}\in\Big(\frac{\pi}{4},\frac{83\pi}{20}\Big)$，此时 $f(x)$ 有两个极大值点，舍去；当 $k=5$ 时，$\omega=\frac{33}{4}$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，此时 $\frac{33}{4}x-\frac{\pi}{4}\in\Big(-\frac{\pi}{4},\frac{61\pi}{20}\Big)$，此时 $f(x)$ 有两个极大值点，舍去；当 $k=4$ 时，$\omega=\frac{27}{4}$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $\frac{27}{4}x+\frac{\pi}{4}\in\Big(\frac{\pi}{4},\frac{59\pi}{20}\Big)$，此时 $f(x)$ 有一个极大值点. 所以 ω 的最大值为 $\frac{27}{4}$. 故选 C.

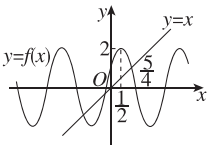
9. ACD ［解析］$f(x)=\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x+\sqrt{2}=2\sin\Big(3x+\frac{\pi}{3}\Big)+\sqrt{2}$. 对于 A，$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$，故 A 正确；对于 B，$f\Big(-\frac{\pi}{9}\Big)=2\sin\Big(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\Big)+\sqrt{2}=\sqrt{2}$，故 B 错误；对于 C，$f\Big(\frac{\pi}{18}\Big)=2\sin\Big(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\Big)+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$ 为函数最大值，故 C 正确；对于 D，若 $x\in\Big[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{18}\Big]$，则 $3x+\frac{\pi}{3}\in\Big[\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\Big]$，故 $f(x)$ 在区间 $\Big[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{18}\Big]$ 上单调递减，故 D 正确. 故选 ACD.

10. BC ［解析］由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象可知 $A=2$，又因为 $f(0)=2\sin(\omega\times 0+\varphi)=1$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi\in(0,2\pi)$，所以结合函数的图象可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 A 错误；$f\Big(\frac{5\pi}{12}\Big)=2\sin\Big(\omega\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\Big)=0$，即 $\sin\Big(\frac{5\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{6}\Big)=0$，结合函数图象可得 $\frac{5\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{6}=\pi$，所以 $\omega=2$，故 B 正确；$f(x)=2\sin\Big(2x+\frac{\pi}{6}\Big)$，当 $x=\frac{5\pi}{3}$ 时，$f\Big(\frac{5\pi}{3}\Big)=2\sin\Big(\frac{20\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\Big)=2\sin\frac{7\pi}{2}=-2$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{3}$ 对称，故 C 正确；当 $x\in\Big[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\Big]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\Big[\frac{2\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\Big]$，所以 $\sin\Big(2x+\frac{\pi}{6}\Big)\in\Big[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big]$，即 $f(x)=2\sin\Big(2x+\frac{\pi}{6}\Big)\in[-2,\sqrt{3}]$，故 D 错误.

1399答案网

故选 BC.

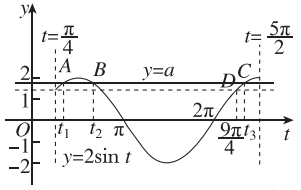
11. AD ［解析］对于 A 选项，把点 $A(0,1)$ 的坐标代入得 $2\sin\varphi=1$，则 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，A 正确；对于 B 选项，$B(x_0,-2)(x_0>0)$ 为函数图象的最低点，$|AB|_{\min}=\sqrt{13}$，故 $\sqrt{x_0^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}$，解得 $x_0=2$（负值舍去），则 $\frac{1}{2}T<2<\frac{3}{4}T$，其中 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，故 $\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{3\pi}{4}$，又 $2\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-2$，即 $\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，由 $\frac{7\pi}{6}<2\omega+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{3}$，得 $2\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，解得 $\omega=\frac{2\pi}{3}$，B 错误；对于 C 选项，$f(x)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in\left[-\frac{1}{4},1\right]$ 时，$\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$，故 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)\in[0,1]$，故 $f(x)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)\in[0,2]$，C 错误；对于 D 选项，画出 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 的函数图象，如图，两函数图象有三个交点，故 $y=x-f(x)$ 有三个零点，D 正确. 故选 AD.



12. $-\frac{\pi}{6}$（答案不唯一） ［解析］函数 $y=|x-2|$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，则只需 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\varphi\right)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称即可，所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

13. $\frac{3}{2}$ ［解析］因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 为偶函数，所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $f(x)=\cos\omega x$ 或 $f(x)=-\cos\omega x$. 又 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称，所以 $\cos\frac{\pi}{3}\omega=0$，即 $\frac{\pi}{3}\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=3k+\frac{3}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，所以 $T\geqslant\frac{\pi}{2}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\omega\leqslant4$，所以当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{3}{2}$，符合条件.

14. $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{11\pi}{8}\right)$ ［解析］将 $(0,\sqrt{2})$ 代入 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ 得 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 因为在 y 轴右侧的第一个零点为 $\frac{3\pi}{8}$，所以结合题意可得 $\omega\times\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\pi$，解得 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. 令 $2x+\frac{\pi}{4}=t$，由 $x\in\left[0,\frac{9\pi}{8}\right]$ 可得 $t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{2}\right]$，依题可知方程 $2\sin t=a$，$t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{2}\right]$ 恰有三个不同的根，设其分别为 t_1,t_2,t_3，且 $t_i=2x_i+\frac{\pi}{4}(i=1,2,3)$，画出 $y=a$ 与 $y=2\sin t$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{2}\right]$ 上的图象，如图. 由图易知 t_1,t_2 关于直线 $t=\frac{\pi}{2}$ 对称，则 $t_1+t_2=\pi$. 由图知 $t_3\in\left[\frac{9\pi}{4},\frac{5\pi}{2}\right)$，则 $t_1+t_2+t_3\in\left[\frac{13\pi}{4},\frac{7\pi}{2}\right)$，又 $t_1+t_2+t_3=2(x_1+x_2+x_3)+\frac{3\pi}{4}$，所以 $\frac{13\pi}{4}\leqslant2(x_1+x_2+x_3)+\frac{3\pi}{4}<\frac{7\pi}{2}$，解得 $\frac{5\pi}{4}\leqslant x_1+x_2+x_3<\frac{11\pi}{8}$，故 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围为 $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{11\pi}{8}\right)$.



重点强化练（七）

1. D ［解析］由题意可得 $\sin^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{7\pi}{12}=\sin^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

2. D ［解析］因为 $P\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$，即 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，即角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

3. C ［解析］方法一（特殊法）：由题知 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 满足条件，所以 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

方法二：由题得 $\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=1$，所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，所以 $\theta+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\tan\theta=\tan\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

方法三：由题得 $\sin\theta=2-\sqrt{3}\cos\theta$，所以 $(2-\sqrt{3}\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$，所以 $4\cos^2\theta-4\sqrt{3}\cos\theta+3=0$，即 $(2\cos\theta-\sqrt{3})^2=0$，所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=2-\sqrt{3}\cos\theta=\frac{1}{2}$，所以 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. A ［解析］$\frac{2\cos65^\circ\cos15^\circ}{\tan15^\circ\cos10^\circ+\sin10^\circ}=\frac{2\cos65^\circ\cos^215^\circ}{\tan15^\circ\cos10^\circ\cos15^\circ+\sin10^\circ\cos15^\circ}=\frac{\sin25^\circ\times(1+\cos30^\circ)}{\sin25^\circ}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，故选 A.

5. D ［解析］因为 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$，所以 $2\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$，又 $\sin2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$，所以 $2\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$，可得 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos2\alpha=-\sqrt{1-\sin^22\alpha}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$. 又因为 $\beta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$，所以 $\beta-\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$，又 $\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{6}}{6}>0$，所以可得 $\beta-\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos(\beta-\alpha)=-\sqrt{1-\sin^2(\beta-\alpha)}=-\frac{\sqrt{30}}{6}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha+(\beta-\alpha)]=\cos2\alpha\cos(\beta-\alpha)-\sin2\alpha\sin(\beta-\alpha)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{6}$. 故选 D.

6. A ［解析］因为 $\sin^4\frac{\theta}{2}-\cos^4\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，所以 $\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{3}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，所以 $\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}=-\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，即 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，所以 $\frac{1+\sin2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+\cos\theta=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+\cos\theta=\frac{1+2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{26}{35}$. 故选 A.

7. D ［解析］由题知 $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\cos\left[\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)+\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\frac{1}{4}$，化简得 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left[\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，令 $t=x+\frac{\pi}{6}$，则 $x=t-\frac{\pi}{6}$，$\cos t=\frac{1}{4}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{6}-2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)=\cos2t=2\cos^2t-1=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-1=-\frac{7}{8}$. 故选 D.

8. A ［解析］$\because\alpha,\beta$ 为锐角，且 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{2\sin\beta}{\sin\alpha}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\therefore$ 两

1083376657

边同时除以 $\cos\beta$，得 $\cos\alpha-\sin\alpha\tan\beta=\frac{2\tan\beta}{\sin\alpha}$，∴ $\cos\alpha\sin\alpha=(\sin^2\alpha+2)\tan\beta$. ∵$\alpha$ 为锐角，∴ $\tan\alpha>0$，∴ $\tan\beta=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2+\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{3\tan^2\alpha+2}=\frac{1}{3\tan\alpha+\frac{2}{\tan\alpha}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$，当且仅当 $3\tan\alpha=\frac{2}{\tan\alpha}$，即 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时取等号，∴$\tan\beta$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{12}$. 故选 A.

9. AD ［解析］对于 A 选项，$\sin 63°\cos 18°-\cos 63°\sin 18°=\sin(63°-18°)=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 A 正确；对于 B 选项，$\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\times 2\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$，所以 B 不正确；对于 C 选项，$\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}=-\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 C 不正确；对于 D 选项，$\frac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}=\frac{\tan 45°+\tan 15°}{1-\tan 45°\tan 15°}=\tan(45°+15°)=\tan 60°=\sqrt{3}$，所以 D 正确. 故选 AD.

10. AD ［解析］$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $21x^2-10x+1=0$ 的两根，且 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan\alpha=\frac{1}{7}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$. $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$，故 A 选项正确；$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{11}$，故 B 选项错误；$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}}=-\frac{2}{11}$，故 C 选项错误；因为 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\alpha+2\beta<\pi$，又 $\tan(\alpha+2\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\beta]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$，所以 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$，故 D 选项正确. 故选 AD.

11. BD ［解析］对于 A，$\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)]=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)=-\cos\alpha\sin\beta$，故 A 错误；对于 B，$2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\varphi}{2}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)=2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\theta-\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin\varphi-\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\varphi+\sin\theta\sin^2\frac{\varphi}{2}=\sin\theta-\sin\varphi$，故 B 正确；对于 C，若 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$，则 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，$\tan(\alpha+\beta)+\tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{2\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{2\pi}{3}=-4\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}\neq-4\sqrt{3}$，故 C 错误；对于 D，$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin 2\alpha\cos\beta+\cos 2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta+\frac{\cos 2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos 2\alpha\sin\beta+2\sin^2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\cos 2\alpha\sin\beta+(1-\cos 2\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$，故 D 正确. 故选 BD.

12. $\frac{1}{2}$ ［解析］由 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha$，得 $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 2\alpha$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\alpha$，由 $\alpha\in\left(0,\frac{5\pi}{18}\right)$，得 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{9}\right)$，$2\alpha\in\left(0,\frac{5\pi}{9}\right)$，因此 $\alpha+\frac{\pi}{6}=2\alpha$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

13. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ［解析］由题意，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，故 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$，故 $\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta-\beta)=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=\frac{7}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}$，故 $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

14. $\frac{8}{3}$ ［解析］由题可知 $\sin\alpha-\sin\beta=-\cos\alpha+\cos\beta$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\beta+\cos\beta$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\beta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，又 $\alpha\neq\beta$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}+\beta+\frac{\pi}{4}=\pi$，故 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\alpha-\sin\beta=\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，两边平方后得 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$，故 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{8}{3}$.

重点强化练（八）

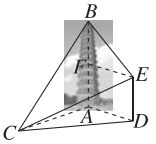
1. C ［解析］由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，即 $\frac{2^2+c^2-(\sqrt{7})^2}{2\times 2c}=\frac{1}{2}$，即 $c^2-2c-3=0$，解得 $c=3$ 或 $c=-1$(舍). 故选 C.

2. A ［解析］根据正弦定理得 $\sin B=2\sin A\sin B$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $1=2\sin A$，解得 $\sin A=\frac{1}{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}=1$. 故选 A.

3. C ［解析］∵$a^2+b^2=2c^2$，∴由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geqslant\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2}=\frac{2c^2-c^2}{2c^2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，∵C 为三角形的内角，∴C 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

4. B ［解析］$a=a\cos B+b\cos A$，由正弦定理可得 $\sin A=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，即 $\sin A=\sin(A+B)=\sin C$，又 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $A,C\in(0,\pi)$ 且 $A+C\in(0,\pi)$，所以 $A=C=\frac{\pi}{4}$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$，又 $a=1$，所以 $c=1$，$b=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{2}$. 故选 B.

5. B ［解析］$AB\perp$平面 ACD，$DE\perp$平面 ACD，过点 E 作 $EF\perp AB$，交 AB 于点 F，则有 $EF=AD$，$AF=ED$. 在 Rt△ECD 中，因为 $\angle ECD=30°$，所以 $DE=CD\cdot\tan\angle DCE=18\times\tan 30°=6\sqrt{3}$. 在 Rt△$BEF$ 中，因为 $\angle BEF=60°$，所以 $BF=EF\cdot\tan\angle BEF=15\times\tan 60°=15\sqrt{3}$，则 $AB=BF+AF=BF+ED=15\sqrt{3}+6\sqrt{3}=21\sqrt{3}\approx 36.4$ m. 故选 B.



6. A ［解析］因为 $a=\sqrt{3}$，且 $(\sin A-\sin B)(b+\sqrt{3})=c(\sin B+\sin C)$，所以 $(\sin A-\sin B)(a+b)=c(\sin B+\sin C)$，由正弦定理，可得 $(a-b)(a+b)=c(b+c)$，即 $a^2=b^2+c^2+bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$，所以△ABC 外接圆的半径为 $\frac{a}{2\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$. 故选 A.

7. B ［解析］由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为△ABC 的外接圆半径），可得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=$

$2R\sin C$，且 $A,B,C\in(0,\pi)$，则 $\sin A,\sin B,\sin C$ 均为正数．因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2R\sin A\times 2R\sin B\times\sin C=2\sin A\sin B\sin C$，所以 $R=1$，又因为 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C=2(\sin A+\sin B+\sin C)=1$，所以 $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{2}$．故选 B．

8. B ［解析］在 Rt$\triangle ADC$ 中，设 $\angle ACD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，$AC=x(x>0)$，则 $CB=2x$，$CD=x\cos\theta$．在 $\triangle BCD$ 中，可得 $\angle BCD=120^\circ-\theta$，$\angle CBD=\theta-60^\circ$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle CDB}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，所以 $\frac{2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x\cos\theta}{\sin(\theta-60^\circ)}=\frac{x\cos\theta}{\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$，所以 $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\tan\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}}$，可得 $\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $\tan\angle ACD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．故选 B．

9. ABD ［解析］对于 A，若 $A>B$，则 $a>b$，由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\sin A>\sin B$，故 A 正确；对于 B，$b\sin A=4\sin 30^\circ=2$，则 $b\sin A<a<b$，所以 $\triangle ABC$ 有两解，故 B 正确；对于 C，当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，且 C 为钝角时，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，可得 $a^2+b^2<c^2$，若 C 不为钝角，则得不到 $a^2+b^2<c^2$，故 C 错误；对于 D，由余弦定理与基本不等式可得 $4=a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$，即 $bc\leqslant 4$，当且仅当 $b=c=2$ 时，等号成立，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$，故 D 正确．故选 ABD．

10. ABC ［解析］对于 A，因为 $a^2+b^2<c^2$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，故角 C 为钝角，A 正确．对于 B，由 $a\sin A=b\sin B$ 结合正弦定理得 $a^2=b^2$，从而 $a=b$，故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，B 正确．对于 C，方法一，因为 $a\cos C+c\cos A=c$，所以由余弦定理得 $a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}=c$，所以 $2b^2=2bc$，所以 $b=c$，则 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形，C 正确；方法二，$a\cos C+c\cos A=c$，由正弦定理得 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin C$，所以 $\sin(A+C)=\sin C$，所以 $\sin B=\sin C$，又 $B,C\in(0,\pi)$，$B+C\in(0,\pi)$，所以 $B=C$，则 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形，C 正确．对于 D，因为 $c=2a\cos B$，所以 $c=2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，即 $c^2=a^2+c^2-b^2$，即 $a=b$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，推不出 $\triangle ABC$ 为直角三角形，D 错误．故选 ABC．

11. ACD ［解析］在 $\triangle DBE$ 中，由余弦定理得 $DE^2=BD^2+BE^2-2BD\cdot BE\times\cos 120^\circ=0.49$，所以 $DE=0.7$ km，故 A 正确；在 $\triangle DEQ$ 中，由正弦定理得 $\frac{DQ}{\sin\angle DEQ}=\frac{DE}{\sin\angle DQE}$，得 $DQ=\frac{DE\sin\angle DEQ}{\sin\angle DQE}=\frac{0.7\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7\sqrt{6}}{30}$(km)，故 B 错误；在 $\triangle DEQ$ 中，由余弦定理得 $0.7^2=DQ^2+QE^2-2DQ\cdot QE\times\frac{1}{2}\geqslant 2DQ\cdot QE-DQ\cdot QE=DQ\cdot QE$，当且仅当 $DQ=QE$ 时等号成立，所以 $DQ\cdot QE\leqslant\frac{49}{100}$，则 $\triangle DEQ$ 的面积为 $\frac{1}{2}DQ\cdot QE\sin 60^\circ\leqslant\frac{49\sqrt{3}}{400}$，故 C 正确；由上可得 $0.7^2=DQ^2+QE^2-2DQ\cdot QE\times\frac{1}{2}=(DQ+QE)^2-3DQ\cdot QE$，所以 $0.7^2\geqslant(DQ+QE)^2-3\left(\frac{DQ+QE}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(DQ+QE)^2$，当且仅当 $DQ=QE$ 时等号成立，所以 $DQ+QE\leqslant 2\times 0.7=1.4$，故 D 正确．故选 ACD．

12. 2 ［解析］由 $a\sin B=2b\cos A$ 知 $\cos A=\frac{a\sin B}{2b}>0$，故 $\tan A$ 存在．由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$，可得 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2b\sin A}{2b\cos A}=\frac{2b\sin A}{a\sin B}=\frac{2b\cdot a}{a\cdot b}=2$．

13. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ［解析］由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4c^2+c^2-16}{4c^2}=-\frac{3}{4}$，可得 $c=\sqrt{2}$，所以 $b=2c=2\sqrt{2}$，又因为 $\cos A=-\frac{3}{4}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{2}$．

14. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ［解析］$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，$\therefore\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{1}{2}cBD\sin\angle ABD+\frac{1}{2}aBD\sin\angle CBD$，$\therefore\frac{1}{2}ac\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}c\times 1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\times 1\times 1$，$\therefore\sqrt{3}ac=c+2a$，$\therefore\sqrt{3}=\frac{1}{a}+\frac{2}{c}$，$\therefore 2a+c=\frac{1}{\sqrt{3}}(2a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{c}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2+\frac{4a}{c}+\frac{c}{a}+2\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\times(2\sqrt{4}+4)=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\frac{4a}{c}=\frac{c}{a}$，即 $c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立．

15. 解：(1)因为 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$，所以由正弦定理得 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，

所以 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，可得 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\cos A\sin C+\sin C$，因为 $\sin C>0$，所以 $\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$，所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．

(2)因为 $a=2\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，所以 $bc=8$．由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc=(b+c)^2-24=12$，所以 $b+c=6$，由 $\begin{cases}bc=8,\\b+c=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=4,\\c=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=2,\\c=4,\end{cases}$ 因为 $b>c$，所以 $\begin{cases}b=4,\\c=2.\end{cases}$

16. 解：(1)设 $ED_1=h$，因为在 A_1,B_1,C_1 处观察已建建筑物最高点 E 的仰角分别为 α,β,γ，且 $\tan\alpha=1$，$\tan\beta=2$，$\tan\gamma=3$，所以 $A_1D_1=h$，$B_1D_1=\frac{h}{2}$，$C_1D_1=\frac{h}{3}$，又 $A_1C_1=40$，B_1 是 A_1C_1 的中点，所以在 $\triangle A_1B_1D_1$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle A_1B_1D_1=\frac{400+\frac{h^2}{4}-h^2}{2\times 20\times\frac{h}{2}}$，

在 $\triangle C_1B_1D_1$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle C_1B_1D_1=\frac{400+\frac{h^2}{4}-\frac{h^2}{9}}{2\times 20\times\frac{h}{2}}$，

又 $\angle A_1B_1D_1+\angle C_1B_1D_1=\pi$，所以 $\frac{400+\frac{h^2}{4}-h^2}{2\times 20\times\frac{h}{2}}+\frac{400+\frac{h^2}{4}-\frac{h^2}{9}}{2\times 20\times\frac{h}{2}}=0$，整理得 $\frac{11h^2}{18}=800$，可得 $h=\frac{120\sqrt{11}}{11}$，所以 $DE=5+\frac{120\sqrt{11}}{11}$(m)．

(2)在 $\triangle A_1B_1D_1$ 中，由正弦定理知 $\frac{A_1B_1}{\sin\angle A_1D_1B_1}=\frac{A_1D_1}{\sin\angle A_1B_1D_1}$ ①，在 $\triangle C_1B_1D_1$ 中，由正弦定理知 $\frac{B_1C_1}{\sin\angle C_1D_1B_1}=\frac{C_1D_1}{\sin\angle C_1B_1D_1}$ ②，

由(1)知 $\frac{C_1D_1}{A_1D_1}=\frac{1}{3}$，$\sin\angle A_1B_1D_1=\sin\angle C_1B_1D_1$，所以由 ② ÷ ① 得到 $\frac{\sin\angle A_1D_1B_1}{\sin\angle B_1D_1C_1}=\frac{C_1D_1}{A_1D_1}=\frac{1}{3}$．

17. 解：(1)证明：因为 $a-c=2c\cos B$，所以由正弦定理得 $\sin A-\sin C=2\sin C\cos B$，所以 $\sin B\cos C+\sin C\cos B-\sin C=2\sin C\cos B$，所以 $\sin B\cos C-\sin C\cos B=\sin C$，故 $\sin(B-C)=\sin C$，而 $0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $B-C=C$，故 $B=2C$．

(2)因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<2C<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-3C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos C<\frac{\sqrt{3}}{2}$．由正弦定理可得 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，则 $b=\frac{\sin B}{\sin C}\cdot c=\frac{\sin 2C}{\sin C}\cdot c=2\cos C\cdot c$，所以 $\frac{\cos C}{b}=\frac{1}{2c}$，所以 $\frac{\cos C}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{2c}$．因为 $a-c=2c\cos B$，所以 $2-c=2c\cos 2C$，所以 $c=\frac{2}{2\cos 2C+1}$，所以 $\frac{\cos C}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{2c}=$

$\frac{3}{4}=\frac{3(2\cos 2C+1)}{4}=\frac{3(4\cos^2 C-1)}{4}$，因为 $\cos C\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $4\cos^2 C-1\in(1,2)$，所以 $\frac{\cos C}{b}+\frac{1}{c}$ 的取值范围是 $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$.

18. 解：(1)因为 $2c-b=2a\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}a\sin C-a\cos C$，所以由正弦定理可得 $2\sin C-\sin B=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin A\cos C$，又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以 $2\sin C-\sin A\cos C-\cos A\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin A\cos C$，整理可得 $2\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C+\cos A\sin C=2\sin C\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，可得 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle CAD}$，所以 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD+\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle CAD$，即 $\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}c\times 1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1\times b\times\frac{1}{2}$，可得 $b+c=\sqrt{3}bc$. 在 $\triangle BAC$ 中，由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC=(b+c)^2-2bc-2bc\cos\angle BAC$，即 $6=3(bc)^2-2bc-bc$，整理可得 $(bc)^2-bc-2=0$，解得 $bc=2$ 或 $bc=-1$(舍去)，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. 解：(1)因为 $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1$，所以 $1-2\sin^2 A+1-2\sin^2 B-1+2\sin^2 C=1$，即 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，由正弦定理得 $a^2+b^2=c^2$，所以 $C=90°$.

(2)由(1)知 $C=90°$，所以 $\triangle ABC$ 的三个角都小于 120°，因为点 M 为 $\triangle ABC$ 的费马点，所以 $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120°$. 由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AMB}+S_{\triangle BMC}+S_{\triangle CMA}$，得 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}MA\cdot MB\sin 120°+\frac{1}{2}MB\cdot MC\sin 120°+\frac{1}{2}MC\cdot MA\sin 120°$，整理得 $MA\cdot MB+MB\cdot MC+MC\cdot MA=\frac{2\sqrt{3}}{3}ab$，又因为 $16=c^2=a^2+b^2\geqslant 2ab$，所以 $ab\leqslant 8$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，所以 $MA\cdot MB+MB\cdot MC+MC\cdot MA=\frac{2\sqrt{3}}{3}ab\leqslant\frac{16\sqrt{3}}{3}$，所以 $MA\cdot MB+MB\cdot MC+MC\cdot MA$ 的最大值为 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

(3)由(2)知 $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120°$. 设 $MC=x$，$MA=mx$，$MB=nx(x>0,m>0,n>0)$，由 $MA+MB=tMC$ 得 $m+n=t$. 在 $\triangle ACM$ 中，由余弦定理得，$AC^2=x^2+m^2x^2-2mx^2\cos 120°=(m^2+m+1)x^2$. 在 $\triangle BCM$ 中，由余弦定理得，$BC^2=x^2+n^2x^2-2nx^2\cos 120°=(n^2+n+1)x^2$. 在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理得，$AB^2=m^2x^2+n^2x^2-2mnx^2\cos 120°=(m^2+n^2+mn)x^2$. 因为 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $(m^2+m+1)x^2+(n^2+n+1)x^2=(m^2+n^2+mn)x^2$，整理得 $m+n+2=mn$. 因为 $m+n+2=mn\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$，当且仅当 $m=n$ 时等号成立，所以 $t+2\leqslant\left(\frac{t}{2}\right)^2$，整理得 $t^2-4t-8\geqslant 0$，解得 $t\geqslant 2+2\sqrt{3}$ 或 $t\leqslant 2-2\sqrt{3}$(舍去)，所以实数 t 的最小值为 $2+2\sqrt{3}$.

重点强化练（九）

1. B [解析] 根据等比数列的性质可得 $a_3a_5=a_4^2$，∴ $a_4^2=4(a_4-1)$，即 $(a_4-2)^2=0$，解得 $a_4=2$，又 $a_1=1$，$a_1a_7=a_4^2=4$，∴$a_7=4$. 故选 B.

2. B [解析] 由 $\log_2(-d)=1$，得 $d=-2$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，因为 $\{a_n\}$ 的前三项中最大的一项是 1，所以 $a_1=1$，所以 $a_n=1+(n-1)\times(-2)=-2n+3$，所以 $a_5=-2\times 5+3=-7$. 故选 B.

3. D [解析] 设等比数列的公比为 q，由等比数列的通项公式可得 $a_1q^2=-a_1q+2a_1$，整理得 $q^2+q-2=0$，解得 $q=1$ 或 $q=-2$. 当 $q=1$ 时，$\frac{S_8}{S_4}=\frac{8a_1}{4a_1}=2$；当 $q=-2$ 时，$\frac{S_8}{S_4}=\frac{\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}}=\frac{q^8-1}{q^4-1}=q^4+1=17$. 所以 $\frac{S_8}{S_4}$ 的值为 2 或 17. 故选 D.

4. D [解析] 由题意知 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 所在直线上任意一点，即 P,B,C 共线，则由 $\overrightarrow{AP}=a_3\overrightarrow{AB}+a_{16}\overrightarrow{AC}$，可得 $a_3+a_{16}=1$，故 $S_{18}=\frac{18(a_1+a_{18})}{2}=\frac{18(a_3+a_{16})}{2}=9$. 故选 D.

5. A [解析] 因为点 (n,a_n+a_{n+1}) 在函数 $y=kx+1$ 的图象上，所以 $a_n+a_{n+1}=kn+1$，即 $a_{n+1}=kn+1-a_n$，又 $a_1=1$，所以 $a_2=k+1-a_1=k$，$a_3=2k+1-a_2=k+1$，$a_4=3k+1-a_3=2k$，因为 a_1,a_2,a_4 成等比数列，所以 $k^2=1\times 2k$，解得 $k=2$ 或 $k=0$(舍去). 故选 A.

6. D [解析] 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_3>a_2>a_1$，得 $a_1q^2>a_1q>a_1$，则 $a_1<0$，$0<q<1$ 或 $a_1>0$，$q>1$. 由数列 $\{S_n\}$ 为递增数列，得 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n>0$，即 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_1q^n>0$，因此 $a_1>0$，$q>0$，所以“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”是“$a_3>a_2>a_1$”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

7. A [解析] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d $(d<0)$，由 $a_2=\frac{a_7+13}{a_7-1}$，得 $a_2a_7=a_2+a_7+13$ ①，由 $S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=44$，得 $a_1+a_8=11$ ②，由①②得，$a_2a_7=24$，又 $a_1+a_8=a_2+a_7=11$，所以由 $\begin{cases}a_2a_7=24,\\a_2+a_7=11,\end{cases}$ 且 $d<0$，得 $a_2=8$，$a_7=3$，所以 $d=\frac{a_7-a_2}{7-2}=\frac{3-8}{5}=-1$，$a_1=9$，所以 $S_n=9n-\frac{n(n-1)}{2}=-\frac{1}{2}n^2+\frac{19}{2}n$，又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=9$ 或 $n=10$ 时，S_n 最大，最大值为 45. 故选 A.

8. B [解析] ∵ $S_n=(2S_n+1)S_{n+1}$，∴ $S_n=S_{n+1}+2S_n\cdot S_{n+1}$，即 $\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=2$，又 $a_1=1$，∴ $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$，∴ $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，∴ $\frac{1}{S_n}=2n-1$，∴ $S_n=\frac{1}{2n-1}$，∴ $S_{11}=\frac{1}{21}$，$a_5=S_5-S_4=\frac{1}{9}-\frac{1}{7}=-\frac{2}{63}$，∴ $\frac{a_5}{S_{11}}=-\frac{2}{63}\times 21=-\frac{2}{3}$. 故选 B.

9. BC [解析] 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，依题意得 $\begin{cases}a_1^2q=2,\\a_1q^2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\q=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2^{n-1}$，故 $a_3+a_5=2^2+2^4=20$，故 B，C 正确，A 错误；对于 D，$\log_2\frac{1}{a_n}=1-n$，则数列 $\left\{\log_2\frac{1}{a_n}\right\}$ 为递减数列，故 D 错误. 故选 BC.

10. ABD [解析] 由题意得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，$d\neq 0$. 设 $f(x)=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$，$x\in\mathbf{R}$，对于 A，由 $d>0$，得函数 $f(x)$ 的图象开口向上，$f(x)$ 有最小值，又 $n\in\mathbf{N}^*$，(n,S_n) 为 $f(x)$ 图象上离散的点，故 S_n 有最小值，故 A 正确；对于 B，由题意得，$d\neq 0$，假设 $d<0$，则函数 $f(x)$ 的图象开口向下，则当 $n\to+\infty$ 时，$S_n\to-\infty$，则 S_n 无最小值，与已知数列 $\{S_n\}$ 有最小项矛盾，假设不成立，所以若数列 $\{S_n\}$ 有最小项，则 $d>0$，故 B 正确；对于 C，例如数列 $\{a_n\}$：1，−2，−5，−8，…，其通项公式为 $a_n=-3n+4$，则 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=-3n+1<0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，故 $\{S_n\}$ 是递减数列，但 $S_1=1>0$，不满足 $S_n<0$，故 C 错误；对于 D，由对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $S_n<0$，得 $a_1=S_1<0$，且 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n<0$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，且 $d\neq 0$，故 $d<0$，所以 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=a_1+nd<0$，从而 $\{S_n\}$ 是递减数列，故 D 正确. 故选 ABD.

11. AD [解析] 由 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^n$，得当 $n=1$ 时，$a_1=2$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+2a_2+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-1}$，两式相减可得 $2^{n-1}a_n=n\cdot 2^n-(n-1)\cdot 2^{n-1}=(n+1)\cdot 2^{n-1}$，所以 $a_n=n+1(n\geqslant 2)$，显然当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 满足 $a_n=n+1$，故 $a_n=n+1$，故 A 正确；由等差数列求和公式知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n^2+3n}{2}$，故 B 错误；令 $b_n=(-1)^na_n=(-1)^n(n+1)$，$\{b_n\}$ 的前 100 项和为 $-2+3-4+5-6+\cdots+99-100+101=1\times 50=50$，故 C 错误；令 $c_n=|a_n-5|=|n-4|$，则 $\{|a_n-5|\}$ 的前 30 项和为 $c_1+c_2+\cdots+c_{30}=3+2+1+0+1+2+\cdots+26=6+\frac{27\times(0+26)}{2}=357$，故 D 正确. 故选 AD.

12. −8 [解析] 实数 $0,x,y,6$ 成等差数列，则等差数列的公差为 $y-x=\frac{6-0}{3}=$

2. $-\frac{1}{2}$，a，b，c，$-\frac{1}{8}$ 成等比数列，则 $b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$，因为等比数列的奇数项同号，所以 $b<0$，所以 $b=-\frac{1}{4}$，则 $\frac{y-x}{b}=-8$.

13. 2 ［解析］设等比数列的公比为 q，当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，不符合题意；当 $q\neq1$ 时，则 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n+\frac{a_1}{1-q}$，且 $S_n=t\cdot2^{n-1}-1=\frac{1}{2}t\cdot2^n-1$，则 $\frac{1}{2}t+(-1)=0$，解得 $t=2$.

14. $\left[\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$ ［解析］设等比数列 a_{k_1}，a_{k_2}，a_{k_3}，…，a_{k_n} 的公比为 q，因为 $k_1=2$，$k_2=5$，$k_3=11$，所以 $a_5^2=a_2\cdot a_{11}$，所以 $(a_1+4d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+10d)$，即 $a_1=2d$，其中 $d>0$，所以 $a_{k_1}=a_2=3d$，$a_{k_2}=a_5=6d$，$a_{k_3}=a_{11}=12d$，所以公比 $q=2$. 因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，即 $a_n=(n+1)d$，所以 $a_{k_n}=(k_n+1)d$. 又因为 $a_{k_n}=a_{k_1}\cdot q^{n-1}=3d\cdot2^{n-1}$，所以 $(k_n+1)d=3d\cdot2^{n-1}$，即 $k_n+1=3\times2^{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{k_n+1}=\frac{(n+1)d}{3\times2^{n-1}}$，所以 $\frac{a_{n+1}}{k_{n+1}+1}-\frac{a_n}{k_n+1}=\frac{(n+2)d}{3\times2^n}-\frac{(n+1)d}{3\times2^{n-1}}=\frac{-nd}{3\times2^n}<0$，所以 $\left\{\frac{a_n}{k_n+1}\right\}$ 是递减数列，由题意得 $\frac{a_3}{k_3+1}\geqslant\frac{1}{6}$ 且 $\frac{a_4}{k_4+1}<\frac{1}{6}$，解得 $d\in\left[\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$.

15. 解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\because S_{12}=6$，$\therefore a_6+a_7=1$，又 $\because a_6=0$，$\therefore a_7=1$，
$\therefore$ 公差 $d=1$，$\therefore a_1=-5$，
$\therefore a_n=-5+(n-1)\times1=n-6$.
(2) 由 (1) 知 $S_n=\frac{n(-5+n-6)}{2}=\frac{n^2-11n}{2}$，当 $n\leqslant5$ 时，$T_n=-S_n=\frac{-n^2+11n}{2}$；当 $n\geqslant6$ 时，$T_n=S_n-2S_5=\frac{n^2-11n}{2}+30=\frac{n^2-11n+60}{2}$.
综上，$T_n=\begin{cases}\frac{-n^2+11n}{2},n\leqslant5,\\ \frac{n^2-11n+60}{2},n\geqslant6.\end{cases}$

16. 解：(1) 证明：当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1-1$，解得 $a_1=1$. 因为 $S_n=2a_n-n$①，所以 $S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)$，$n\geqslant2$②，①−②得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-1$，
整理得 $a_n=2a_{n-1}+1$，所以 $a_n+1=2a_{n-1}+2=2(a_{n-1}+1)$，即 $\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=2$ $(n\geqslant2)$，又 $a_1+1=2$，所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列.
(2)由(1)知 $a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$，所以 $S_n=2+2^2+\cdots+2^n-n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$，所以 $T_n=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-[3+4+5+\cdots+(n+2)]=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-\frac{n(3+n+2)}{2}=2^{n+2}-\frac{n^2+5n}{2}-4$.

17. 解：(1)令 $n=1$，则 $2a_2-a_1=\frac{1}{4}$，所以 $a_2=\frac{1}{2}$，所以 $S_2=a_1+a_2=\frac{5}{4}$，
所以 $T_2=\frac{8}{9}S_2=b_1\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{9}$，解得 $b_1=\frac{10}{3}$，所以 $b_n=-5\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.
由 $2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^{n+1}}$，可知 $2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=\frac{1}{2}$，所以 $\{2^na_n\}$ 为等差数列，
所以 $2^na_n=\frac{3}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{n+2}{2}$，故 $a_n=\frac{n+2}{2^{n+1}}$.
(2)当 $n\geqslant2$ 时，$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2^n}-a_n$，累加可得，$a_n-a_1=\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-S_n+a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-S_n+\frac{3}{4}$，所以 $S_n=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$. $T_n=\frac{10}{3}\times\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=2-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. 当 n 是奇数时，$S_n<2<T_n$；当 n 是偶数时，记 $n=2k$，$k\in\mathbf{N}^*$，$c_{2k}=\frac{2-T_{2k}}{2-S_{2k}}=\frac{2}{k+2}\left(\frac{4}{3}\right)^{2k}$，则 $\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}=\frac{16}{9}\left(1-\frac{1}{k+3}\right)\geqslant\frac{16}{9}\times\left(1-\frac{1}{1+3}\right)=\frac{4}{3}>1$，所以 $\{c_{2k}\}$ 是递增数列，所以 $c_{2k}\geqslant c_2=\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{32}{27}>1$，所以 $2-T_{2k}>2-S_{2k}$，即 $2-T_n>2-S_n$，所以 $S_n>T_n$. 综上，当 n 是奇数时，$S_n<T_n$；当 n 是偶数时，$S_n>T_n$.

18. 解：(1)证明：因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=3n^2+5n$，所以当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3+5=8$，当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=3(n-1)^2+5(n-1)$，所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2+5n-3(n-1)^2-5(n-1)=6n+2$，又 $a_1=8$ 也满足上式，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=6n+2$.
因为 $a_{n+1}-a_n=6(n+1)+2-6n-2=6$，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.
(2)因为 $b_n=64b_{n+1}$，所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{64}$，
所以数列 $\{b_n\}$ 是以 8 为首项，$\frac{1}{64}$ 为公比的等比数列，所以 $b_n=8\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^{n-1}=2^{9-6n}$，所以 $\log_ab_n=\log_a2^{9-6n}=(9-6n)\log_a2$. 要使对一切正整数 n 都有 $a_n=\log_ab_n+b$ 成立，则 $6n+2=(9-6n)\log_a2+b$ 恒成立，即 $6n+2=-6n\log_a2+9\log_a2+b$ 恒成立，
所以 $\begin{cases}6=-6\log_a2,\\2=9\log_a2+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=11.\end{cases}$
故当 $a=\frac{1}{2}$，$b=11$ 时，对一切正整数 n 都有 $a_n=\log_ab_n+b$ 成立.

19. 解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则有 $\begin{cases}a_1+2d=5,\\(a_1+4d)-2(a_1+d)=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$
因此 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$.
由 $3b_n-b_{n+1}=0$，得 $b_{n+1}=3b_n$，而 $b_1=3$，则数列 $\{b_n\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $b_n=3\times3^{n-1}=3^n$.
(2)①由(1)知，$a_n=2n-1$，$b_n=3^n$，
则 $a_2=b_1=3$，$a_5=b_2=9$，$a_{14}=b_3=27$，$a_{41}=b_4=81$，所以数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 4 个公共项依次为 3，9，27，81.
②$a_{100}=199$，而 $b_5=243>a_{100}$，因此在数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项中，数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项只有 3，9，27，81 这 4 项，
所以剩下所有项的和为 $\frac{1+199}{2}\times100-(3+9+27+81)=10\,000-120=9880$.

重点强化练（十）

1. C ［解析］因为 $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$，所以当 $n=1$ 时，$a_2=2-\frac{1}{a_1}=3$；当 $n=2$ 时，$a_3=2-\frac{1}{a_2}=\frac{5}{3}$；当 $n=3$ 时，$a_4=2-\frac{1}{a_3}=\frac{7}{5}$. 故选 C.

2. C ［解析］根据题意有 $a_1+a_2=2^1$，$a_3+a_4=2^3$，$a_5+a_6=2^5$，$a_7+a_8=2^7$，所以 $S_8=2+8+32+128=170$. 故选 C.

3. B ［解析］因为 $a_n=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\frac{\frac{(1+n)n}{2}}{n}=\frac{1+n}{2}$，所以 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}=4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. 设数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $T_n=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2n}{n+2}$. 故选 B.

4. D ［解析］由 $a_1=2$，$a_2=3$，$a_n+a_{n+2}=a_{n+1}$，可得 $a_3=a_2-a_1=1$，$a_4=a_3-a_2=-2$，$a_5=a_4-a_3=-3$，$a_6=a_5-a_4=-1$，$a_7=a_6-a_5=2$，$a_8=a_7-a_6=3$，…，所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的数列，其中 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$，所以 $S_{2024}=S_{337\times6+2}=a_1+a_2=5$. 故选 D.

5. B ［解析］由 $T_n^2=a_n^{n+1}$，得 $T_{n+1}^2=a_{n+1}^{n+2}$，于是 $a_{n+1}^2=\frac{T_{n+1}^2}{T_n^2}=\frac{a_{n+1}^{n+2}}{a_n^{n+1}}$，则 $a_{n+1}^n=a_n^{n+1}$，两边取对数得 $n\lg a_{n+1}=(n+1)\lg a_n$，因此 $\frac{\lg a_{n+1}}{n+1}=\frac{\lg a_n}{n}$，则数列 $\left\{\frac{\lg a_n}{n}\right\}$ 是常数列，则 $\frac{\lg a_n}{n}=\frac{\lg a_1}{1}=\lg2$，即 $\lg a_n=n\lg2=\lg2^n$，所以 $a_n=2^n$，所以 $a_5=32$. 故选 B.

6. D ［解析］因为 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},a_n\text{ 为偶数},\\3a_n+1,a_n\text{ 为奇数},\end{cases}$ 且 $a_7=1$，所以 $a_6=2$，则 $a_5=4$，则 $a_4=8$ 或 $a_4=1$. 当 $a_1=8$ 时，则 $a_3=16$，得 $a_2=32$，$a_1=64$ 或 $a_2=5$，$a_1=10$. 当 $a_4=1$ 时，则 $a_3=2$，则 $a_2=4$，$a_1=8$ 或 $a_1=1$，所以 m 所有可能的取值集合是 $\{1,8,10,64\}$. 故选 D.

7. B ［解析］$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是“$\frac{\sqrt{3}}{3}$&2”数列，$\therefore\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$k=2$，$\therefore S_{n+1}^{\frac{1}{2}}-S_n^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a_{n+1}^{\frac{1}{2}}$，而 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，易知 $a_n>0$，$\therefore S_{n+1}>S_n$，$\therefore S_{n+1}^{\frac{1}{2}}-S_n^{\frac{1}{2}}>0$，$\therefore S_{n+1}^{\frac{1}{2}}-S_n^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(S_{n+1}-S_n)^{\frac{1}{2}}$，$\therefore(S_{n+1}^{\frac{1}{2}}-$

$S_n^{\frac{1}{2}})^2=\frac{1}{3}(S_{n+1}^{\frac{1}{2}}-S_n^{\frac{1}{2}})(S_{n+1}^{\frac{1}{2}}+S_n^{\frac{1}{2}})$，即 $S_{n+1}^{\frac{1}{2}}-S_n^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}(S_{n+1}^{\frac{1}{2}}+S_n^{\frac{1}{2}})$，即 $S_{n+1}^{\frac{1}{2}}=2S_n^{\frac{1}{2}}$，∴$S_{n+1}=4S_n$，∴$S_n=4^{n-1}$，∴$a_n=4^{n-1}-4^{n-2}=3\times4^{n-2}$，$n\geqslant2$，又 $a_1=1$，∴$a_n=\begin{cases}1(n=1),\\3\times4^{n-2}(n\geqslant2).\end{cases}$ 故选 B.

8. A ［解析］因为数列$\{b_n\}$是公差为 6，首项为 1 的等差数列，所以 $b_1=1$，$b_2=7$，$b_3=13$，$b_4=19$，$b_5=25$. 数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$a_3=1$，设公比为 q，易知 $q>0$，则 $a_1=\frac{1}{q^2}$，$a_2=\frac{1}{q}$，$a_4=q$，$a_5=q^2$，所以数列$\{a_nb_n\}$的前 5 项和为 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5=\frac{1}{q^2}+\frac{7}{q}+13+19q+25q^2$. 设 $f(q)=\frac{1}{q^2}+\frac{7}{q}+13+19q+25q^2(q>0)$，求导可得 $f'(q)=\frac{-2}{q^3}-\frac{7}{q^2}+19+50q=\frac{-2-7q+19q^3+50q^4}{q^3}=\frac{(2q-1)(25q^3+22q^2+11q+2)}{q^3}$，易得，当 $q>\frac{1}{2}$ 时，$f'(q)>0$，$f(q)$单调递增，当 $0<q<\frac{1}{2}$ 时，$f'(q)<0$，$f(q)$单调递减，故当 $q=\frac{1}{2}$ 时，$f(q)$取得最小值 $\frac{187}{4}$. 故选 A.

9. BCD ［解析］由 $S_n=\begin{cases}-\frac{n+3}{2},n\text{ 为奇数},\\\frac{n}{2},n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 可得 $a_1=S_1=-2$，$a_2=3$，当 n 为奇数且 $n\geqslant3$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-\frac{n+3}{2}-\frac{n-1}{2}=-n-1$，其中 $a_1=-2$ 也符合上式，所以当 n 为奇数时，$a_n=-n-1$，所以 B 正确；当 n 为偶数时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{2}-\left(-\frac{n-1+3}{2}\right)=n+1$，所以 $a_{10}=11$，所以 A 错误，C 正确；$a_na_{n+1}=-(n+1)(n+2)$，所以 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和为 $-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}=-\frac{n}{2(n+2)}$，所以 D 正确. 故选 BCD.

10. BCD ［解析］依题意，设 P_0 的边长为 a，则 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=1$，边数是 3；根据图形规律，P_1 的边长为 $\frac{a}{3}$，边数为 P_0 边数的 4 倍，即 3×4；P_2 的边长为 $\frac{a}{3^2}$，边数为 3×4^2；以此类推，P_n 的边长为 $\frac{a}{3^n}$，边数为 3×4^n. 由上分析知 C 正确；P_3 的边数为 $3\times4^3=192$，A 错误；由图形规律知曲线 P_n 所围图形的面积 S_n 等于曲线 P_{n-1} 所围图形的面积加上每一条边增加的小等边三角形的面积，而每一条边增加的小等边三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{a}{3^n}\right)^2$，则 $S_n=S_{n-1}+(3\times4^{n-1})\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{a}{3^n}\right)^2$，整理得 $S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$，则数列$\{S_n-S_{n-1}\}$是等比数列，又 $S_0=1$，则 $S_n=S_0+(S_1-S_0)+(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+\cdots+(S_n-S_{n-1})=1+\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{9}}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n$，D 正确；$S_2=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{16}{81}=\frac{40}{27}$，B 正确. 故选 BCD.

11. ABD ［解析］依题意 $(3n+2)(S_n+a_{n+1})+(3n-1)(S_n-a_n)=(6n+1)S_n$，∴$(3n+2)a_{n+1}=(3n-1)a_n$（$n\geqslant2$），∴$(3n-1)a_n=\cdots=5a_2=1$（$n\geqslant2$），∴$a_n=\frac{1}{3n-1}$（$n\geqslant2$），当 $n=1$ 时 $a_1=\frac{1}{2}$ 也满足上式，∴$a_n=\frac{1}{3n-1}$，∴$a_5=\frac{1}{14}$，$\frac{1}{a_n}=3n-1$，∴A，B 正确；∵$\frac{a_n}{a_{n+1}^2}=\frac{(3n+2)^2}{3n-1}=\frac{(3n-1+3)^2}{3n-1}=(3n-1)+\frac{9}{3n-1}+6$，令 $t=3n-1$，当 $t>3$ 时，$y=t+\frac{9}{t}+6$ 单调递增，所以 $\frac{a_2}{a_3^2}<\frac{a_3}{a_4^2}<\frac{a_4}{a_5^2}<\cdots$，又 $\frac{a_1}{a_2^2}=\frac{25}{2}$，$\frac{a_2}{a_3^2}=\frac{64}{5}>\frac{25}{2}$，∴数列$\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}^2}\right\}$中的最小项为 $\frac{25}{2}$，∴C 错误；$\frac{(-1)^n}{a_na_{n+1}}=(-1)^n(3n-1)(3n+2)=(-1)^n9n^2+(-1)^n(3n-2)$，∴$T_{2n}=9[-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-(2n-1)^2+(2n)^2]+[-1+4-7+10-\cdots-(6n-5)+(6n-2)]=9[1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+2n]+3n=\frac{9\times2n(2n+1)}{2}+3n=18n^2+12n$，∴D 正确. 故选 ABD.

12. $2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$ ［解析］由已知得，$\frac{a_n}{2^n}=\frac{n+2}{2^{n+1}}$，则 $S_n=\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}+\frac{n+2}{2^{n+1}}$，$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}+\frac{n+2}{2^{n+2}}$，两式相减得，$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\frac{n+2}{2^{n+2}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n+2}{2^{n+2}}$，所以 $S_n=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$.

13. $\frac{n+1}{2^n}$ ［解析］由题意可得 $2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(2a_n-a_{n-1})$（$n\geqslant2$），又 $2a_2-a_1=\frac{1}{2}$，所以$\{2a_{n+1}-a_n\}$是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^n}$，则 $2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=1$，又 $2a_1=2$，所以$\{2^na_n\}$是首项为 2，公差为 1 的等差数列，则 $2^na_n=n+1$，则 $a_n=\frac{n+1}{2^n}$.

14. 99　$\frac{11}{3}-\frac{1}{3^{k-1}}+6k$ ［解析］因为数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,a_n<3,\\\frac{a_n}{3},a_n\geqslant3,\end{cases}$ 所以若 $a_1=1$，则 $a_2=a_1+1=1+1=2$，$a_3=a_2+1=2+1=3$，$a_4=\frac{a_3}{3}=1$，$a_5=a_4+1=1+1=2$，$a_6=a_5+1=2+1=3$，可以发现数列$\{a_n\}$是周期为 3 的周期数列，$a_1+a_2+a_3=1+2+3=6$，所以 $S_{50}=16(a_1+a_2+a_3)+a_1+a_2=16\times6+1+2=99$. 当 $0<a_1<1$ 时，$a_2=a_1+1$，$a_3=a_1+2$，$a_4=a_1+3>3$，$a_5=\frac{a_4}{3}=\frac{a_1}{3}+1<3$，$a_6=a_5+1=\frac{a_1}{3}+2<3$，$a_7=\frac{a_1}{3}+3>3$，…，$a_{3k-1}=\frac{a_1}{3^{k-1}}+1$，$a_{3k}=\frac{a_1}{3^{k-1}}+2$，$a_{3k+1}=\frac{a_1}{3^{k-1}}+3$，…. 因为 $0<a_1<1$，所以 $0<\frac{a_1}{3^n}<1$，则以三个为一组循环，且 $a_{3k-1}+a_{3k}+a_{3k+1}=3\times\frac{a_1}{3^{k-1}}+1+2+3=\frac{a_1}{3^{k-2}}+6$，则 $S_{3k+1}=a_1+(a_2+a_3+a_4)+\cdots+(a_{3k-1}+a_{3k}+a_{3k+1})=a_1+(3a_1+6)+(a_1+6)+\cdots+\left(\frac{a_1}{3^{k-2}}+6\right)=\left(1+3+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{k-2}}\right)a_1+6k=\left\{1+\frac{3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]}{1-\frac{1}{3}}\right\}a_1+6k=\frac{11}{3}-\frac{1}{3^{k-1}}+6k$.

15. 解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由$\{S_n+1\}$是等比数列，得$(S_2+1)^2=(S_1+1)(S_3+1)$，∴$(q+2)^2=2\times(q^2+q+2)$，解得 $q=2$ 或 $q=0$（舍去），∴$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

(2)由(1)得 $a_n=2^{n-1}$，∴$b_n=a_n\cdot\log_2a_{n+1}=n\cdot2^{n-1}$，∴$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\times2^0+2\times2+3\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$，∴$2T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$，

两式相减得 $-T_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot2^n=-1+(1-n)\cdot2^n$，∴$T_n=(n-1)\cdot2^n+1$.

16. 解：(1)因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=1-a_n$，所以当 $n\geqslant2$ 时，可得 $S_{n-1}=1-a_{n-1}$，两式相减得 $a_n=a_{n-1}-a_n$，

即 $2a_n=a_{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$（$n\geqslant2$）.

令 $n=1$，可得 $S_1=1-a_1=a_1$，解得 $a_1=\frac{1}{2}$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(2)由(1)知 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $S_n^2=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2=1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，则 $T_n=S_1^2+$

$S_2^2+\cdots+S_n^2=(1+1+\cdots+1)-\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{3n-5}{3}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.

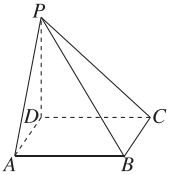
17. 解：(1)根据题意知 $a_n=S_n-S_{n-1}$，$n\geqslant 2$①，又 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=a_n\neq 0$②，
所以由①②，可得 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，$n\geqslant 2$，所以可得$\{\sqrt{S_n}\}$是以 $\sqrt{S_1}=1$ 为首项，1 为公差的等差数列，
则 $\sqrt{S_n}=1+n-1=n$，所以 $S_n=n^2$，
所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$，$n\geqslant 2$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 也满足该式，
所以 $a_n=2n-1$.
(2)由(1)可知 $a_n=2n-1$，
所以 $c_n=\dfrac{(-1)^n n}{a_n a_{n+1}}=\dfrac{(-1)^n n}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{(-1)^n}{4}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$.
设$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n，则当 n 为偶数时，$T_n=\dfrac{1}{4}\left[-\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{4}\left(-1+\dfrac{1}{2n+1}\right)=-\dfrac{n}{4n+2}$；
当 n 为奇数时，$T_n=\dfrac{1}{4}\left[-\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)+\cdots-\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{4}\left(-1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=-\dfrac{n+1}{4n+2}$.
所以 $T_n=\begin{cases}-\dfrac{n}{4n+2}, & n\text{ 为偶数},\\ -\dfrac{n+1}{4n+2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

18. 解：(1)证明：由 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+2}$，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{3a_n}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{3}$，所以 $1-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{a_n}\right)$，
又 $1-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{2}{3}$，所以数列$\left\{1-\dfrac{1}{a_n}\right\}$是首项为 $\dfrac{2}{3}$，公比为 $\dfrac{2}{3}$ 的等比数列.
(2)由(1)得 $1-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，所以 $a_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{3^n}{3^n-2^n}$.
(3)证明：$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n-2^n}{3^n}=\dfrac{3\cdot(3^n-2^n)}{3^{n+1}-2^{n+1}}=\dfrac{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-3}{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2}=\dfrac{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2-1}{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2}=1-\dfrac{1}{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2}$.
令 $f(x)=3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-2$，$x\in[1,+\infty)$，因为 $f(x)=3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-2$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(1)=3\times\dfrac{3}{2}-2=\dfrac{5}{2}>0$，所以数列$\left\{\dfrac{1}{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2}\right\}$是递减数列，从而数列$\{b_n\}$是递增数列，且 $b_n<1$，
故 $b_n<b_{n+1}<1$.

19. 解：(1)(i)因为 $a_n=2n-1$，所以当 $n\to+\infty$ 时，$a_n\to+\infty$，即不存在 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立，
所以数列$\{a_n\}$不具有性质 P.
因为 $b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<1$，数列$\{b_n\}$为递减数列，
所以数列$\{b_n\}$具有性质 P.
(ii)数列$\{S_n\}$具有性质 P.
$S_n=1\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^n}$，
$\dfrac{1}{3}S_n=1\times\dfrac{1}{3^2}+3\times\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}$，
两式作差得 $\dfrac{2}{3}S_n=1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{3^2}+2\times\dfrac{1}{3^3}+\cdots+2\times\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}$，即 $\dfrac{2}{3}S_n=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2n+2}{3^{n+1}}$，所以 $S_n=1-\dfrac{n+1}{3^n}<1$，所以数列$\{S_n\}$满足条件①.
因为 $a_nb_n=(2n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n>0$，所以 $S_n<S_{n+1}$，所以$\{S_n\}$为递增数列，满足条件②. 综上，数列$\{S_n\}$具有性质 P.
(2)证明：$X=0,1,\cdots,n$，$n\in\mathbf{N}^*$，X 为奇数的概率为 c_n，设 X 为偶数的概率为 d_n，则 $c_n+d_n=1=[(1-p)+p]^n=C_n^0p^0(1-p)^n+C_n^1p^1(1-p)^{n-1}+C_n^2p^2(1-p)^{n-2}+\cdots+C_n^np^n(1-p)^0$①，$[(1-p)-p]^n=C_n^0(-p)^0(1-p)^n+C_n^1(-p)^1(1-p)^{n-1}+C_n^2(-p)^2(1-p)^{n-2}+\cdots+C_n^n(-p)^n(1-p)^0$②，
$\dfrac{①-②}{2}=c_n$，即 $c_n=\dfrac{1-(1-2p)^n}{2}$.
又 $0<p<\dfrac{1}{2}$，所以 $0<1-2p<1$，故 c_n 随着 n 的增大而增大，且 $c_n<\dfrac{1}{2}$.
故数列$\{c_n\}$具有性质 P.

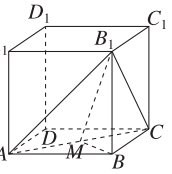
重点强化练（十一）

1. C ［解析］如图，由 $BC\parallel AD$，$BC\not\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD，得 $BC\parallel$平面 PAD. 由 $BC\parallel$平面 PAD，$BC\subset$平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$平面 $PAD=AD$，得 $BC\parallel AD$. 故“$BC\parallel AD$”是“$BC\parallel$平面 PAD”的充要条件. 故选 C.



2. C ［解析］对于 A，若 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 m，n 的位置关系不确定，故 A 错误；对于 B，若 $m\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，则 α，β 的位置关系不确定，故 B 错误；对于 C，若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\beta$，$m\not\subset\alpha$，则 $m\parallel\alpha$，故 C 正确；对于 D，若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，则 m，β 的位置关系不确定，故 D 错误. 故选 C.

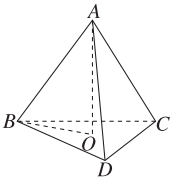
3. D ［解析］如图，取 AC 的中点 M，连接 MB，MB_1，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $AB_1=B_1C$，$AB=BC$，所以 $B_1M\perp AC$，$BM\perp AC$，所以$\angle B_1MB$ 是二面角 $B_1\text{-}AC\text{-}B$ 的平面角. 设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，可得 $AC=2\sqrt{2}$，则 $BM=\sqrt{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1MB$ 中，$\tan\angle B_1MB=\dfrac{BB_1}{BM}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以二面角 $B_1\text{-}AC\text{-}B$ 的正切值为 $\sqrt{2}$. 故选 D.



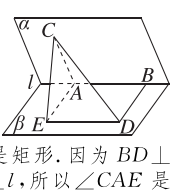
4. B ［解析］对于 A，若 $m\parallel\alpha$ 且 $\alpha\parallel\beta$，则 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$，故 A 错误；对于 B，若 m，n 是异面直线，$m\subset\alpha$，$m\parallel\beta$，$n\subset\beta$，$n\parallel\alpha$，则在直线 m 上任取一点 P，过直线 n 与点 P 确定平面 γ，设 $\gamma\cap\alpha=c$，又 $n\parallel\alpha$，所以 $n\parallel c$，又 $n\subset\beta$，$c\not\subset\beta$，所以 $c\parallel\beta$，又 $m\parallel\beta$，$m\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，$m\cap c=P$，所以 $\alpha\parallel\beta$，故 B 正确；对于 C，若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 m，n 可能平行、相交或异面，故 C 错误；对于 D，若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$\alpha\parallel\beta$，则 $n\subset\beta$ 或 $n\parallel\beta$，故 D 错误. 故选 B.

5. C ［解析］∵底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱称为“堑堵”，∴在堑堵 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$平面 ABC，∴ $AA_1\perp BC$，又 $AC\perp BC$，且 $AA_1\cap AC=A$，∴ $BC\perp$平面 A_1ACC_1，∴四棱锥 $B\text{-}A_1ACC_1$ 为“阳马”，故①正确；由 $AC\perp BC$，得 $A_1C_1\perp BC$，又 $A_1C_1\perp C_1C$ 且 $BC\cap C_1C=C$，∴ $A_1C_1\perp$平面 BB_1C_1C，∴ $A_1C_1\perp BC_1$，则 $\triangle A_1BC_1$ 为直角三角形，由 $BC\perp$平面 AA_1C_1C，得 $\triangle A_1BC$ 为直角三角形，由“堑堵”的定义可得 $\triangle A_1C_1C$ 为直角三角形，$\triangle CC_1B$ 为直角三角形，∴四面体 A_1C_1CB 为“鳖臑”，故②正确；在 $\triangle ABC$ 中，$4=AC^2+BC^2\geqslant 2AC\cdot BC$，即 $AC\cdot BC\leqslant 2$，当且仅当 $AC=BC=\sqrt{2}$ 时取等号，$V_{B\text{-}A_1ACC_1}=\dfrac{1}{3}S_{\text{矩形}A_1ACC_1}\times BC=\dfrac{1}{3}AA_1\times AC\times BC=\dfrac{2}{3}AC\times BC\leqslant\dfrac{4}{3}$，故③错误；∵$BC\perp$平面 AA_1C_1C，∴$BC\perp AF$，又 $AF\perp A_1C$，且 $BC\cap A_1C=C$，∴$AF\perp$平面 A_1BC，则 $AF\perp A_1B$，∵$AE\perp A_1B$ 且 $AE\cap AF=A$，∴$A_1B\perp$平面 AEF，又 $EF\subset$平面 AEF，∴$A_1B\perp EF$，故④正确. 故选 C.

6. A ［解析］如图，在正四面体 $ABCD$ 中，O 是正三角形 BCD 的中心，则 $AO\perp$底面 BCD，$BO=\dfrac{2}{3}\times 3\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，则正四面体 $ABCD$ 的高 $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{6}$，所以 $V_{\text{四面体}ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2\times\sqrt{6}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. 设圆柱的底面半径为 r，依题意，$\pi r^2\cdot\sqrt{6}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$，得 $r=\dfrac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2\sqrt{\pi}}$，所以该圆柱的侧面积 $S=2\pi r\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2\sqrt{\pi}}=3\sqrt{2\sqrt{3}\pi}$. 故选 A.

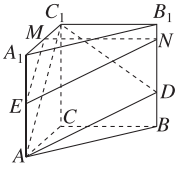


7. C ［解析］过 A 作 $AE\parallel BD$ 且 $AE=BD$，连接 CE，DE，则四边形 $ABDE$ 是平行四边形. 因为 $BD\perp AB$，所以平行四边形 $ABDE$ 是矩形. 因为 $BD\perp l$，所以 $AE\perp l$，又 $AC\perp l$，所以$\angle CAE$ 是二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角，即 $\angle CAE=60^\circ$. 又因为 $BD=AE=AC=3$，所以 $\triangle ACE$ 为正三角形，所以 $CE=3$. 因为 $l\perp AC$，



所以 $ED\perp AC$，又 $ED\perp AE$，$AE\cap AC=A$，AE，$AC\subset$平面 AEC，所以 $ED\perp$平面 AEC. 因为 $EC\subset$平面 AEC，所以 $ED\perp EC$，因为 $ED=AB=2\sqrt{10}$，所以 $CD=\sqrt{CE^2+ED^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{10})^2}=7$. 故选 C.

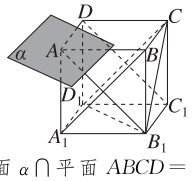
8. D ［解析］如图所示，因为 $V_{A\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}$，所以 $V_{A\text{-}BCC_1B_1}=\frac{2}{3}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}$，所以 $V_{A\text{-}BCC_1D}=\frac{4}{9}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}V_{A\text{-}BCC_1B_1}=\frac{2}{3}V_{A\text{-}BCC_1B_1}$，所以 $S_{梯形BCC_1D}=\frac{2}{3}S_{四边形BCC_1B_1}$，所以 $S_{\triangle C_1B_1D}=\frac{1}{3}S_{四边形BCC_1B_1}$，则 $\frac{DB_1}{BB_1}=\frac{2}{3}$. 设三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 6，则 $DB_1=4$，$DB=2$，易知 M 为 A_1C_1 的中点，取 A_1A 的中点 E，连接 ME，则 $ME/\!/C_1A$，又 $ME\not\subset$平面 ADC_1，所以 $ME/\!/$平面 ADC_1. 过 E 作 $EN/\!/AD$，且 $EN\cap BB_1=N$，连接 MN，则 $EN/\!/$平面 ADC_1，又 $ME\cap EN=E$，所以平面 $MNE/\!/$平面 ADC_1，又 $MN\subset$平面 MNE，所以 $MN/\!/$平面 ADC_1，所以 $DN=EA=3$，所以 $NB_1=DB_1-DN=4-3=1$，所以 $BN=5$，则 $\frac{NB}{NB_1}=5$. 故选 D.



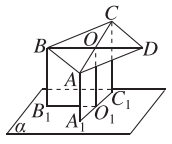
9. ABC ［解析］因为 $PA\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，所以 $PA\perp BC$，又 $BC\perp AC$，$AC\cap PC=C$，AC，$PC\subset$平面 PAC，所以 $BC\perp$平面 PAC，又 $AF\subset$平面 PAC，所以 $BC\perp AF$，故 C 正确；因为 $BC\perp AF$，$AF\perp PC$，$BC\cap PC=C$，BC，$PC\subset$平面 PBC，所以 $AF\perp$平面 PBC，又 $PB\subset$平面 PBC，所以 $AF\perp PB$，故 A 正确；因为 $AF\perp PB$，$AE\perp PB$，$AE\cap AF=A$，AE，$AF\subset$平面 AEF，所以 $PB\perp$平面 AEF，又 $EF\subset$平面 AEF，所以 $EF\perp PB$，故 B 正确；由上可知，$AF\perp$平面 PBC，又因为 $AF\cap AE=A$，所以 AE 与平面 PBC 不垂直，故 D 不正确. 故选 ABC.

10. AC ［解析］由题可得 $MN/\!/BC$，$BC/\!/B_1C_1$，所以 $MN/\!/B_1C_1$，又 $MN\subset$平面 QMN，$B_1C_1\not\subset$平面 QMN，所以 $B_1C_1/\!/$平面 QMN，A 正确；由题可得，$QM=QN$，$DM=DN$，设 $AA_1=2a$，易得 $QM^2=4+a^2$，$QD^2=12+a^2$，$DM^2=4+4a^2$，因为 $DQ\perp QM$，所以 $DM^2=QD^2+QM^2$，即 $4+4a^2=12+a^2+4+a^2$，可得 $a=\sqrt{6}$，故 $AA_1=2\sqrt{6}$，B 错误；因为 $DM^2=QD^2+QM^2$，所以 $DN^2=QD^2+QN^2$，所以 $DQ\perp QN$，又 $QN\cap QM=Q$，QN，$QM\subset$平面 QMN，所以 $DQ\perp$平面 QMN，又 $S_{\triangle QMN}=\frac{1}{2}MN\cdot\sqrt{QM^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{10-1}=3$，所以 $V_{Q\text{-}DMN}=V_{D\text{-}QMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle QMN}\cdot DQ=\frac{1}{3}\times3\times3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，又 $S_{\triangle DMN}=\frac{1}{2}MN\cdot\sqrt{DM^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=3\sqrt{3}$，设点 Q 到平面 DMN 的距离为 d，所以 $V_{Q\text{-}DMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle DMN}d=\sqrt{3}\,d=3\sqrt{2}$，得 $d=\sqrt{6}$，C 正确；将三棱锥 $D\text{-}QMN$ 补成以 QMN 为底面的直三棱柱，则该三棱柱的外接球即为三棱锥 $D\text{-}QMN$ 的外接球，其球心为以上下底面外心为端点的线段的中点，因为 $\sin\angle QMN=\frac{\sqrt{QM^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}}{QM}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故 $\triangle QMN$ 的外接圆的半径 $r=\frac{1}{2}\times\frac{QN}{\sin\angle QMN}=\frac{5}{3}$，设外接球的半径为 R，则 $R^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{131}{18}$，所以三棱锥 $D\text{-}QMN$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{262\pi}{9}$，D 错误. 故选 AC.

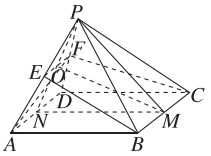
11. ABC ［解析］如图，对于 A，设平面 $\alpha\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=m'$，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，可得平面 $ABCD/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$，因为平面 $\alpha\cap$平面 $ABCD=m$，所以 $m/\!/m'$，又因为平面 $\alpha/\!/$平面 CB_1D_1，且平面 $\alpha\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=m'$，平面 $CB_1D_1\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=B_1D_1$，所以 $m'/\!/B_1D_1$，所以 $m/\!/B_1D_1$，故 A 正确；对于 B，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $A_1B/\!/D_1C$，因为平面 $\alpha/\!/$平面 CB_1D_1，且 $D_1C\subset$平面 CB_1D_1，所以 $D_1C/\!/$平面 α，过 D_1C 作平面 γ，设平面 $\gamma\cap$平面 $\alpha=a$，可得 $D_1C/\!/a$，可得 $A_1B/\!/a$，又 $A_1B\not\subset\alpha$，$a\subset\alpha$，所以 $A_1B/\!/$平面 α，故 B 正确；对于 C，设平面 $\alpha\cap$平面 $DCC_1D_1=n'$，因为平面 $\alpha/\!/$平面 CB_1D_1 且平面 $CB_1D_1\cap$平面 $DCC_1D_1=D_1C$，所以 $n'/\!/D_1C$，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $AD\perp$平面 DCC_1D_1，因为 $D_1C\subset$平面 DCC_1D_1，所以 $AD\perp D_1C$，又因为 $DC_1\perp D_1C$，且 $AD\cap DC_1=D$，AD，$DC_1\subset$平面 ADC_1B_1，所以 $D_1C\perp$平面 ADC_1B_1，所以 $n'\perp$平面 ADC_1B_1，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，可得平面 $ABB_1A_1/\!/$平面 DCC_1D_1，因为平面 $\alpha\cap$平面 $DCC_1D_1=n'$，平面 $\alpha\cap$平面 $ABB_1A_1=n$，所以 $n/\!/n'$，所以 $n\perp$平面 ADC_1B_1，故 C 正确；对于 D，因为 $m/\!/B_1D_1$ 且 $n/\!/D_1C$，所以 m，n 所成的角，即为 B_1D_1 与 D_1C 所成的角，因为 $\triangle CB_1D_1$ 为等边三角形，所以可得 $\angle CD_1B_1=\frac{\pi}{3}$，所以异面直线 m，n 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，故 D 不正确. 故选 ABC.



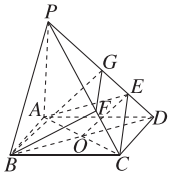
12. 平行 ［解析］如图，正方形 $ABCD$ 的四个顶点在平面 α 的同侧，分别过 A，B，C 作 AA_1，BB_1，CC_1 垂直于平面 α，垂足分别为 A_1，B_1，C_1. 连接 AC，A_1C_1，取 AC，A_1C_1 的中点分别为 O，O_1，连接 OO_1，B_1O_1，则 $OO_1/\!/AA_1/\!/CC_1/\!/BB_1$，所以 $OO_1\perp\alpha$，由已知得 $AA_1=2$，$BB_1=3$，$CC_1=4$，则 $OO_1=\frac{AA_1+CC_1}{2}=3=BB_1$，所以四边形 BB_1O_1O 是平行四边形，则 $BO/\!/B_1O_1$，即 $BD/\!/B_1O_1$，又 $BD\not\subset$平面 α，$B_1O_1\subset$平面 α，所以 $BD/\!/$平面 α.



13. ②③ ［解析］由展开图还原几何体如图所示. 对于①，因为 E，F 分别为 PA，PD 的中点，所以 $EF/\!/AD$，而 $AD/\!/BC$，所以 $EF/\!/BC$，则 E，F，B，C 共面，所以直线 BE 与 CF 不是异面直线，故①错误；对于②，因为 $E\in$平面 PAD，$AF\subset$平面 PAD，$E\notin AF$，$B\notin$平面 PAD，所以直线 BE 与直线 AF 是异面直线，故②正确；对于③，由①知 $EF/\!/BC$，因为 $EF\not\subset$平面 PBC，$BC\subset$平面 PBC，所以直线 $EF/\!/$平面 PBC，故③正确；对于④，假设平面 $BCFE\perp$平面 PAD，在平面 PAD 上过点 P 作 $PO\perp EF$ 分别交 EF，AD 于点 O，N，在 BC 上取一点 M，连接 PM，OM，MN，因为平面 $BCFE\cap$平面 $PAD=EF$，$PO\perp EF$，所以 $PO\perp$平面 $BCFE$，而 $OM\subset$平面 $BCFE$，所以 $PO\perp OM$，由中位线的性质，易知 O 是 PN 的中点，此时 $\triangle PMN$ 是等腰三角形，即 $PM=MN$ 恒成立，因为 M 是线段 BC 上任意取的一点，且 $\triangle PBC$ 中 PC，PB 与 BC 的长度不确定，所以不一定有 $PM=MN$ 成立，若 $PM\neq MN$，则平面 $BCFE$ 与平面 PAD 不垂直，所以④错误.



14. $\frac{2}{3}$ ［解析］如图，连接 BD，交 AC 于点 O，连接 OE，由四边形 $ABCD$ 是正方形，得 $BO=OD$，在线段 PE 上取点 G，使得 $GE=ED$，由 $PE=\frac{3}{4}PD$，得 $\frac{PG}{PE}=\frac{2}{3}$，连接 BG，FG，则 $BG/\!/OE$，由 $OE\subset$平面 ACE，$BG\not\subset$平面 ACE，得 $BG/\!/$平面 ACE，而 $BF/\!/$平面 ACE，$BG\cap BF=B$，BG，$BF\subset$平面 BGF，因此平面 $BGF/\!/$平面 ACE，又平面 $PCD\cap$平面 $ACE=EC$，平面 $PCD\cap$平面 $BGF=GF$，所以 $GF/\!/EC$，所以 $\lambda=\frac{PF}{PC}=\frac{PG}{PE}=\frac{2}{3}$.



15. 解：(1) 证明：因为 $\triangle ABC$ 是正三角形，M 为 AB 的中点，所以 $CM\perp AB$.

因为 $A_1A\perp$平面 ABC，$CM\subset$平面 ABC，所以 $CM\perp A_1A$，又 $A_1A\cap AB=A$，A_1A，$AB\subset$平面 A_1ABB_1，

所以 $CM\perp$平面 A_1ABB_1，又因为 $B_1B\subset$平面 A_1ABB_1，所以 $CM\perp B_1B$.

连接 AB_1，易得 $AB_1=B_1B=2\sqrt{2}$，

所以 $AB^2=AB_1^2+B_1B^2$，所以 $AB_1\perp B_1B$，又因为 $AB_1/\!/MN$，所以 $MN\perp BB_1$. 因为 $MN\cap CM=M$，MN，$CM\subset$平面 MCN，所以 $B_1B\perp$平面 MCN.

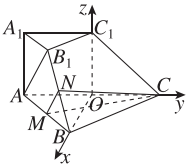
(2) 取 AC 的中点 O，连接 BO，C_1O，易知 $C_1O\perp$平面 ABC，$BO\perp OC$，故 OB，OC，OC_1 两两垂直，

以 O 为坐标原点，OB，OC，OC_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B_1(\sqrt{3},-1,2)$，$B(2\sqrt{3},0,0)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,0,2)$.

由(1)知平面 MCN 的一个法向量为 $\overrightarrow{B_1B}=(\sqrt{3},1,-2)$，又 $\overrightarrow{C_1C}=(0,2,-2)$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{B_1B},\overrightarrow{C_1C}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{C_1C}|}{|\overrightarrow{B_1B}|\cdot|\overrightarrow{C_1C}|}=\frac{6}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$，

所以直线 C_1C 与平面 MCN 所成的角的



正弦值为$\frac{3}{4}$.

16. 解:(1)证明:在平面 $CDEF$ 内,过点 E 作 $EO\perp CD$ 交 CD 于点 O,由四边形 $CDEF$ 为等腰梯形,且 $CD=2EF=4$,得 $DO=1$,又 $DE=\sqrt{5}$,

所以 $OE=\sqrt{DE^2-OD^2}=2$.

连接 AO,易知 $\triangle ADO\cong\triangle EDO$,可得 $AO\perp CD$ 且 $AO=2$,又 $AE=2\sqrt{2}$,

所以在 $\triangle OAE$ 中,$AE^2=OE^2+OA^2$,

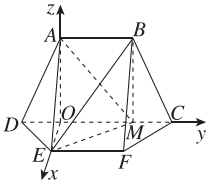
从而 $OE\perp OA$,

又 $OE\perp CD$,$OA\cap CD=O$,OA,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$,

又 $OE\subset$ 平面 $CDEF$,

所以平面 $ABCD\perp$ 平面 $CDEF$.

(2)由(1)知,OE,OC,OA 两两垂直,以 O 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(0,0,2)$,$E(2,0,0)$,$M(0,2,0)$,$B(0,2,2)$,



所以 $\overrightarrow{AE}=(2,0,-2)$,$\overrightarrow{EM}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{MB}=(0,0,2)$.

设平面 AEM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2z=0,\\ -2x+2y=0,\end{cases}$

取 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.设平面 BEM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2z_1=0,\\ -2x_1+2y_1=0,\end{cases}$

取 $y_1=1$,则 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

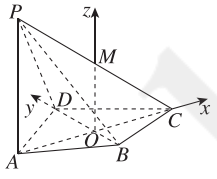
所以平面 AEM 与平面 BEM 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

17. 解:(1)证明:记 $AC\cap BD=O$,如图.因为 $AB=BC$,$AD=CD$,$BD=BD$,

所以 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$,所以 $\angle ADO=\angle CDO$,所以 $\angle AOD=\angle COD=90°$,即 $AC\perp BD$.又 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BD$.

又因为 $AC\cap PA=A$,且 $AC\subset$ 平面 PAC,$PA\subset$ 平面 PAC,

所以 $BD\perp$ 平面 PAC.



(2)由(1)易知 O 为 AC 的中点,取 PC 的中点 M,连接 OM,则 $OM/\!/PA$,所以 $OM\perp$ 平面 $ABCD$,所以 OC,OD,OM 两两垂直,以 O 为原点,OC,OD,OM 所在的直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

由题意及(1)知 $OA=OB=1$,$OD=2$,

则 $A(-1,0,0)$,$B(0,-1,0)$,$C(1,0,0)$,$D(0,2,0)$,$P(-1,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{PD}=(1,2,-2)$,$\overrightarrow{AD}=(1,2,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,-1,-2)$,$\overrightarrow{BC}=(1,1,0)$.设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=x_1+2y_1-2z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=x_1+2y_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=1$,则 $\boldsymbol{m}=(-2,1,0)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=x_2-y_2-2z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=x_2+y_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{-3}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$,所以平面 PBC 与平面 PAD 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$,所以平面 PBC 与平面 PAD 夹角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

18. 解:方法一:(1)证明:连接 OA,如图,

因为 PO 是三棱锥 P-ABC 的高,所以 $PO\perp$ 平面 ABC,

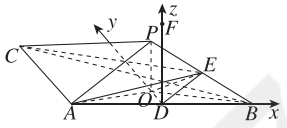
所以 $PO\perp OA$,$PO\perp OB$,

所以 $\angle POA=\angle POB=90°$,又 $PA=PB$,$PO=PO$,所以 $\triangle POA\cong\triangle POB$,所以 $OA=OB$.

取 AB 的中点 D,连接 OD,DE,则有 $OD\perp AB$,又 $AB\perp AC$,所以 $OD/\!/AC$,又 $OD\not\subset$ 平面 PAC,$AC\subset$ 平面 PAC,所以 $OD/\!/$ 平面 PAC.

因为 D,E 分别为 AB,PB 的中点,所以 $DE/\!/PA$.又 $DE\not\subset$ 平面 PAC,$PA\subset$ 平面 PAC,所以 $DE/\!/$ 平面 PAC.

又 OD,$DE\subset$ 平面 ODE,$OD\cap DE=D$,所以平面 $ODE/\!/$ 平面 PAC,又 $OE\subset$ 平面 ODE,所以 $OE/\!/$ 平面 PAC.



(2)过点 D 作 $DF/\!/OP$,以 D 为原点,以 DB 所在直线为 x 轴,DO 所在直线为 y 轴,DF 所在直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.因为 $PO=3$,$PA=5$,所以 $OA=OB=4$,

又 $\angle ABO=\angle CBO=30°$,所以 $OD=2$,$DB=2\sqrt{3}$,所以 $P(0,2,3)$,$B(2\sqrt{3},0,0)$,$A(-2\sqrt{3},0,0)$,$E\left(\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$.

设 $AC=a$,则 $C(-2\sqrt{3},a,0)$,故 $\overrightarrow{AE}=\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(4\sqrt{3},0,0)$,$\overrightarrow{AC}=(0,a,0)$.设平面 AEB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}4\sqrt{3}x_1=0,\\ 3\sqrt{3}x_1+y_1+\frac{3}{2}z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=3$,则 $x_1=0$,$z_1=-2$,

所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,3,-2)$.

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}ay_2=0,\\ 3\sqrt{3}x_2+y_2+\frac{3}{2}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=\sqrt{3}$,则 $y_2=0$,$z_2=-6$,

所以 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},0,-6)$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=\frac{12}{13\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{13}$.

设二面角 C-AE-B 的平面角为 θ,

则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle}=\frac{11}{13}$,

所以二面角 C-AE-B 的正弦值为$\frac{11}{13}$.

方法二:(1)证明:连接 OA,如图,

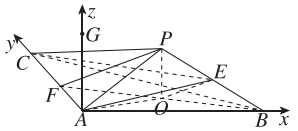
因为 PO 是三棱锥 P-ABC 的高,所以 $PO\perp$ 平面 ABC,所以 $PO\perp OA$,$PO\perp OB$,所以 $\angle POA=\angle POB=90°$,

又 $PA=PB$,$PO=PO$,所以 $\triangle POA\cong\triangle POB$,所以 $OA=OB$.

延长 BO 交 AC 于 F,连接 PF,

则在 Rt$\triangle ABF$ 中,O 为 BF 的中点.

在 $\triangle PBF$ 中,O,E 分别为 BF,PB 的中点,所以 $EO/\!/PF$.因为 $EO\not\subset$ 平面 PAC,$PF\subset$ 平面 PAC,所以 $EO/\!/$ 平面 PAC.



(2)过点 A 作 $AG/\!/OP$,以 A 为原点,以 AB 所在直线为 x 轴,AC 所在直线为 y 轴,AG 所在直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.因为 $PO=3$,$PA=5$,所以 $OA=OB=4$,

又 $\angle ABO=\angle CBO=30°$,所以 $AB=4\sqrt{3}$,所以 $P(2\sqrt{3},2,3)$,$B(4\sqrt{3},0,0)$,$A(0,0,0)$,$E\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$,

设 $AC=a$,则 $C(0,a,0)$,

故 $\overrightarrow{AB}=(4\sqrt{3},0,0)$,$\overrightarrow{AE}=\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{AC}=(0,a,0)$.

设平面 AEB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}4\sqrt{3}x_1=0,\\ 3\sqrt{3}x_1+y_1+\frac{3}{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=3$,

则 $x_1=0$,$z_1=-2$,所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,3,-2)$.设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}ay_2=0,\\ 3\sqrt{3}x_2+y_2+\frac{3}{2}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=\sqrt{3}$,则 $y_2=0$,$z_2=-6$,所以 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},0,-6)$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=\frac{12}{13\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{13}$.

设二面角 C-AE-B 的平面角为 θ,

则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle}=\frac{11}{13}$,

所以二面角 C-AE-B 的正弦值为$\frac{11}{13}$.

19. 解:(1)证明:取 BC 的中点 O,连接 AO,EO.

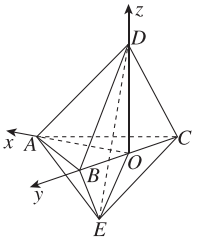
$\because\triangle ABC$ 是等边三角形,O 为 BC 中点,

$\therefore AO\perp BC$,又 $EB=EC$,$\therefore EO\perp BC$.

$\because AO\cap EO=O$,AO,$EO\subset$ 平面 AEO,

$\therefore BC\perp$ 平面 AEO,

又 $AE\subset$ 平面 AEO,$\therefore BC\perp AE$.

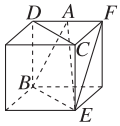


(2)连接 DO,则 $DO\perp BC$,

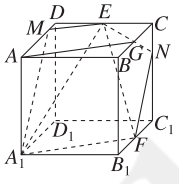
由 $AB=AC=BC=2$,

$DB=DC=\sqrt{2}$，得 $AO=\sqrt{3}$，$DO=1$，
又 $AD=2$，$\therefore AO^2+DO^2=AD^2$，
$\therefore DO\perp AO$，
又 $AO\cap BC=O$，AO，$BC\subset$ 平面 ABC，
$\therefore DO\perp$ 平面 ABC.
如图，以 O 为坐标原点，OA，OB，OD 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则 $O(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,-1,0)$，$D(0,0,1)$，
$\therefore \overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,1,1)$.
设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ y+z=0,\end{cases}$
取 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$.
$\because\angle AOE$ 是二面角 A-BC-E 的平面角，
$\therefore\angle AOE=30^\circ$，又 $OE=1$，$\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$，$\therefore\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$，
则 $\cos\langle\overrightarrow{DE},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DE}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$，
$\therefore$ 直线 DE 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

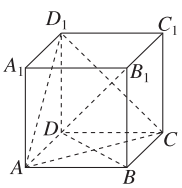
重点强化练（十二）

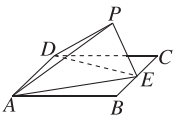
1. D ［解析］还原正方体如图所示，设 $AD=1$，则 $AB=\sqrt{5}$，$AF=1$，$BE=EF=2\sqrt{2}$，$AE=3$，CD 与 AB 所成的角等于 BE 与 AB 所成的角，


所以所求余弦值为 $\cos\angle ABE=\frac{5+8-9}{2\times\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故选 D.

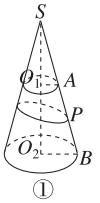
2. A ［解析］分别在棱 AD，CC_1，BC 上取点 M，N，G，使得 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MD}$，$\overrightarrow{C_1N}=2\overrightarrow{NC}$，$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GC}$，连接 A_1M，ME，EN，NF，AG. 易证 $ME\parallel AG\parallel A_1F$，$NF\parallel A_1M$，则平面 A_1EF 截该正方体所得的截面图形是五边形 A_1MENF. 由 $C_1F=6$，$C_1N=8$，可得 $NF=\sqrt{C_1F^2+C_1N^2}=10$. 故选 A.


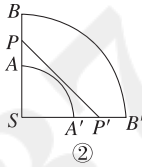
3. C ［解析］由图可知，扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长，圆锥底面圆的半径 $r=1$，设扇形半径为 R，则有 $\frac{\pi}{2}R=2\pi r$，解得 $R=4$，所以圆锥的母线长为 $R=4$，故圆锥的高 $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$. 故选 C.

4. A ［解析］连接 AC，AD_1，CD_1，BD，因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BB_1\perp AC$，又四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $BD\perp AC$，又 $BB_1\cap BD=B$，BB_1，$BD\subset$ 平面 BB_1D，所以 $AC\perp$ 平面 BB_1D，因为 $B_1D\subset$ 平面 BB_1D，所以 $AC\perp B_1D$，同理可证明 $AD_1\perp B_1D$，因为 $AD_1\cap AC=A$，AD_1，$AC\subset$ 平面 ACD_1，所以 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1，故平面 α 即为平面 ACD_1，则 α 截该正方体所得截面的形状为三角形. 故选 A.


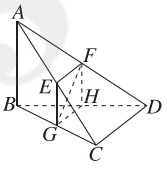
5. B ［解析］如图，依题意，$PE\perp PA$，$PE\perp PD$，$PA\cap PD=P$，PA，$PD\subset$ 平面 PAD，则 $PE\perp$ 平面 PAD，


$PA=PD=2\sqrt{2}a$，$AD=4a$，即有 $PA^2+PD^2=AD^2$，则 $PA\perp PD$，由此可将三棱锥 P-ADE 补成以 PE，PA，PD 为相邻三条棱的长方体. 若三棱锥 P-ADE 的四个顶点都在球 O 的球面上，则该长方体的各顶点也在球 O 的球面上. 设球 O 的半径为 R，则该长方体的体对角线长为 $2R$，因为 $2R=\sqrt{PE^2+PA^2+PD^2}=2\sqrt{5}a$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=20\pi a^2$. 故选 B.

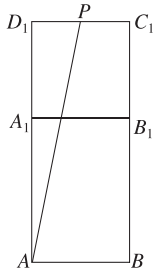
6. A ［解析］P 为圆台母线 AB 的中点，O_1，O_2 分别为上、下底面的圆心，把圆台扩成圆锥，如图①所示，则 $O_1A=1$，$O_2B=2$，$AB=4$，由 $O_1A\parallel O_2B$，得 $SA=4$，$SB=8$，$SP=6$，圆锥的底面周长为 4π，母线长 $SB=8$，所以侧面展开图扇形的圆心角为 $\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$，即 $\angle BSB'=\frac{\pi}{2}$，如图②所示. 一质点从点 P 出发，绕着该圆台的侧面运动一圈后又回到点 P，则运动的最短路径为展开图中的 PP'，由 $\angle PSP'=\frac{\pi}{2}$，$SP=SP'=6$，可得 $PP'=6\sqrt{2}$. 故选 A.


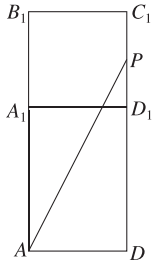
①


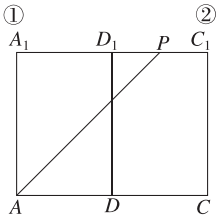
②

7. D ［解析］如图所示，取 BD 的中点 H，连接 GH，FH，由 GH 为 $\triangle BCD$ 的中位线，可得 $GH\parallel CD$，$GH=\frac{1}{2}CD$，


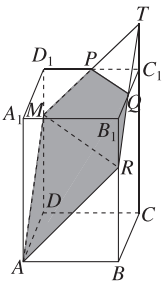
又 $EF\parallel CD$，$EF=\frac{1}{2}CD$，
所以 $EF=GH$，且 $EF\parallel GH$，可得四边形 $EFHG$ 为平行四边形，截面 $EFHG$ 为所求截面. 因为 $AB\perp$ 平面 BCD，$CD\subset$ 平面 BCD，所以 $AB\perp CD$，又 $EG\parallel AB$，$EF\parallel CD$，可得 $EF\perp EG$，则截面 $EFHG$ 为矩形. 又 $AB=CD=4$，可得截面 $EFHG$ 是边长为 2 的正方形，其面积为 4. 故选 D.

8. B ［解析］如图，将正四棱柱的侧面展开可得最短运动路线.


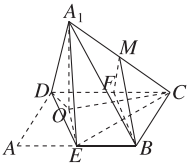
①


②


③

图①中 $AP=\sqrt{26}$，图②中 $AP=2\sqrt{5}$，图③中 $AP=3\sqrt{2}$，所以质点从 A 点到 P 点的最短路程为 $3\sqrt{2}$，此时质点从 A 点出发，经过 DD_1 上靠近 D_1 的三等分点 M，再到达 P 点. 平面 AMP 截正四棱柱所得截面为五边形 $AMPQR$，如图，由 $AM=AR=RM=2\sqrt{2}$，$MP=PQ=QR=\sqrt{2}$，故所得截面的面积为 $S_{\triangle ARM}+S_{\text{梯形}PQRM}=2\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.


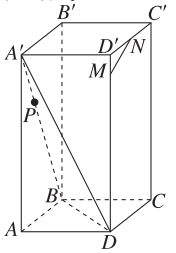
9. AD ［解析］由于 AB 始终在地面上，因此倾斜过程中没有水的部分是以左右两侧的面为底面的棱柱，A 正确；图②中水面所在四边形的面积比图①中大，B 错误；图③中 A_1C_1 与水面不平行，C 错误；图③中，水的体积不变，因此 $\triangle AEH$ 的面积不变，从而 $AE\cdot AH$ 为定值，D 正确. 故选 AD.

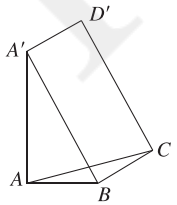
10. ABC ［解析］对于 A，设 CD 的中点为 F，连接 FM，FB，由 M 为 A_1C 的中点，得 $FM\parallel A_1D$，而 $FM\not\subset$ 平面 A_1DE，$A_1D\subset$ 平面 A_1DE，则 $FM\parallel$ 平面 A_1DE，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，E 是边 AB 的中点，则 $FB\parallel DE$，又 $FB\not\subset$ 平面 A_1DE，$DE\subset$ 平面 A_1DE，则 $FB\parallel$ 平面 A_1DE，而 $FB\cap FM=F$，FB，$FM\subset$ 平面 BMF，因此平面 $A_1DE\parallel$ 平面 BMF，又 $BM\subset$ 平面 BMF，所以 $BM\parallel$ 平面 A_1DE 恒成立，A 正确；对于 B，设 A_1 在底面 $BCDE$ 内的射影为 O，连接 OE，OD，OC，CE，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2$，E 是边 AB 的中点，则 $A_1D=A_1E$，$CD=2\neq CE=\sqrt{2}$，由 $\triangle A_1OD$ 与 $\triangle A_1OE$ 全等可得 $OD=OE$，显然 OC 与 DE 不垂直（C 不在线段 DE 的中垂线上），假设存在某个位置，使得 $DE\perp A_1C$，由 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$，$DE\subset$ 平面 $ABCD$，得 $A_1O\perp DE$，而 $DE\perp A_1C$，$A_1C\cap A_1O=A_1$，A_1C，$A_1O\subset$ 平面 A_1CO，则 $DE\perp$ 平面 A_1CO，又 $OC\subset$ 平面 A_1CO，则有 $DE\perp OC$，与 OC 与 DE 不垂直矛盾，所以不存在某个位置，使得 $DE\perp A_1C$，B 正确；对于 C，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2$，E 是边 AB 的中点，则 $\angle A_1DE=45^\circ$，由 $MF\parallel A_1D$，$FB\parallel DE$，得 $\angle MFB=\angle A_1DE=45^\circ$，$MF=\frac{1}{2}$，$BF=\sqrt{2}$，


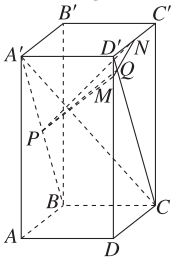
由余弦定理得 $BM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2-2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，C 正确；对于 D，$V_{A\text{-}A_1DE}:V_{A_1\text{-}BCDE}=V_{A_1\text{-}ADE}:V_{A_1\text{-}BCDE}=\left(\frac{1}{3}\cdot A_1O\cdot S_{\triangle ADE}\right):\left(\frac{1}{3}\cdot A_1O\cdot S_{\text{四边形}BCDE}\right)=1:3$，D 错误. 故选 ABC.

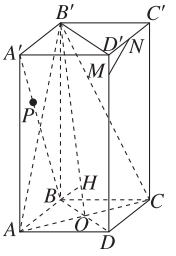
11. AC ［解析］对于选项 A，如图①，连接 BD，$A'D$，由已知得 $BD=2\sqrt{2}$，$A'D=A'B=2\sqrt{5}$，则 $\triangle A'BD$ 是等腰三角形，$\cos\angle A'BD=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\sin\angle A'BD=$

$\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以边 $A'B$ 上的高为 $BD\sin\angle A'BD=2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，故 A 正确；对于选项 B，把矩形 $A'BCD'$ 沿 $A'B$ 摊平到平面 ABA' 上，如图②，$\sin\angle ABA'=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos\angle ABC=\cos\left(\angle ABA'+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\angle ABA'=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $AC=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}=2\sqrt{2+\frac{4\sqrt{5}}{5}}$，即为 $AP+PC$ 的最小值，显然 $2+\frac{4\sqrt{5}}{5}>3$，即 $2\sqrt{2+\frac{4\sqrt{5}}{5}}>2\sqrt{3}$，故 B 错误；对于选项 C，如图③，连接 CD'，设 $CD'\cap MN=Q$，在平面 $A'BCD'$ 上过点 Q 作 $QP\perp A'C$ 交 $A'B$ 于点 P，易知 $A'B/\!/CD'$，$D'M=\frac{1}{2}$，$D'N=1$，又 $DD'=4$，$DC=2$，且 $\angle MD'N=\angle D'DC=\frac{\pi}{2}$，因此 $\triangle DD'C\backsim\triangle D'NM$，则 $\angle D'NM=\angle MD'Q$，所以 $\angle D'MQ+\angle MD'Q=\angle D'MQ+\angle D'NM=\frac{\pi}{2}$，所以 $D'C\perp MN$，又 $BC\perp$ 平面 $DCC'D'$，$MN\subset$ 平面 $DCC'D'$，因此 $BC\perp MN$，又 BC 与 CD' 是平面 $BCD'A'$ 内两条相交直线，因此 $MN\perp$ 平面 $BCD'A'$，又 $A'C\subset$ 平面 $BCD'A'$，所以 $MN\perp A'C$，又 $PQ\cap MN=Q$，且 $PQ,MN\subset$ 平面 PMN，所以 $A'C\perp$ 平面 PMN，故 C 正确；对于选项 D，如图④，设 $AC\cap BD=O$，连接 OB'，$B'D'$，作 $BH\perp OB'$，垂足为 H，由 $BB'\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，得 $BB'\perp AC$，又正方形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，$BD\cap BB'=B$，$BD,BB'\subset$ 平面 $BDD'B'$，所以 $AC\perp$ 平面 $BDD'B'$，而 $BH\subset$ 平面 $BDD'B'$，所以 $AC\perp BH$，又 $AC\cap B'O=O$，$AC,B'O\subset$ 平面 $AB'C$，所以 $BH\perp$ 平面 $AB'C$，由已知得 $BO=\sqrt{2}$，$BB'=4$，则 $BH=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{4}{3}$，设平面 $AB'C$ 截球所得截面圆的半径为 r，则 $r=\sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5}{2}$，所以截面圆的面积 $S=\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25\pi}{4}$，故 D 错误．故选 AC.


①


②

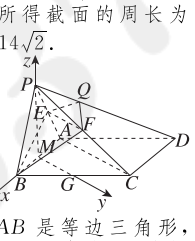

③


④

12. $\sqrt{2}$ ［解析］根据垂直关系知，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角即为二面角 B-AC-D 的平面角，且 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，$AC\perp CD$，$AC\perp AB$，$AB=CD=AC=1$，所以 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})^2}=\sqrt{1+1+1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{2}$.

13. $\frac{2}{3}$ ［解析］$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}$，设 $\overrightarrow{PD}=t\overrightarrow{PG}$，则 $\overrightarrow{PA}=t\overrightarrow{PG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{PE}-2\overrightarrow{PF}$，由于 A,E,F,G 四点共面，故 $t+\frac{3}{2}-2=1$，解得 $t=\frac{3}{2}$，故 $\overrightarrow{PD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PG}$，则 $\frac{PG}{PD}=\frac{2}{3}$.

14. $14\sqrt{2}$ ［解析］如图所示，直线 MN 分别与 CB,CD 的延长线相交于点 T,E，连接 C_1T，C_1E，分别与 BB_1，DD_1 交于点 F,Q，连接 FM,QN，故五边形 C_1QNMF 即为平面 MNC_1 截该四棱柱所得截面，其中 M,N 分别是 AB,AD 的中点，故 $AM=AN=BT=BM=2$，则 $\frac{BT}{CT}=\frac{2}{2+4}=\frac{1}{3}$，故 $BF=\frac{1}{3}CC_1=2$. 由勾股定理得 $MF=\sqrt{BM^2+BF^2}=2\sqrt{2}$，$MN=\sqrt{AM^2+AN^2}=2\sqrt{2}$，同理可得 $QN=MF=2\sqrt{2}$，又 $D_1Q=B_1F=4$，故 $C_1Q=C_1F=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，故平面 MNC_1 截该四棱柱所得截面的周长为 $2\sqrt{2}\times3+4\sqrt{2}\times2=14\sqrt{2}$.



15. 解：(1) 因为 $AB\perp AC$，$PB\perp AC$，$AB\cap PB=B$，$AB,PB\subset$ 平面 PAB，所以 $AC\perp$ 平面 PAB.

取 AB 的中点 M，连接 PM，因为 $\triangle PAB$ 是等边三角形，所以 $PM\perp AB$. 取 BC 的中点 G，连接 MG，则 $MG/\!/AC$，因为 $AC\perp$ 平面 PAB，所以 $MG\perp$ 平面 PAB，

因为 $AB,PM\subset$ 平面 PAB，所以 $MG\perp AB$，$MG\perp PM$，故 MG,AB,PM 两两垂直，以 M 为原点，MB,MG,MP 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示.

因为 $BC=2AB=4$，所以由勾股定理得 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$，所以 $B(1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$D(-3,2\sqrt{3},0)$，$A(-1,0,0)$. 易知平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$. 设直线 PD 与平面 PAB 所成角的大小为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PD},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|(-3,2\sqrt{3},-\sqrt{3})\cdot(0,1,0)|}{\sqrt{9+12+3}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

(2) 假设存在满足题意的点 Q.

由 (1) 知，$\overrightarrow{PA}=(-1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(-3,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$，设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}=-x_1-\sqrt{3}z_1=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=-3x_1+2\sqrt{3}y_1-\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，得 $x_1=-\sqrt{3}$，$y_1=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},-1,1)$.

连接 EF，因为 $AC/\!/$ 平面 $BEQF$，平面 $BEQF\cap$ 平面 $PAC=EF$，所以 $AC/\!/EF$，不妨设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$0<\lambda<1$，则 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}$. 设 $E(q,w,e)$，则 $(q,w,e-\sqrt{3})=\lambda(-1,0,-\sqrt{3})$，即 $q=-\lambda$，$w=0$，$e=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$，故 $E(-\lambda,0,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$. 设 $F(r,t,y)$，易知 $\overrightarrow{PC}=(-1,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$，则 $(r,t,y-\sqrt{3})=\lambda(-1,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$，即 $r=-\lambda$，$t=2\sqrt{3}\lambda$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$，故 $F(-\lambda,2\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

设平面 $BEQF$ 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{u}=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{u}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}(-\lambda-1)x_2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z_2=0,\\ (-\lambda-1)x_2+2\sqrt{3}\lambda y_2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z_2=0,\end{cases}$ 解得 $y_2=0$，设 $z_2=1$，则 $x_2=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1}$，故 $\boldsymbol{u}=\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1},0,1\right)$，

故 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{u}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{u}|}=\frac{\left|\frac{3\lambda-3}{\lambda+1}+1\right|}{\sqrt{5}\times\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1}\right)^2+1}}=\frac{\sqrt{35}}{35}$，

化简得 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1}\right)^2+1}=\sqrt{7}\left|\frac{4\lambda-2}{\lambda+1}\right|$，两边平方得 $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1}\right)^2+1=7\left(\frac{4\lambda-2}{\lambda+1}\right)^2$，化简得 $4-4\lambda+4\lambda^2=7(16\lambda^2-16\lambda+4)$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$.

设 $\overrightarrow{DQ}=\mu\overrightarrow{DP}(0<\mu<1)$，点 $Q(j,k,l)$，则 $(j+3,k-2\sqrt{3},l)=\mu(3,-2\sqrt{3},\sqrt{3})$，解得 $j=3\mu-3$，$k=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\mu$，$l=\sqrt{3}\mu$，故 $\overrightarrow{BQ}=(3\mu-4,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\mu,\sqrt{3}\mu)$. 当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$\boldsymbol{u}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1\right)$，

因为 $\overrightarrow{BQ}\perp\boldsymbol{u}$，所以 $(3\mu-4,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\mu,\sqrt{3}\mu)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1\right)=0$，即 $\frac{5\sqrt{3}}{2}\mu-2\sqrt{3}=0$，解得 $\mu=\frac{4}{5}$，满足要求；

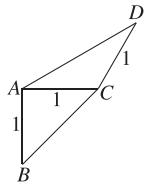
当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，$\boldsymbol{u}=\left(\frac{\sqrt{3}}{5},0,1\right)$，

因为 $\overrightarrow{BQ}\perp\boldsymbol{u}$，所以 $(3\mu-4,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\mu,\sqrt{3}\mu)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{5},0,1\right)=0$，即 $\frac{8\sqrt{3}}{5}\mu-4\sqrt{3}=0$，解得 $\mu=\frac{1}{2}$，满足要求.

故存在点 Q，使得平面 $BEQF$ 与平面 PAD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{35}}{35}$，

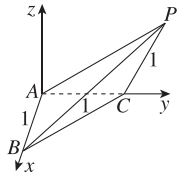
此时 $\frac{DQ}{DP}$ 的值为 $\frac{4}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$.

16. 解：(1) 如图，在 $\triangle ACD$ 中，由 $AC=CD=1$，$\angle ADC=30°$ 得 $\angle CAD=\angle ADC=30°$，所以 $AD=2AC\cos\angle DAC=2\times1\times\cos30°=\sqrt{3}$，$\angle BAC=\angle DAB-\angle CAD=120°-30°=90°$，即 $AB\perp AC$.



(i) 证明：因为 $AB\perp AC$，$PC\perp AB$，$PC\cap AC=C$，$PC,AC\subset$ 平面 PAC，所以 $AB\perp$ 平面 PAC，又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC.

(ii) 以 A 为原点，AB,AC 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



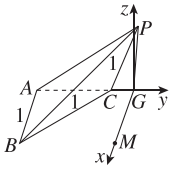
则 $A(0,0,0)$，$B(1,$

$0,0)$，$C(0,1,0)$，$P\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设球心 $O(a,b,c)$，半径为 R，

则 $AO=BO=CO=PO=R$，

所以 $a^2+b^2+c^2=(a-1)^2+b^2+c^2=a^2+(b-1)^2+c^2=a^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\left(c-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=R^2$，解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$R=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2)在平面 PAC 中，过 P 作 $PG\perp AC$ 于 G，在平面 ABC 中，过 G 作 $GM\perp AC$，设点 P,G,M 确定平面 α. 因为 $GM\cap PG=G$，$GM,PG\subset$ 平面 α，所以 $AC\perp$ 平面 α.



由(1)知 $AG=\sqrt{3}\cos 30^\circ=\frac{3}{2}$，$PG=\sqrt{3}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

设$\angle PGM=\theta$，不妨令 $\theta\in(0^\circ,180^\circ)$，以 G 为原点，GM，AC 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则点 P 在平面 xGz 内，则 $A\left(0,-\frac{3}{2},0\right)$，$B\left(1,-\frac{3}{2},0\right)$，$C\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

所以 $\overrightarrow{CA}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{CB}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{CP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$.

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{CA},\\ \boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{CP},\end{cases}$ 故

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=-y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\cos\theta+\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1\sin\theta=0,\end{cases}$$

令 $x_1=\sin\theta$，得 $\boldsymbol{m}=(\sin\theta,0,-\cos\theta)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CB},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CP},\end{cases}$ 故

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=x_2-y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\cos\theta+\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2\sin\theta=0,\end{cases}$$

令 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,-\frac{\sqrt{3}\cos\theta+1}{\sqrt{3}\sin\theta}\right)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sin\theta+\frac{(\sqrt{3}\cos\theta+1)\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta}}{\sqrt{2+\left(\frac{\sqrt{3}\cos\theta+1}{\sqrt{3}\sin\theta}\right)^2}}=\frac{\cos\theta+\sqrt{3}}{\sqrt{-3\cos^2\theta+2\sqrt{3}\cos\theta+7}}$.

令 $t=\cos\theta+\sqrt{3}$，则由 $\theta\in(0^\circ,180^\circ)$ 得 $t\in(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$，则 $\frac{1}{t}\in\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$，故 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{t}{\sqrt{-3(t-\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}(t-\sqrt{3})+7}}=\frac{t}{\sqrt{-3t^2+8\sqrt{3}t-8}}=\frac{1}{\sqrt{-\frac{8}{t^2}+\frac{8\sqrt{3}}{t}-3}}=\frac{1}{\sqrt{-8\left(\frac{1}{t}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+3}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $\frac{1}{t}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，所以二面角 A-CP-B 的余弦值的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

重点强化练（十三）

1. D ［解析］原问题可转化为圆 $(x-a)^2+(y-a)^2=8$ 和圆 $x^2+y^2=2$ 相交，两圆的圆心距 $d=\sqrt{(a-0)^2+(a-0)^2}=\sqrt{2}|a|$，由 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}<\sqrt{2}|a|<2\sqrt{2}+\sqrt{2}$，解得 $1<|a|<3$，即 $a\in(-3,-1)\cup(1,3)$. 故选 D.

2. B ［解析］依题意，$\overrightarrow{OM_1}=(-1,3)$，$\overrightarrow{OM_2}=(-3,-1)$，则 $\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2}=-1\times(-3)+3\times(-1)=0$，因此线段 M_1M_2 是圆的直径，且 $|M_1M_2|=2\sqrt{5}$，而点 P 是该圆上的点，所以 $|PO|$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$. 故选 B.

3. C ［解析］由 $PA\perp PB$ 可得点 P 的轨迹是以线段 AB 为直径的圆，则圆心为 $(0,0)$，半径为 1，又直线 $l:m(x-\sqrt{3})+n(y-1)=0$ 过定点 $(\sqrt{3},1)$，故所求距离的最大值为 $\sqrt{3+1}+1=3$. 故选 C.

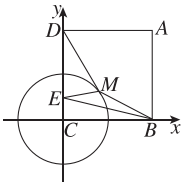
4. C ［解析］由 $AM\perp l$，可得直线 AM 的方程为 $y=a(x-1)$，由 $\begin{cases}x+ay+2a-1=0,\\ y=a(x-1),\end{cases}$ 消去 a，整理可得 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$，所以点 M 的轨迹是以 $C(1,-1)$ 为圆心，半径 $r=1$ 的圆，因此 $|MO|_{\min}=|CO|-r=\sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2}-1=\sqrt{2}-1$. 故选 C.

5. B ［解析］直线 l_1 的方程可化为 $m(x+3)-y=0$，所以直线 l_1 过定点 $A(-3,0)$，易知直线 l_2 过定点 $B(3,0)$. 因为 $m\times1+(-1)\times m=0$，所以 $l_1\perp l_2$，即 $PA\perp PB$，又 $\overrightarrow{AP}=(x_0+3,y_0)$，$\overrightarrow{BP}=(x_0-3,y_0)$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=x_0^2-9+y_0^2=0$，所以 $x_0^2+y_0^2=9$，又点 $(-3,0)$ 不在直线 l_2 上，所以点 P 的轨迹是曲线 $x^2+y^2=9(x\neq-3)$. 设 $\frac{y_0}{x_0-5}=k$，可得 $kx_0-y_0-5k=0$，由题意可知，直线 $kx-y-5k=0$ 与曲线 $x^2+y^2=9(x\neq-3)$ 有公共点，且圆 $x^2+y^2=9$ 的圆心为原点，半径为 3，所以 $\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant3$，解得 $-\frac{3}{4}\leqslant k\leqslant\frac{3}{4}$. 当 $x_0=-3$，$y_0=0$ 时，$\frac{y_0}{x_0-5}=0$；当 $x_0=3$，$y_0=0$ 时，$\frac{y_0}{x_0-5}=0$. 因此，$\frac{y_0}{x_0-5}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$. 故选 B.

6. D ［解析］由 $mx+ny-(m+3n)=0$ 得 $m(x-1)+n(y-3)=0$，所以动直线过定点 $Q(1,3)$，所以动点 M 在以 PQ 为直径的圆上，所以圆的半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{(1+3)^2+3^2}=\frac{5}{2}$，圆心的坐标为 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，所以点 N 到圆心的距离为 $\sqrt{(2+1)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)^2}=3$，所以 $|MN|$ 的最大值为 $3+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$. 故选 D.

7. D ［解析］设点 M 的坐标为 (x,y)，点 $A(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}x=\frac{x_0+4}{2},\\ y=\frac{y_0+3}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=2x-4,\\ y_0=2y-3,\end{cases}$ ∵点 $A(x_0,y_0)$ 的坐标满足 $(x_0+1)^2+y_0^2=4$，∴$(2x-4+1)^2+(2y-3)^2=4$，即 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$，故点 M 的轨迹方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$. 故选 D.

8. D ［解析］依题意，以 C 为坐标原点，直线 CB，CD 分别为 x，y 轴建立平面直角坐标系，如图，则 $B(2,0)$，$D(0,2)$，取点 $E\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 设 $M'(x,y)$，当 $|M'D|=2|M'E|$ 时，$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=2\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$，



化简整理得 $x^2+y^2=1$，即点 M' 的轨迹是以 C 为圆心，1 为半径的圆，而点 M 在以 C 为圆心，1 为半径的圆上，因此 $|MD|=2|ME|$，显然点 B 在圆 C：$x^2+y^2=1$ 外，则 $2|MB|+|MD|=2|MB|+2|ME|=2(|MB|+|ME|)\geqslant2|BE|$，当且仅当 M 为线段 BE 与圆 C 的交点时取等号，而 $|BE|=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，所以 $2|MB|+|MD|$ 的最小值为 $2|BE|=\sqrt{17}$. 故选 D.

9. BD ［解析］若圆 C 上仅存在一点 P 使 $PA\perp PB$，则以 AB 为直径的圆与圆 C 相内切或外切. 由 $A(4,a)$，$B(4,-a)$，得以 AB 为直径的圆的圆心为 $(4,0)$，半径为 $a>0$，则有 $\sqrt{(0-4)^2+(0-0)^2}=1+a$ 或 $\sqrt{(0-4)^2+(0-0)^2}=|1-a|$，所以 $a=3$ 或 $a=5$，故选 BD.

10. BCD ［解析］圆 C：$(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 的圆心为 $C(2,1)$，半径 $r=3$，直线 $l:kx-y+1=0$ 过定点 $Q(0,1)$，因为 $(0-2)^2+(1-1)^2=4<9$，所以点 $Q(0,1)$ 在圆 C 内，所以直线 l 与圆 C 一定相交，当点 Q 为弦 AB 的中点时，$|AB|$ 取得最小值，此时直线 l 的斜率不存在，而直线 l 的斜率一定存在，所以 $|AB|>2\sqrt{r^2-|CQ|^2}=2\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$，故 A 错误；因为点 M 为弦 AB 的中点，所以 $CM\perp AB$，即 $CM\perp MQ$，所以点 M 的轨迹是以 CQ 为直径的圆(去除点 $(0,1)$)，圆心为 $N(1,1)$，半径为 1，所以其轨迹方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1(x\neq0)$，因为 $(0-1)^2+(0-1)^2=2>1$，所以点 O 在圆 N 外，所以 $|OM|$ 的最小值为 $\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2}-1=\sqrt{2}-1$，故 B 正确；$|OC|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，要使 $\triangle OCM$ 的面积取得最大值，只需点 M 到直线 OC 的距离最大，直线 OC 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$，圆心 $N(1,1)$ 到直线 OC 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以点 M 到直线 OC 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}+1$，所以 $\triangle OCM$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+1\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，故 C 正确；设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=9,\\ kx-y+1=0,\end{cases}$ 得 $(k^2+1)x^2-4x-5=0$，则 $x_1+x_2=\frac{4}{k^2+1}$，故 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=\frac{2k^2+4k+2}{k^2+1}$，所以点 M 的坐标为

$\left(\frac{2}{k^2+1},\frac{k^2+2k+1}{k^2+1}\right)$，则 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PM}=(0,-3)\cdot\left(\frac{2}{k^2+1},\frac{-2k^2+2k-2}{k^2+1}\right)=6\cdot\frac{k^2-k+1}{k^2+1}=6\left(1-\frac{k}{k^2+1}\right)$，当 $k=0$ 时，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PM}=6$，当 $k>0$ 时，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PM}<6$，当 $k<0$ 时，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PM}=6\left(1-\frac{k}{k^2+1}\right)=6\left(1+\frac{1}{-k+\frac{1}{-k}}\right)\leqslant 6\left(1+\frac{1}{2\sqrt{-k\cdot\frac{1}{-k}}}\right)=9$，当且仅当 $-k=\frac{1}{-k}$，即 $k=-1$ 时取等号，综上所述，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PM}$ 的最大值为 9，故 D 正确. 故选 BCD.

11. ACD ［解析］对于 A，设 $P(x,y)$，因为 $\frac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，所以 $\frac{(x-1)^2+y^2}{(x-3)^2+y^2}=2$，化简得 $x^2+y^2-10x+17=0$，故 A 正确；对于 B，因为曲线 C：$x^2+y^2-10x+17=0$ 的圆心为 $(5,0)$，半径为 $2\sqrt{2}$，圆心 $(5,0)$ 到直线 $3x+4y=0$ 的距离 $d=3>2\sqrt{2}$，所以直线 $3x+4y=0$ 与曲线 C 没有公共点，故 B 错误；对于 C，曲线 C 的圆心在 x 轴上，所以 x 轴被曲线 C 截得的弦即为直径，所以 x 轴被曲线 C 截得的弦长为 $4\sqrt{2}$，故 C 正确；对于 D，因为 $A(1,0)$，$B(3,0)$，所以 $|AB|=2$，故 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|y_P|=|y_P|$，而曲线 C 的方程为 $x^2+y^2-10x+17=0$，所以 $y_P\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$，即 $S_{\triangle ABP}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. $2\sqrt{2}+1$ ［解析］设 $M(x,y)$，由 $|MA|=\sqrt{2}\,|MO|$，得 $(x-2)^2+y^2=2(x^2+y^2)$，即 $(x+2)^2+y^2=8$，所以点 M 的轨迹是圆心为 $C(-2,0)$，半径 $r=2\sqrt{2}$ 的圆，又 $|BC|=1$，所以 $|MB|_{\max}=|BC|+r=1+2\sqrt{2}$.

13. 5 ［解析］∵ $|NO|^2+|NQ|^2=16$，∴点 N 在以 OQ 为直径的圆上，不妨设 $N(2\cos\theta-2,2\sin\theta)$，$M(-1,m)$，则 $\overrightarrow{PM}=(-3,m-2)$，$\overrightarrow{PN}=(2\cos\theta-4,2\sin\theta-2)$，∴ $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=(2\cos\theta-7,2\sin\theta+m-4)$，∴ $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|^2=(2\cos\theta-7)^2+(2\sin\theta+m-4)^2=m^2-8m+69+4[(m-4)\sin\theta-7\cos\theta]=(m-4)^2+53+4\sqrt{(m-4)^2+49}\sin(\theta-\varphi)$，令 $\sqrt{(m-4)^2+49}=t$，$\sin(\theta-\varphi)=a$，则 $t\geqslant 7$，$-1\leqslant a\leqslant 1$，∴ $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|^2=t^2+4+4at$. 令 $f(t)=t^2+4+4at=(t+2a)^2+4-4a^2$，$t\geqslant 7$，$-1\leqslant a\leqslant 1$，则 $f(t)$ 在 $[7,+\infty)$ 上单调递增，故当 $t=7$ 时，$f(t)$ 取得最小值 $53+28a$，再令 $g(a)=53+28a$，$-1\leqslant a\leqslant 1$，显然 $g(a)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，故当 $a=-1$ 时，$g(a)$ 取得最小值 $53-28=25$. 综上，当 $t=7$，$a=-1$ 时，$|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|^2$ 取得最小值 25，故 $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|$ 的最小值为 5.

14. 9 ［解析］由 P 为圆 A：$(x-1)^2+y^2=4$ 上的一个动点，得 $A(1,0)$，$|AP|=2$，由 Q 为圆 B：$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上的一个动点，得 $B(3,4)$，$|BQ|=1$，又 $|AO|=1$（O 为坐标原点），$|AC|=4$，所以 $\frac{|AO|}{|AP|}=\frac{|AP|}{|AC|}=\frac{1}{2}$，所以 $\triangle ACP\backsim\triangle APO$，于是 $|PC|=2|PO|$. 当 P，Q，B 三点共线且 $|PQ|<|PB|$ 时，$|PQ|+|PB|$ 取得最小值，即 $|PQ|+|PB|\geqslant 2|PB|-1$，所以 $|PC|+|PQ|+|PB|\geqslant 2|PO|+2|PB|-1\geqslant 2|OB|-1=2\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}-1=9$，当且仅当 P 在线段 OB 上时等号成立.

重点强化练（十四）

1. B ［解析］设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，由题知 $c=1$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times y_0=y_0$，又 $S_{\triangle PF_1F_2}=1$，所以 $y_0=1$，将其代入 $\frac{x_0^2}{5}+\frac{y_0^2}{4}=1$，可得 $x_0=\frac{\sqrt{15}}{2}$，所以 $P\left(\frac{\sqrt{15}}{2},1\right)$，故选 B.

2. D ［解析］对于 A，双曲线 C_1：$x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2\sqrt{2}x$，故 A 错误；对于 B，由题意得 $F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，$|F_1F_2|=6$，故 $|F_1A|=6$，由双曲线的定义得 $|F_1A|-|F_2A|=2$，故 $|F_2A|=4$，设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则 $|F_1A|+|F_2A|=2a$，即 $2a=6+4=10$，解得 $a=5$，又 $c=3$，所以椭圆 C_2 的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，故 B 错误；对于 C，$b^2=a^2-c^2=25-9=16$，故椭圆 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，故 C 错误；对于 D，在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle AF_1F_2=\frac{|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-|AF_2|^2}{2|AF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{36+36-16}{2\times 6\times 6}=\frac{7}{9}$，故 $\sin\angle AF_1F_2=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，所以 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|AF_1||F_1F_2|\sin\angle AF_1F_2=8\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 D.

3. A ［解析］由题意知，$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，设 $G(x_0,y_0)$，则 $S_{\triangle GF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times|y_0|$，由 $|y_0|\leqslant 1$ 得，$|y_0|=1$ 时 $\triangle GF_1F_2$ 的面积最大，此时 $G(0,\pm 1)$，$\tan\angle F_1GO=\frac{|OF_1|}{|OG|}=\sqrt{3}$（$O$ 为坐标原点），故 $\angle F_1GO=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle F_1GF_2=2\angle F_1GO=\frac{2\pi}{3}$. 故选 A.

4. D ［解析］设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r，则 $S_1=\frac{1}{2}|PF_1|r$，$S_2=\frac{1}{2}|PF_2|r$，$S_3=\frac{1}{2}|F_1F_2|r$，所以 $S_1-S_2=\frac{1}{2}|PF_1|r-\frac{1}{2}|PF_2|r=\frac{1}{2}r(|PF_1|-|PF_2|)=ar$，又 $S_3=cr$，$S_1-S_2=\frac{S_3}{3}$，所以 $ar=\frac{1}{3}cr$，即 $c=3a$，所以 $e=3$，故选 D.

5. C ［解析］由 $3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)=0$，得 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=3$. 当 $e=\frac{1}{3}$ 时，曲线为椭圆. 当椭圆的焦点在 x 轴上时，$0<m<4$，则 $\frac{4-m}{4}=\frac{1}{9}$，可得 $m=\frac{32}{9}$，符合题意；当椭圆的焦点在 y 轴上时，$m>4$，则 $\frac{m-4}{m}=\frac{1}{9}$，可得 $m=\frac{9}{2}$，符合题意. 当 $e=3$ 时，曲线为双曲线，则 $m<0$，则 $\frac{4-m}{4}=9$，可得 $m=-32$，符合题意. 综上，m 有 3 个不同的取值. 故选 C.

6. A ［解析］椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则直线 AB：$x=-c$，由 $\begin{cases}x=-c,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $|y|=\frac{b^2}{a}$，则 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$. 由 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形，得 $|F_1F_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，即 $2c=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2b^2}{a}$，即 $2ac=\sqrt{3}b^2=\sqrt{3}(a^2-c^2)$，整理得 $\sqrt{3}e^2+2e-\sqrt{3}=0$，又 $0<e<1$，所以 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

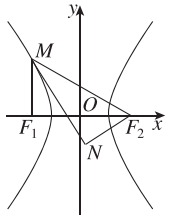
7. D ［解析］∵ O 为线段 F_1F_2 的中点（O 为坐标原点），B 为线段 AF_1 的中点，∴ $OB\parallel AF_2$，又 $OB\perp x$ 轴，∴ $AF_2\perp x$ 轴. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，$\angle AF_1F_2=\frac{\pi}{6}$，设 $|AF_2|=t$，则 $|AF_1|=2t$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}t$. ∵ $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，∴ $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}t\times t=2\sqrt{3}$，∴ $t=2$，∴ $2a=|AF_1|+|AF_2|=3t=6$，即 $a=3$，$2c=|F_1F_2|=\sqrt{3}t=2\sqrt{3}$，即 $c=\sqrt{3}$，∴ $b^2=a^2-c^2=6$，则 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$. 故选 D.

8. B ［解析］设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，由双曲线的定义知 $|m-n|=2a$ ①. 在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos\angle F_1PF_2$，所以 $4c^2=m^2+n^2-\frac{6}{7}mn$ ②. 延长 PO 至点 Q，使 $|OQ|=|OP|$，连接 F_1Q，F_2Q，则四边形 PF_1QF_2 为平行四边形，且 $|PQ|=2\times\frac{3}{2}a=3a$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理知 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos\angle F_1PF_2$，在 $\triangle PF_1Q$ 中，由余弦定理知 $9a^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle PF_1Q$，因为 $\angle F_1PF_2+\angle PF_1Q=\pi$，所以 $\cos\angle F_1PF_2+\cos\angle PF_1Q=0$，可知 $2(m^2+n^2)=9a^2+4c^2$，所以 $m^2+n^2=\frac{9a^2+4c^2}{2}$ ③. 由 ①③ 得 $mn=\frac{1}{4}a^2+c^2$ ④，把 ③④ 代入 ② 得 $4c^2=\frac{9a^2+4c^2}{2}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{4}a^2+c^2\right)$，化简得 $20c^2=30a^2$，所以 $20a^2+20b^2=30a^2$，所以 $a=\sqrt{2}b$，所以渐近线方程为 $x\pm\sqrt{2}y=0$. 故选 B.

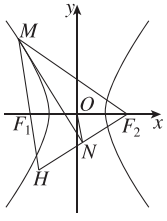
9. BC ［解析］因为椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0,a\neq b)$ 过点 $(1,1)$，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，且 $A(a,0)$，$B(0,b)$. 对于 A，当 $b=3$ 时，$a=\frac{3\sqrt{2}}{4}<2$，但是 $c=\sqrt{b^2-a^2}=\frac{3\sqrt{14}}{4}>2$，故 A 错误. 对于 B，直线 AB 的方程是 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$，则原点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{1}{1}=1$，故 B 正确. 对于 C，由 $x^2+y^2+xy=\frac{3}{4}$ 得，$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(1-y^2)\geqslant 0$，从而有 $y^2\leqslant 1$，同理 $x^2\leqslant 1$，显然曲线 x^2+y^2+

$xy=\frac{3}{4}$ 在直线 $x=\pm1$，$y=\pm1$ 所围成的矩形内，椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,a\neq b)$ 在直线 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 所围成的矩形内，由 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ 得 $a>1,b>1$，显然椭圆 Γ 和曲线 $x^2+y^2+xy=\frac{3}{4}$ 没有交点，故 C 正确. 对于 D，因为 $a\neq b$，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}>\frac{2}{ab}$，从而三角形 OAB 的面积 $S=\frac{ab}{2}>1$，故 D 错误. 故选 BC.

10. AC ［解析］如图①，当 $\angle MF_1F_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$MF_1\perp F_1F_2$，又 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，所以 $M(-\sqrt{3},2)$，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，则 $|MF_2|=\sqrt{|MF_1|^2+|F_1F_2|^2}=4$，故 $\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{3}$，$\angle MF_2F_1=\frac{\pi}{6}$，又 NM 平分 $\angle F_1MF_2$，所以 $\angle NMF_2=\frac{\pi}{6}$，进而可得直线 MN 的斜率为 $-\sqrt{3}$，故 A 正确. 因为 $\overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{F_2N}$，所以 $\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=\overrightarrow{F_2N}^2=4$，故 B 错误. 如图②，延长 F_2N，MF_1 交于点 H，由于 NM 平分 $\angle F_1MF_2$，$\overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{F_2N}$，所以 $\triangle MNH\cong\triangle MNF_2$，故 N 是 HF_2 的中点，$|HM|=|F_2M|$，由双曲线的定义可得 $|F_2M|-|F_1M|=2$，即 $|HM|-|F_1M|=|HF_1|=2$，又 O 是 F_1F_2 的中点，所以 $|ON|=\frac{1}{2}|HF_1|=1$，故 C 正确，D 错误. 故选 AC.

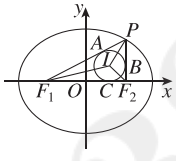


①



②

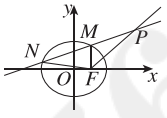
11. ABD ［解析］如图所示，设 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆与 PF_1，PF_2，F_1F_2 的切点分别为 A,B,C. 对于 A，由椭圆的方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 知 $a=5,b=4,c=3$，由椭圆的定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，易知 $|AF_1|+|BF_2|=|F_1F_2|=6$，所以 $|PA|=|PB|=2$，所以 $|IP|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，故 A 正确；对于 B，$S_{\triangle F_1PF_2}=S_{\triangle F_1PI}+S_{\triangle IPF_2}+S_{\triangle F_1IF_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\times1=\frac{1}{2}(2a+2c)\times1$，又因为 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}\times6\times y_0=\frac{1}{2}\times(10+6)\times1$，所以 $y_0=\frac{8}{3}$，又因为 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆上一点且在第一象限，所以 $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1$，可得 $x_0=\frac{5\sqrt{5}}{3}$，故 B 正确；对于 C，$|PF_1|=a+\frac{c}{a}x_0=5+\sqrt{5}$，所以 $|AF_1|=|PF_1|-|PA|=3+\sqrt{5}$，所以 $|AF_1|=|CF_1|=3+\sqrt{5}$，而 $|OF_1|=3$，所以 $I(\sqrt{5},1)$，故 C 错误；对于 D，$k_{IF_1}\cdot k_{IF_2}=\frac{1}{\sqrt{5}+3}\times\frac{1}{\sqrt{5}-3}=-\frac{1}{4}$，故 D 正确. 故选 ABD.



12. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ［解析］由题意可知 $2c=8$，得 $c=4$，所以 $k=20-16=4$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$，椭圆的右焦点为 $(4,0)$，当 $x=4$ 时，$\frac{16}{20}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $|y|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $|AB|=2|y|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

13. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right)$ ［解析］依题意，$\frac{1}{2}<\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}<1$，双曲线的离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. 设 $t=\frac{b}{a}$，则 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，设 $f(t)=\sqrt{1+t^2}$，$t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，由复合函数的单调性可得，函数 $f(t)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，故 $\frac{\sqrt{5}}{2}<f(t)<\sqrt{2}$，即 $\frac{\sqrt{5}}{2}<e<\sqrt{2}$，故双曲线离心率的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right)$.

14. 4 ［解析］如图所示，

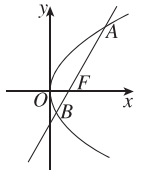


因为椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，所以 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$，所以椭圆的右焦点是 $F(1,0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，由椭圆的第二定义得 $e=\frac{|MF|}{\left|x_1-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{|NF|}{\left|x_2-\frac{a^2}{c}\right|}$，所以 $|MF|=2-\frac{1}{2}x_1$，$|NF|=2-\frac{1}{2}x_2$，设 $P(m,n)$，由外角平分线定理得 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{|MP|}{|NP|}$，即 $\frac{|x_1-m|}{|x_2-m|}=\frac{2-\frac{1}{2}x_1}{2-\frac{1}{2}x_2}$，化简得 $(x_1-x_2)(m-4)=0$，可得 $m=4$，所以点 P 的横坐标为 4.

重点强化练（十五）

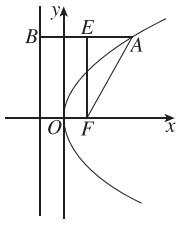
1. C ［解析］由抛物线 $C:y=4x^2$ 可得 $x^2=\frac{1}{4}y$，其准线方程为 $y=-\frac{1}{16}$，因为抛物线上一点 P 到直线 $y=-1$ 的距离为 4，所以点 P 到直线 $y=-\frac{1}{16}$ 的距离为 $4-\left[-\frac{1}{16}-(-1)\right]=\frac{49}{16}$，由抛物线的定义知 $|PF|=\frac{49}{16}$. 故选 C.

2. B ［解析］如图，依题意知 $F(1,0)$，设直线 AB 的方程为 $x=my+1(m>0)$，由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，所以 $y_A+y_B=4m$，所以 $|AB|=x_A+x_B+p=m(y_A+y_B)+2+2=4m^2+4=\frac{16}{3}$，可得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$. 故选 B.



3. C ［解析］设 $A(2,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，因为 $F(1,0)$，所以 $\overrightarrow{FA}=(1,y_0)$，$\overrightarrow{FB}=(x_1-1,y_1)$，由 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$，即 $(1,y_0)=3(x_1-1,y_1)$，得 $\begin{cases}x_1=\frac{4}{3},\\y_1=\frac{y_0}{3},\end{cases}$ 又点 B 在椭圆 C 上，所以 $\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{2}+\left(\frac{y_0}{3}\right)^2=1$，解得 $y_0=\pm1$，所以点 A 的坐标为 $(2,\pm1)$，所以 $|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{(2-1)^2+(\pm1-0)^2}=\sqrt{2}$. 故选 C.

4. C ［解析］抛物线及其准线如图所示，过点 A 作 AB 垂直于准线，垂足为点 B，过焦点 F 作 FE 垂直于 AB，垂足为点 E，由题意可知 $p=2$，$\angle AFx=\angle FAE=\frac{\pi}{3}$，根据抛物线的定义知 $|AF|=|AB|=|AE|+|EB|$，在 Rt$\triangle AFE$ 中，$|AE|=|AF|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}|AF|$，又 $|BE|=p=2$，所以 $|AF|=|AB|=\frac{1}{2}|AF|+2$，解得 $|AF|=4$. 故选 C.



5. C ［解析］由题意得 $A(-2,0)$，点 B 和点 C 均在双曲线的左支上，若 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，则由双曲线的对称性可得 A 为直角顶点，设 $B(x_1,y_1)(x_1<0)$，由对称性得 $C(x_1,-y_1)$，则 $|y_1|=|x_1|-2=-x_1-2$，又 $\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$，所以 $x_1=-\frac{10}{3}$，$y_1=\pm\frac{4}{3}$，则 $|BC|=\frac{8}{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$. 故选 C.

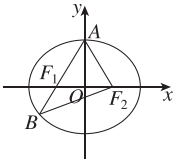
6. C ［解析］设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，由 $y^2=2x$，得 $p=1$，所以 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$. 因为 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，所以 F 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{1}{2}$，所以 $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$，所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}+x_3+\frac{1}{2}=x_1+x_2+x_3+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$，故选 C.

7. A ［解析］由抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$ 知，焦点 F 的坐标为 $(0,1)$，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $x^2-4kx-4=0$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，故 $y_1y_2=\frac{x_1^2}{4}\cdot\frac{x_2^2}{4}=1$，又 $|MF|=y_1+\frac{p}{2}=y_1+1$，$|NF|=y_2+\frac{p}{2}=y_2+1$，所以 $2|MF|+\frac{1}{2}|NF|=2(y_1+1)+\frac{1}{2}(y_2+1)=2y_1+\frac{1}{2}y_2+\frac{5}{2}\geqslant2\sqrt{2y_1\times\frac{1}{2}y_2}+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$，当且仅当 $y_1=\frac{1}{2}$，$y_2=2$ 时等号成立，故 $2|MF|+\frac{1}{2}|NF|$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$. 故选 A.

8. B ［解析］由抛物线 $C:y^2=x$ 得 $2p=$

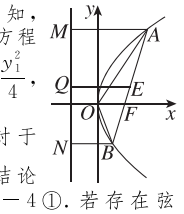
1，则 $p=\frac{1}{2}$，则 $F\left(\frac{1}{4},0\right)$，不妨设直线 PQ 的倾斜角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，$P$，$M$ 在第一象限内，则由 $|PF|\cos\theta+p=|PF|$，$p-|QF|\cos\theta=|QF|$ 得 $|PF|=\frac{p}{1-\cos\theta}$，$|QF|=\frac{p}{1+\cos\theta}$，所以 $|MF|=\frac{p}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{p}{1+\sin\theta}$，$|NF|=\frac{p}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{p}{1-\sin\theta}$，得 $|PQ|=|PF|+|QF|=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}$，$|MN|=|MF|+|NF|=\frac{2p}{\cos^2\theta}$，所以 $\frac{1}{|PQ|}+\frac{1}{|MN|}=\frac{1}{2p}=1$. 故选 B.

9. ABD ［解析］如图，由题意可知，$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，$|AF_1|=|AF_2|=a$，故 $\triangle AF_1F_2$ 为等边三角形，则 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，又 $a^2-b^2=m^2+1-m^2=1$，所以 $c=1$，$b=\sqrt{3}$，$a=2$，所以椭圆 C 的焦距为 $2c=2$，A 正确；由椭圆的定义可知，$\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a=8$，B 正确；椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，C 错误；设 $|BF_1|=x$，则 $|BF_2|=4-x$，又 $\angle BF_1F_2=\frac{2\pi}{3}$，所以由余弦定理可得 $(4-x)^2=4+x^2-4x\cos\angle BF_1F_2$，解得 $x=\frac{6}{5}$，所以 $S_{\triangle BF_1F_2}=\frac{1}{2}|BF_1||F_2F_1|\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，D 正确. 故选 ABD.



10. BCD ［解析］由椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，得 $a=5$，$b=4$，$c=3$，由椭圆的定义可知，$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，故 A 错误；由椭圆离心率公式可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，故 B 正确；$|F_1F_2|=2c=6$，设点 P 到 x 轴的距离为 h，显然 $h_{\max}=b=4$，则 $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot b=\frac{1}{2}\times6\times4=12$，故 C 正确；线段 F_1F_2 的中点为 $(0,0)$，则以线段 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=9$，其圆心为 $(0,0)$，半径 $r=3$，又圆 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 的圆心为 $(4,3)$，半径 $R=2$，所以两圆的圆心距 $d=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5=r+R$，即两圆外切，故 D 正确. 故选 BCD.

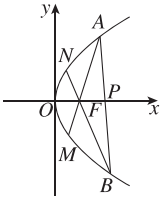
11. BC ［解析］由题意知，焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，设 $A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$. 对于 A，由抛物线的二级结论可知 $y_1y_2=-p^2=-4$ ①. 若存在弦 AB，使得弦 AB 中点的坐标为 $\left(\frac{5}{2},3\right)$，则 $\begin{cases}y_1+y_2=6,\\ \frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y_1=2,\\ y_2=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y_1=4,\\ y_2=2,\end{cases}$ 都不满足 ① 式，故 A 错误. 对于 B，当 $AB\perp OF$ 时，$\begin{cases}\frac{y_1^2}{4}=\frac{y_2^2}{4}=1,\\ y_1=-y_2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y_1=2,\\ y_2=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y_1=-2,\\ y_2=2,\end{cases}$ 由对称性不妨取 $A(1,2)$，$B(1,-2)$，则 $|OA|=|OB|=\sqrt{5}$，所以 $|OA|\cdot|OB|=5$，故 B 正确. 对于 C，设弦 AB 的中点为 E，过 A，B，E 分别作准线的垂线，垂足分别为 M，N，Q，如图，则 $|EQ|=\frac{1}{2}(|AM|+|BN|)=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}|AB|$，又 $|AB|<|OA|+|OB|$，所以 $|EQ|<\frac{1}{2}(|OA|+|OB|)$，故 C 正确. 对于 D，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，$k\in(0,2)$. 由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $ky^2-4y-4k=0$，则 $\Delta=16+16k^2>0$，$y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=-4$，所以 $|OA|\cdot|OB|=\sqrt{\frac{y_1^4}{16}+y_1^2}\cdot\sqrt{\frac{y_2^4}{16}+y_2^2}=\sqrt{\frac{y_1^4y_2^4}{256}+\frac{y_1^4y_2^2}{16}+\frac{y_1^2y_2^4}{16}+y_1^2y_2^2}=\sqrt{1+y_1^2+y_2^2+16}=\sqrt{17+(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}=\sqrt{25+(y_1+y_2)^2}=\sqrt{25+\frac{16}{k^2}}$. 因为 $k\in(0,2)$，所以 $k^2\in(0,4)$，所以 $|OA|\cdot|OB|>\sqrt{29}$，故 D 错误. 故选 BC.



12. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ ［解析］由题意知 $F_1(-\sqrt{7},0)$，$F_2(\sqrt{7},0)$，则 $|F_1F_2|=2\sqrt{7}$，因为 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\cdot|F_1F_2|=4$，所以 $|y_1-y_2|=\frac{8}{|F_1F_2|}=\frac{8}{2\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

13. $\frac{3}{2}$　$\frac{\sqrt{6}}{3}$ ［解析］设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，$C\left(\frac{x_0}{2},0\right)$，$A(-x_0,-y_0)$，则 $k_1=\frac{y_0}{x_0}$，$k_3=k_{AC}=\frac{-y_0-0}{-x_0-\frac{x_0}{2}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{y_0}{x_0}$，$\therefore\frac{k_1}{k_3}=\frac{3}{2}$. 设 $B(x_1,y_1)$，则 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 则 $\frac{x_0^2-x_1^2}{a^2}=-\frac{y_0^2-y_1^2}{b^2}$，可得 $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=-\frac{b^2}{a^2}$，故 $k_3k_2=-\frac{b^2}{a^2}$，结合 $k_1k_2=-\frac{1}{2}$，$k_3=\frac{2}{3}k_1$，可得 $\frac{2}{3}k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$，$\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，$\therefore\frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，$\therefore e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14. 9 ［解析］如图，不妨设 $A(n^2,2n)(n>0)$，直线 $AB:x=my+2$，由 $\begin{cases}x=my+2,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-8=0$，所以 $y_A\cdot y_B=-8$，则 $B\left(\frac{4}{n^2},-\frac{4}{n}\right)$. 设直线 $AM:x=ty+1$，由 $\begin{cases}x=ty+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4ty-4=0$，所以 $y_A\cdot y_M=-4$，则 $M\left(\frac{1}{n^2},-\frac{2}{n}\right)$，同理可得 $N\left(\frac{n^2}{4},n\right)$，所以 $|AM|=\frac{1}{n^2}+n^2+p=\frac{1}{n^2}+n^2+2$，$|BN|=\frac{4}{n^2}+\frac{n^2}{4}+p=\frac{4}{n^2}+\frac{n^2}{4}+2$，则 $|AM|+|BN|=\frac{1}{n^2}+n^2+2+\frac{4}{n^2}+\frac{n^2}{4}+2=\frac{5}{n^2}+\frac{5n^2}{4}+4\geqslant2\sqrt{\frac{5}{n^2}\times\frac{5n^2}{4}}+4=9$，当且仅当 $n=\sqrt{2}$ 时取等号.



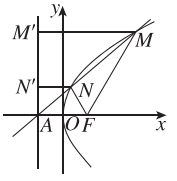
重点强化练（十六）

1. D ［解析］由题得直线方程为 $y=x+3$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=x+3,\end{cases}$ 得 $y^2-2py+6p=0$，令 $\Delta>0$，则 $p>6$，所以 $y_1+y_2=2p$，$y_1\cdot y_2=6p$，由 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$，得 $2\sqrt{14}=\sqrt{1+1^2}\times\sqrt{4p^2-24p}$，可得 $p=7$，故选 D.

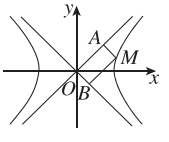
2. A ［解析］若 $AG\perp BG$，则 G 在以 AB 为直径的圆上且不与 A，B 中任意一点重合，故充分性成立；当 $x_0=2$ 时，以 AB 为直径的圆与椭圆 E 的公共点为 A，B，E 上不存在点 G 使 $AG\perp BG$，故必要性不成立. 故选 A.

3. A ［解析］设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2\times1=2$，$y_1+y_2=2\times(2\times1+1)=6$，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$. 因为 A，B 两点均在双曲线 C 上，所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 所以 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，则 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=2\times\frac{6}{2}=6$，即 $\frac{b}{a}=\sqrt{6}$，故双曲线 C 的渐近线方程是 $y=\pm\sqrt{6}x$. 故选 A.

4. A ［解析］根据题意可得，抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，则 $A(-1,0)$. 设直线 MN 的方程为 $y=k(x+1)$，$k>0$，由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 可得 $k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$，则 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^2\cdot k^2=-16(k-1)(k+1)>0$，解得 $-1<k<1$，故 $0<k<1$. 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$0<x_2<x_1$，则 $x_1+x_2=\frac{4-2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$. 如图，过 M，N 分别作准线的垂线，垂足分别为 M'，N'，由抛物线的定义知 $|FM|=|MM'|$，$|FN|=|NN'|$，又 $|FM|=3|FN|$，所以 $|MM'|=3|NN'|$，即 $1+x_1=3(1+x_2)$，得 $x_1=2+3x_2$，所以 $x_1x_2=(2+3x_2)x_2=1$，又 $0<x_2<x_1$，所以 $x_2=\frac{1}{3}$，$x_1=3$，所以 $x_1+x_2=\frac{4-2k^2}{k^2}=3+\frac{1}{3}$，又 $k>0$，所以 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.



5. B ［解析］如图，双曲线 $C:x^2-y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 为等轴双曲线，两条渐近线的夹角为 90°，则四边形 $OAMB$ 为矩形. 设点 $M(m,n)$，则 m^2-



$n^2=4$，点 $M(m,n)$ 到渐近线 $x-y=0$ 的距离为 $\frac{|m-n|}{\sqrt{2}}$，点 $M(m,n)$ 到渐近线 $x+y=0$ 的距离为 $\frac{|m+n|}{\sqrt{2}}$，则四边形 $OAMB$ 的面积为 $\frac{|m-n|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|m+n|}{\sqrt{2}}=\frac{|m^2-n^2|}{2}=2$. 故选 B.

6. A ［解析］如图，设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，由 $y=\frac{1}{4}x^2$ 求导得 $y'=\frac{1}{2}x$，则直线 PA 的方程为 $y=\frac{x_1}{2}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{4}$，即 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$，同理可得直线 PB 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$，联立直线 PA 与直线 PB 的方程，可得 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$，由点 P 在直线 $y=-1$ 上，得 $\frac{x_1x_2}{4}=-1$，即 $x_1x_2=-4$，故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_1^2-x_1x_2}{4}\right)\cdot\left(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{x_2^2-x_1x_2}{4}\right)=-\frac{(x_1-x_2)^2}{4}-\frac{x_1x_2(x_1-x_2)^2}{16}=-\frac{(x_1-x_2)^2}{4}-\frac{-4(x_1-x_2)^2}{16}=0$. 故选 A.

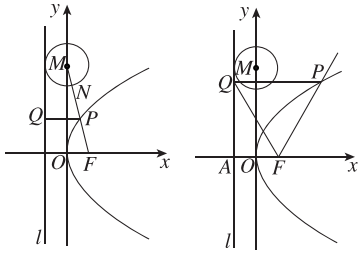
7. C ［解析］因为点 $A(4,4)$ 在抛物线上，所以 $16=8p$，解得 $p=2$，所以抛物线的方程为 $y^2=4x$，则焦点为 $F(1,0)$. 如图，设反射光线与抛物线的另一个交点为 B. 因为反射光线经过点 $A(4,4)$ 及焦点 $F(1,0)$，所以 $k_{AB}=k_{AF}=\frac{4-0}{4-1}=\frac{4}{3}$，所以反射光线所在直线 AB 的方程为 $y=\frac{4}{3}(x-1)$. 由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=\frac{4}{3}(x-1),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{4},\\y=-1,\end{cases}$ 所以 $B\left(\frac{1}{4},-1\right)$. 由两点间的距离公式可得 $|AB|=\sqrt{\left(4-\frac{1}{4}\right)^2+(4+1)^2}=\frac{25}{4}$. 故选 C.

8. B ［解析］如图，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$，线段 AB 的中点为 $G(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{12}=1,\\\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{12}=1,\end{cases}$ 两式相减得 $\frac{x_2^2-x_1^2}{16}+\frac{y_2^2-y_1^2}{12}=0$，所以 $\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{4}=-\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{3}$，所以 $\frac{2x_0(x_2-x_1)}{4}=-\frac{2y_0(y_2-y_1)}{3}$，所以 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{3x_0}{4y_0}$. 因为 $M(m,0)$，$|MA|=|MB|$，所以 $MG\perp AB$，当 $x_0=0$ 时，可得 $m=0$，当 $x_0\neq0$ 时，可得 $\frac{y_0}{x_0-m}=\frac{4y_0}{3x_0}$，所以 $x_0=4m$，因为 $-4<x_0<4$ 且 $x_0\neq0$，所以 $-4<4m<4$ 且 $4m\neq0$，所以 $-1<m<1$ 且 $m\neq0$. 综上，实数 m 的取值范围为 $(-1,1)$. 故选 B.

9. ABD ［解析］因为双曲线的方程为 $4x^2-y^2=1$，所以其渐近线方程为 $y=\pm2x$，又因为直线 $l:y=kx+1$ 过定点 $(0,1)$，所以若 $k=2$，则 l 与 C 有且只有一个公共点，故 A 正确；由 $\begin{cases}4x^2-y^2=1,\\y=kx+1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(4-k^2)x^2-2kx-2=0$，当 $k=2\sqrt{2}$ 时，$4-k^2\neq0$，且 $\Delta=(-2k)^2+8(4-k^2)=0$，所以 l 与 C 相切，所以若 $k=2\sqrt{2}$，则 l 与 C 有且只有一个公共点，故 B 正确；若 l 与 C 有两个公共点，则 $\begin{cases}4-k^2\neq0,\\\Delta=(-2k)^2+8(4-k^2)>0,\\k>0,\end{cases}$ 解得 $2<k<2\sqrt{2}$ 或 $0<k<2$，故 C 错误；若 l 与 C 没有公共点，则 $\begin{cases}4-k^2\neq0,\\\Delta=(-2k)^2+8(4-k^2)<0,\\k>0,\end{cases}$ 解得 $k>2\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.

10. AC ［解析］由抛物线 $C:x^2=4y$，可得焦点为 $F(0,1)$，则直线 $y=x+1$ 过抛物线 C 的焦点，由 $\begin{cases}y=x+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2-6y+1=0$，显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，可得 $y_1+y_2=6$，$y_1y_2=1$. 对于 A，由抛物线的定义可得 $|AB|=y_1+y_2+p=6+2=8$，所以 A 正确；对于 B，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(y_1-1)(y_2-1)+y_1y_2=2y_1y_2-(y_1+y_2)+1=-3\neq0$，所以 OA 与 OB 不垂直，所以 B 错误；对于 C，由 $y^2-6y+1=0$，解得 $y=3\pm2\sqrt{2}$，不妨令 $y_1=3+2\sqrt{2}$，$y_2=3-2\sqrt{2}$，由抛物线的定义可得 $|AF|=4+2\sqrt{2}$，$|BF|=4-2\sqrt{2}$，则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{4+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=1$，所以 C 正确；对于 D，线段 AB 的中点到 x 轴的距离为 $\frac{y_1+y_2}{2}=3$，所以 D 错误. 故选 AC.

11. ABC ［解析］对于 A，由圆 $M:x^2+(y-8)^2=4$，得圆心为 $M(0,8)$，半径 $r=2$，因为准线 $l:x=-\frac{p}{2}$ 与圆 $M:x^2+(y-8)^2=4$ 相切，所以 $\frac{p}{2}=r=2$，可得 $p=4$，所以 $F(2,0)$，故 A 正确；对于 B，根据抛物线的定义知 $|PQ|=|PF|$，可得 $|PN|+|PQ|=|PN|+|PF|$，如图①，当 M,N,P,F 四点共线，且 N,P 在线段 MF 上时，$|PN|+|PF|$ 取得最小值，最小值为 $|FM|-r=\sqrt{2^2+(-8)^2}-2=2\sqrt{17}-2$，故 B 正确；对于 C，若 $|PM|=|PQ|$，则 $|PM|=|PF|$，作线段 MF 的中垂线 l_1，根据题意知 $M(0,8)$，$F(2,0)$，设 B 为线段 MF 的中点，则 $B(1,4)$，直线 l_1 的斜率为 $\frac{1}{4}$，根据点斜式可知直线 l_1 的方程为 $y-4=\frac{1}{4}(x-1)$，与 $y^2=8x$ 联立，得 $y^2-32y+120=0$，则 $\Delta=32^2-4\times120=544>0$，可知该方程有两个解，所以存在两个点 P，使得 $|PM|=|PQ|$，故 C 正确；对于 D，如图②，设准线 l 与 x 轴交于点 A，根据 $\triangle PFQ$ 为正三角形，可得 $\angle PQF=60°$，则 $\angle AQF=30°$，又 $|FA|=4$，所以 $|QA|=4\sqrt{3}$，又圆 M 与 y 轴的交点为 $(0,6)$，$(0,10)$，$6<|QA|=4\sqrt{3}<10$，所以圆 M 与直线 PQ 相交，故 D 错误. 故选 ABC.



① ②

12. $y^2=8x$ ［解析］设点 A,B 的横坐标分别为 x_1,x_2，由线段 AB 的中点到 y 轴的距离是 2，得 $\frac{x_1+x_2}{2}=2$，即 $x_1+x_2=4$，由直线 AB 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点，得 $|AB|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=4+p=8$，解得 $p=4$，所以此抛物线的方程是 $y^2=8x$.

13. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $(x+\sqrt{5})^2+y^2=1$（或 $(x-\sqrt{5})^2+y^2=1$） ［解析］双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 双曲线的一条渐近线的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$，故焦点 $(-\sqrt{5},0)$ 与 $(\sqrt{5},0)$ 到渐近线 $x-2y=0$ 的距离均为 $\frac{|\sqrt{5}-2\times0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1$，则以 C 的一个焦点为圆心，且与双曲线 C 的渐近线相切的圆的方程为 $(x+\sqrt{5})^2+y^2=1$ 或 $(x-\sqrt{5})^2+y^2=1$.

14. 3 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ［解析］由题意知点 M 在双曲线 C 的右支上，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，设 $\frac{|MF_1|}{|MF_2|}=\mu$，$\mu>1$，点 $M(x_0,y_0)$，则 $|MF_1|^2=\mu^2|MF_2|^2$，即 $(x_0+c)^2+y_0^2=\mu^2[(x_0-c)^2+y_0^2]$，则 $(\mu^2-1)x_0^2+(\mu^2-1)y_0^2-2c(\mu^2+1)x_0+(\mu^2-1)c^2=0$，即 $x_0^2+y_0^2-\frac{2c(\mu^2+1)}{\mu^2-1}x_0+c^2=0$，又 $x_0^2+y_0^2-\frac{5c}{2}x_0+c^2=0$，所以 $2(\mu^2+1)=\frac{5}{2}(\mu^2-1)$，所以 $\mu^2=9$，即 $\mu=3$，所以 $\frac{|MF_1|}{|MF_2|}=3$. 因为点 M 在双曲线的右支上，所以 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，又 $\frac{|MF_1|}{|MF_2|}=3$，所以 $|MF_1|=3a$，$|MF_2|=a$. 由对称性可得 O 为线段 MT 的中点，$|F_1T|=|MF_2|=a$.

由 $\cos\angle F_1OM+\cos\angle F_1OT=\frac{c^2+|OM|^2-9a^2}{2\times|OM|\times c}+\frac{c^2+|OT|^2-a^2}{2\times|OT|\times c}=0$，得 $c^2=5a^2-|OM|^2$，在 $\triangle MF_1T$ 中，$|MT|^2=a^2+9a^2-2\times a\times3a\times\cos\angle MF_1T=10a^2-6a^2\cos\angle MF_1T$，所以 $c^2=5a^2-\frac{5a^2-3a^2\cos\angle MF_1T}{2}=\frac{5a^2+3a^2\cos\angle MF_1T}{2}$，由 $\angle MF_1T\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，得 $\cos\angle MF_1T\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，故 $\frac{5a^2+3a^2\cos\angle MF_1T}{2}\in\left[\frac{13a^2}{4},\frac{10+3\sqrt{2}}{4}a^2\right]$，所以 $\frac{c^2}{a^2}$ 的最小值为 $\frac{13}{4}$，故

双曲线 C 的离心率的最小值为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

15. 解:(1)因为双曲线 C 的虚轴长为 2,离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $2b=2$,$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

又 $c^2=a^2+b^2$,所以 $a^2=3$,$b^2=1$,$c^2=4$,所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$,左、右焦点的坐标分别为 $(-2,0)$,$(2,0)$.

(2)由(1)知 $F(2,0)$,易得直线 AB 的斜率存在,设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$,$A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,

由 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1-3k^2)x^2+12k^2x-12k^2-3=0$,所以 $x_A+x_B=\frac{12k^2}{3k^2-1}$,$x_Ax_B=\frac{12k^2+3}{3k^2-1}$,

因为线段 AB 的中点的横坐标为 3,所以 $x_A+x_B=\frac{12k^2}{3k^2-1}=6$,

解得 $k^2=1$,所以 $x_Ax_B=\frac{15}{2}$,则 $(x_A-x_B)^2=(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B=6^2-4\times\frac{15}{2}=6$,

则 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_A-x_B)^2}=\sqrt{2\times6}=2\sqrt{3}$.

16. 解:(1)由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a-c=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

可得 $\begin{cases}a=2,\\ c=1,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $C(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为 $AB/\!/CF_1$,所以 $|CF_1|:|AB|=|F_1F_2|:|F_2A|=2:1$,所以 $y_1=-2y_2$①.

设直线 l 的方程为 $x=my+1$,由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,则 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},\\ y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4},\end{cases}$ 把①式代入上式,得 $\begin{cases}-y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},\\ -2y_2^2=-\frac{9}{3m^2+4},\end{cases}$ 得 $\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2}=\frac{9}{2(3m^2+4)}$,

解得 $m=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以直线 l 的方程为 $x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y-1=0$ 或 $x-\frac{2\sqrt{5}}{5}y-1=0$.

17. 解:(1)因为椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,所以 $c=1$,又因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$,所以 $a=2$,所以 $b^2=a^2-c^2=3$,所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)证明:由 $M_0(1,4)$,$F_1(-1,0)$ 得直线 F_1M_0 的斜率为 2,线段 F_1M_0 的中点坐标为 $(0,2)$,所以线段 F_1M_0 的垂直平分线的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=-\frac{1}{2}x+2,\end{cases}$ 得 $x^2-2x+1=0$,解得 $x=1$,故 $y=\frac{3}{2}$,所以线段 F_1M_0 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(3)方法一:设 $M(x_0,y_0)$,当 $y_0=0$ 时,线段 F_1M 的垂直平分线的方程为 $x=\frac{x_0-1}{2}$,若线段 F_1M 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点,则 $\frac{x_0-1}{2}=\pm2$,解得 $x_0=5$ 或 -3.

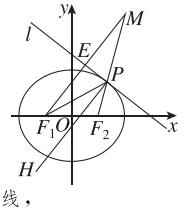
当 $y_0\neq0$ 时,线段 F_1M 的垂直平分线的方程为 $y=-\frac{x_0+1}{y_0}\left(x-\frac{x_0-1}{2}\right)+\frac{y_0}{2}=-\frac{x_0+1}{y_0}x+\frac{x_0^2+y_0^2-1}{2y_0}$.

由 $\begin{cases}y=-\frac{x_0+1}{y_0}x+\frac{x_0^2+y_0^2-1}{2y_0},\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得 $3x^2+4\left[\frac{(x_0^2+y_0^2-1)^2}{4y_0^2}-\frac{(x_0+1)(x_0^2+y_0^2-1)}{y_0^2}x+\frac{(x_0+1)^2}{y_0^2}x^2\right]=12$,即 $\left[3+\frac{4(x_0+1)^2}{y_0^2}\right]x^2-\frac{4(x_0+1)(x_0^2+y_0^2-1)}{y_0^2}x+\frac{(x_0^2+y_0^2-1)^2}{y_0^2}-12=0$.因为线段 F_1M 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点,

所以 $\Delta=\frac{16(x_0+1)^2(x_0^2+y_0^2-1)^2}{y_0^4}-4\left[3+\frac{4(x_0+1)^2}{y_0^2}\right]\left[\frac{(x_0^2+y_0^2-1)^2}{y_0^2}-12\right]=0$,即 $\frac{3(x_0^2+y_0^2-1)^2}{y_0^2}-36-\frac{48(x_0+1)^2}{y_0^2}=0$,即 $y_0^4+(2x_0^2-14)y_0^2+x_0^4-18x_0^2-32x_0-15=0$,

即 $y_0^4+(2x_0^2-14)y_0^2+(x_0+1)^2(x_0+3)(x_0-5)=0$,可得 $y_0^4+(2x_0^2-14)y_0^2+(x_0^2+2x_0+1)(x_0^2-2x_0-15)=0$,即 $(y_0^2+x_0^2+2x_0+1)(y_0^2+x_0^2-2x_0-15)=0$.因为 $x_0^2+y_0^2+2x_0+1=(x_0+1)^2+y_0^2>0$,所以 $x_0^2+y_0^2-2x_0-15=0$.又点 $(5,0)$,$(-3,0)$ 的坐标也满足上式,故点 M 的轨迹为圆,该圆的方程为 $x^2+y^2-2x-15=0$,即 $(x-1)^2+y^2=16$.

方法二:设线段 F_1M 的垂直平分线 l 与 C 恰有一个公共点 P,则当点 P 不是椭圆 C 长轴的端点时,如图,线段 F_1M 的垂直平分线 l 即为椭圆 C 在点 P 处的切线,



也为 $\angle F_1PM$ 的平分线,

设线段 F_1M 的中点为 E,作 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PH,根据椭圆的光学性质得 $PH\perp l$,所以 $\angle F_1PE+\angle F_1PH=90°$,则 $\angle F_2PH+\angle EPM=90°$,

故 $\angle F_2PF_1+\angle F_1PM=180°$,

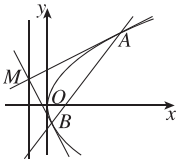
所以 M,P,F_2 三点共线,所以 $|MF_2|=|MP|+|PF_2|=|PF_1|+|PF_2|=4$,

所以点 M 的轨迹是以 F_2 为圆心,4 为半径的圆(除去点 $(5,0)$,$(-3,0)$).

当点 P 是椭圆 C 长轴的端点时,点 M 为 $(5,0)$ 或 $(-3,0)$,满足 $|MF_2|=4$.

综上,点 M 的轨迹为圆,该圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=16$.

18. 解:(1)如图,当点 M 的坐标为 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 时,设过点 M 的切线方程为 $y-\frac{3}{2}=k(x+1)(k\neq0)$,



与 $y^2=4x$ 联立,得 $y-\frac{3}{2}=k\left(\frac{y^2}{4}+1\right)$,整理得 $\frac{k}{4}y^2-y+k+\frac{3}{2}=0$(*),

令 $\Delta=1-4\cdot\frac{k}{4}\left(k+\frac{3}{2}\right)=0$,解得 $k=-2$ 或 $k=\frac{1}{2}$,分别代入(*)得 $y=-1$ 或 $y=4$,故 $A(4,4)$,$B\left(\frac{1}{4},-1\right)$,

故直线 MA 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+2$,直线 MB 的方程为 $y=-2x-\frac{1}{2}$.

由 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-1$,得直线 MA 与直线 MB 互相垂直,则过 M,A,B 三点的圆的直径为线段 AB.

设该圆上任意一点 P 的坐标为 (x,y),则 $\overrightarrow{AP}=(x-4,y-4)$,$\overrightarrow{BP}=\left(x-\frac{1}{4},y+1\right)$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-4)\left(x-\frac{1}{4}\right)+(y-4)(y+1)=0$,

从而过 M,A,B 三点的圆的一般方程为 $x^2+y^2-\frac{17}{4}x-3y-3=0$(圆的标准方程为 $\left(x-\frac{17}{8}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{625}{64}$).

(2)证明:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

设切线 MA 的方程为 $y-y_1=t(x-x_1)$,与 $y^2=4x$ 联立,得 $\frac{t}{4}y^2-y-tx_1+y_1=0$,则 $1-4\cdot\frac{t}{4}(-tx_1+y_1)=0$,所以 $t=\frac{2}{y_1}$,故切线 MA 的方程为 $y-y_1=\frac{2}{y_1}(x-x_1)$,

即 $y_1y=2(x+x_1)$,同理可得切线 MB 的方程为 $y_2y=2(x+x_2)$,

又切线 MA,MB 都过点 $M(x_0,y_0)$,所以 $y_1y_0=2(x_0+x_1)$,$y_2y_0=2(x_0+x_2)$,即点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 的坐标均满足方程 $y_0y=2(x_0+x)$,

故直线 AB 的方程为 $y_0y=2(x_0+x)$.

又 M 为直线 $l:x=-m(m>0)$ 上任意一点,

故直线 AB 的方程为 $y_0y=2(x-m)$,从而直线 AB 恒过定点 $(m,0)$.

(3)由(2)知 y_1,y_2 是方程 $y_0y=2\left(x_0+\frac{y^2}{4}\right)$ 的两实根,故 $\begin{cases}y_1+y_2=2y_0,\\ y_1y_2=4x_0,\end{cases}$

又 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$,$x_2=\frac{y_2^2}{4}$,$x_0=-m$,

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)=4m^2+my_0^2-4m-y_0^2=(m-1)(y_0^2+4m)$.

①当 $m=1$ 时,$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$,直线 l 上任意一点 M 均满足 $MA\perp MB$,即 $\triangle MAB$ 为直角三角形;

②当 $0<m<1$ 时,$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}<0$,$\angle AMB>\frac{\pi}{2}$,即 $\triangle MAB$ 不可能为直角三角形;

③当 $m>1$ 时,$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}>0$,$\angle AMB<\frac{\pi}{2}$,只需考虑 $y_0\neq0$ 时的情况,

因为 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{2}{y_0}$,$k_{MA}=\frac{2}{y_1}=\frac{2}{y_0+\sqrt{y_0^2-4x_0}}$,所以 $k_{AB}\cdot k_{MA}=\frac{2}{y_0}\cdot\frac{2}{y_0+\sqrt{y_0^2-4x_0}}$,

若 $k_{AB}\cdot k_{MA}=-1$，

则 $\dfrac{2}{y_0}\cdot\dfrac{2}{y_0+\sqrt{y_0^2-4x_0}}=-1$，整理得 $(x_0+2)y_0^2=-4$，

又因为 $x_0=-m$，所以 $(m-2)y_0^2=4$，

方程 $(m-2)y_0^2=4$ 有解的充要条件是 $m>2$，经验证，当 $m>2$，$y_0<0$ 时，有 $MA\perp AB$（$MB\perp AB$ 的情况同理），

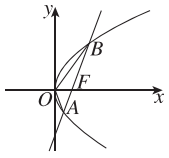
即当 $m>2$ 时，直线 l 上存在两个点 M，使 $\triangle MAB$ 为直角三角形.

综上所述，当 $m=1$ 时，直线 l 上存在无数个 M，使 $\triangle MAB$ 为直角三角形；

当 $m>2$ 时，直线 l 上存在两个点 M，使 $\triangle MAB$ 为直角三角形；

当 $0<m<1$ 或 $1<m\leqslant 2$ 时，直线 l 上不存在点 M，使 $\triangle MAB$ 为直角三角形.

19. 解：(1) 如图，设直线 AB：$x=ty+\dfrac{p}{2}$，



由 $\begin{cases}y^2=2px,\\ x=ty+\dfrac{p}{2},\end{cases}$ 得

$y^2-2pty-p^2=0$，

则 $\Delta=(-2pt)^2+4p^2>0$，

$y_Ay_B=-p^2$，$y_A+y_B=2pt$.

由题可知 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|OF||y_A-y_B|=\dfrac{p}{4}\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=\dfrac{p}{4}\sqrt{(2pt)^2+4p^2}=\dfrac{p^2}{2}\sqrt{t^2+1}\geqslant\dfrac{p^2}{2}$，

因为 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 $\dfrac{1}{2}$，且 $p>0$，所以 $\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{2}$，即 $p=1$.

(2) 设 $A_n(x_{an},y_{an})$，$B_n(x_{bn},y_{bn})$，$A(x_a,y_a)$，$B(x_b,y_b)$，当直线 AA_n 的斜率不存在时，直线 AA_n 的方程为 $x=x_a$，当直线 AA_n 的斜率存在时，

由题可知 $y_{an}^2=2x_{an}$，$y_a^2=2x_a$，两式作差可得 $(y_{an}+y_a)(y_{an}-y_a)=2(x_{an}-x_a)$，即 $\dfrac{y_{an}-y_a}{x_{an}-x_a}=\dfrac{2}{y_{an}+y_a}$，

所以 $k_{AA_n}=\dfrac{y_{an}-y_a}{x_{an}-x_a}=\dfrac{2}{y_{an}+y_a}$，

所以直线 AA_n 的方程为 $y-y_a=\dfrac{2}{y_{an}+y_a}(x-x_a)$，整理得 $(y_{an}+y_a)y=2x+y_{an}y_a$，当直线 AA_n 的斜率不存在时，直线 AA_n 的方程满足上式.

同理得直线 BB_n 的方程为 $(y_{bn}+y_b)y=2x+y_{bn}y_b$.

令 $y=0$，可得 $\begin{cases}-2x_n=y_{an}y_a,\\ -2x_n=y_{bn}y_b,\end{cases}$ 易知直线 AB 的方程为 $(y_a+y_b)y=2x+y_ay_b$，

因为直线 AB 过焦点 $F\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，所以有 $y_ay_b=-1$，直线 A_nB_n 的方程为 $(y_{an}+y_{bn})y=2x+y_{an}y_{bn}$，

令 $y=0$，可得 $-2x_{n+1}=y_{an}y_{bn}$，

由 $\begin{cases}-2x_n=y_{an}y_a,\\ -2x_n=y_{bn}y_b,\end{cases}$ 可知 $(-2x_n)^2=y_{an}y_{bn}y_ay_b$，因为 $y_ay_b=-1$，$-2x_{n+1}=y_{an}y_{bn}$，所以 $x_{n+1}=2x_n^2$，

两边取对数可得 $\log_2x_{n+1}=2\log_2x_n+1$，即 $\log_2x_{n+1}+1=2(\log_2x_n+1)$，

由题可知 $x_1=1$，所以数列 $\{\log_2x_n+1\}$ 是以 $\log_2x_1+1=1$ 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $\log_2x_n+1=2^{n-1}$，

故 $x_n=2^{2^{n-1}-1}$.

(3) 不存在，理由如下：

假设存在，则一定有 $2x_{n+1}=x_n+x_{n+2}$，

因为 $x_n=2^{2^{n-1}-1}$，所以 $2^{2^n}=2^{2^{n-1}-1}+2^{2^{n+1}-1}=2^{2^n}(2^{2^{n-1}-1-2^n}+2^{2^{n+1}-1-2^n})$，

化简得 $1=2^{-2^{n-1}-1}+2^{2^n-1}$，显然 $2^{-2^{n-1}-1}>0$，$2^{2^n-1}>1$，所以 $2^{-2^{n-1}-1}+2^{2^n-1}>1$，所以 $1=2^{-2^{n-1}-1}+2^{2^n-1}$ 在 $n\in\mathbf{N}^*$ 上无解，故不存在连续的三项（按原顺序）构成等差数列.

重点强化练（十七）

1. D ［解析］由题意知，甲得 3 分有两种情况：甲赢一局输两局，甲得分为 3 分；甲、乙平局三次，甲得分为 3 分. 所以 $X=3$ 表示甲赢一局输两局或甲、乙平局三次. 故选 D.

2. A ［解析］由分布列的性质可知 $a+\dfrac{1}{3}+5a+\dfrac{1}{6}=1$，解得 $a=\dfrac{1}{12}$，由 $Y=2X+1$ 知，$Y\geqslant 5$ 等价于 $X\geqslant 2$，由表可知 $P(X\geqslant 2)=\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{12}$. 故选 A.

3. D ［解析］根据题意，由全概率公式可得 $P(M)=P(A)P(M|A)+P(B)P(M|B)=0.5\times0.8+0.5\times0.7=0.75$. 故选 D.

4. B ［解析］依题意得 $P(X<80)=\dfrac{1500}{8000}=\dfrac{3}{16}$，故 $P(95\leqslant X\leqslant 110)=P(80\leqslant X\leqslant 95)=P(X\leqslant 95)-P(X<80)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{16}=\dfrac{5}{16}$. 故选 B.

5. D ［解析］记抽取黄球的个数为 X，则 X 服从超几何分布，其分布列为 $P(X=k)=\dfrac{C_3^kC_7^{2-k}}{C_{10}^2}$，$k=0,1,2$，所以 $P(X\geqslant 1)=P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}+\dfrac{C_3^2C_7^0}{C_{10}^2}=\dfrac{8}{15}$（或 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\dfrac{C_3^0C_7^2}{C_{10}^2}=\dfrac{8}{15}$）. 故选 D.

6. C ［解析］由于甲、乙、丙三人的水平相当，所以第二局乙或丙担任裁判的概率都是 $\dfrac{1}{2}$. 若第二局是乙担任裁判，则第三局甲或丙担任裁判的概率都是 $\dfrac{1}{2}$，若第二局是丙担任裁判，则第三局甲或乙担任裁判的概率都是 $\dfrac{1}{2}$. 由全概率公式可知，若第一局甲担任裁判，则第三局甲还担任裁判的概率 $P=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

7. B ［解析］记甲挑战成功为事件 A，乙挑战成功为事件 B，则 $P(A)=\dfrac{4}{15}$，$P(B)=\dfrac{2}{15}$，$P(A\cup B)=1-\dfrac{7}{10}=\dfrac{3}{10}$，由概率加法公式知 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，可得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\dfrac{4}{15}+\dfrac{2}{15}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{10}$，则在甲挑战成功的条件下，乙挑战成功的概率为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}}=\dfrac{3}{8}$.

8. D ［解析］由题意知 X 的可能取值为 0,1,2,3,4,5，且 X 的取值表示 1 出现的次数. 由二项分布的定义可得 $X\sim B\left(5,\dfrac{2}{3}\right)$，故 $P(X=1)=C_5^1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{10}{243}$，故 A 错误；因为 $X\sim B\left(5,\dfrac{2}{3}\right)$，所以 $E(X)=5\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$，故 B 错误；$D(X)=5\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{9}$，故 C 错误；五位二进制数 10100 与 10001 出现的概率均为 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{4}{243}$，故 D 正确. 故选 D.

9. AD ［解析］对于 A 选项，参与评价的观众中有 97.6% 的评价不低于二星，则 24.0%+32.9%+m+8.7%=97.6%，所以 $m=32\%$，故 A 正确；对于 B 选项，随机抽取 100 名观众，可能有 100×24.0%=24（人）评价五星，但不是一定的，故 B 错误；对于 C 选项，因为 $A\cap B=A$，所以 $P(B|A)=1$，故 C 错误；对于 D 选项，根据互斥事件和对立事件的定义可知，事件“至多 1 人评价五星”与事件“恰有 2 人评价五星”是互斥且不对立事件，故 D 正确. 故选 AD.

10. CD ［解析］由已知得 $\begin{cases}\dfrac{2-a}{3}\geqslant 0,\\ \dfrac{a}{3}\geqslant 0\end{cases}$ 且 $\begin{cases}\dfrac{1-a}{2}\geqslant 0,\\ \dfrac{a}{2}\geqslant 0,\end{cases}$ 又 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$，所以 $0<a<1$. 对于 A，因为 X，Y 的取值互不影响，所以 $P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)$，若 $P(X=1,Y=0)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(X=1)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{a}{3}$，所以 $a=\dfrac{3}{2}$，不符合条件，故 A 错误；对于 B，$E(X)=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{a}{3}=\dfrac{a-1}{3}$，$E(Y)=\dfrac{1-a}{2}+2\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a+1}{2}$，$E(Y)-E(X)=\dfrac{5+a}{6}<1$，故 B 错误；对于 C，设 $Y\sim B(2,p)$，则 $(1-p)^2=\dfrac{1}{2}$，得 $p=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，由 $\dfrac{a}{2}=p^2$，可得 $a=3-2\sqrt{2}$，故 C 正确；对于 D，$P(X+Y=-1)=\dfrac{1}{6}$，$P(X+Y=0)=\dfrac{3-2a}{6}$，$P(X+Y=1)=\dfrac{a^2-a+2}{6}$，$P(X+Y=2)=\dfrac{3a-2a^2}{6}$，$P(X+Y=3)=\dfrac{a^2}{6}$，所以 $E(X+Y)=\dfrac{5a+1}{6}$，又 $E(X)+E(Y)=\dfrac{a-1}{3}+\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{5a+1}{6}$，所以 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$，故 D 正确. 故选 CD.

11. CD ［解析］由题意知 $X\sim B(5,0.8)$，则 $E(X)=5\times0.8=4$，$D(X)=5\times0.8\times0.2=0.8$，所以 $D(2X+1)=4\times0.8=3.2$，故选项 A 错误；$Y\sim N(4,1)$，则 $E(Y)=4$，$D(Y)=1$，又 $E(X)=4$，$D(X)=0.8$，所以 $E(X)=E(Y)$，$D(X)<D(Y)$，故选项 B 错误；$P(X\leqslant 4)=1-P(X=5)=1-C_5^5\cdot0.8^5=0.672\,32$，又 $P(Y\geqslant 4)=0.5$，所以 $P(X\leqslant 4)>P(Y\geqslant 4)$，故选项 C 正确；$X\sim B(5,0.8)$，则 $P(X=k)=C_5^k\cdot0.8^k\cdot0.2^{5-k}$，令 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\ P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}C_5^k\cdot0.8^k\cdot0.2^{5-k}\geqslant C_5^{k+1}\cdot0.8^{k+1}\cdot0.2^{4-k},\\ C_5^k\cdot0.8^k\cdot0.2^{5-k}\geqslant C_5^{k-1}\cdot0.8^{k-1}\cdot0.2^{6-k},\end{cases}$ 解得 $3.8\leqslant k\leqslant 4.8$，又 $k\in\mathbf{Z}$，所以当 $X=4$

13956356061

时概率最大，易知 $P(X=0)<P(X=1)<P(X=2)<P(X=3)<P(X=4)>P(X=5)$，即 $P(X=k)$ 随 k 的增大先增大后减小，故 D 选项正确. 故选 CD.

12. $\frac{7}{26}$ ［解析］由题意可得

$$\begin{cases}-a+b+2a+b+3a+b=1,\\-(-a+b)+2(2a+b)+3(3a+b)=3,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=\frac{5}{26},\\b=\frac{1}{13},\end{cases}$ 所以 $a+b=\frac{7}{26}$.

13. $\frac{3}{5}$　$\frac{1}{2}$ ［解析］方法一：甲从五个活动中选三个的可能情况有 ABC，ABD，ABE，ACD，ACE，ADE，BCD，BCE，BDE，CDE，共 10 种，其中甲选到 A 活动的可能情况有 ABC，ABD，ABE，ACD，ACE，ADE，共 6 种，故甲选到 A 活动的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. 乙选了 A 活动有 ABC，ABD，ABE，ACD，ACE，ADE 共 6 种可能情况，其中选到 B 活动有 ABC，ABD，ABE 共 3 种可能情况，故已知乙选了 A 活动，他选到 B 活动的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

方法二：甲选到 A 活动的概率为 $\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$. 设 $M=$“乙选到 A 活动”，$N=$“乙选到 B 活动”，则已知乙选了 A 活动，他选到 B 活动的概率为 $P(N\mid M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{\frac{C_3^1}{C_5^3}}{\frac{C_4^2}{C_5^3}}=\frac{1}{2}$.

14. $\frac{77}{300}$ ［解析］若两次取球后，B 盒中恰有 7 个球，则两次取球均为乙获胜. 若第一次取球甲取到黑球，乙取到白球，其概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，则第一次取球后 A 盒中有 2 个黑球和 3 个白球，B 盒中有 4 个黑球和 2 个白球，第二次取到一个白球一个黑球的概率为 $\frac{2}{5}\times\frac{2}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{15}$，此时 B 盒中恰有 7 个球的概率为 $\frac{1}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{75}$；若第一次取球甲取到白球，乙取到黑球，其概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$，则第一次取球后 A 盒中有 3 个黑球和 2 个白球，B 盒中有 3 个黑球和 3 个白球，第二次取到一个白球一个黑球的概率为 $\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，此时 B 盒中恰有 7 个球的概率为 $\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$. 所以 B 盒中恰有 7 个球的概率为 $\frac{8}{75}+\frac{3}{20}=\frac{77}{300}$.

15. 解：(1)设“汤姆的选择中有 200 米服务”为事件 A，“汤姆的选择中有 1500 米服务”为事件 B，

则 $P(A)=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

所以 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$.

(2)X 的取值可能为 0，1，2，3，

且 $P(X=0)=\frac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，

$P(X=1)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，

$P(X=2)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=3)=\frac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.

16. 解：(1)由于 $X\sim N(70,225)$，故 $\mu=70$，$\sigma=15$，故 $\mu+\sigma=85$，所以 $P(X>85)=\frac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}\approx\frac{1-0.683}{2}$，

故估计进入决赛的人数为 $600\times\frac{1-0.683}{2}\approx95$.

(2)甲同学每个单选题的得分 Y_1 的数学期望 $E(Y_1)=10\times\frac{3}{5}+0\times\frac{2}{5}=6$(分)，甲同学每个多选题的得分 Y_2 的数学期望 $E(Y_2)=15\times\frac{1}{5}+5\times\frac{3}{5}+0\times\frac{1}{5}=6$(分)，因此甲同学决赛成绩 Y 的数学期望 $E(Y)=6E(Y_1)+4E(Y_2)=6\times6+4\times6=60$(分).

17. 解：(1)由题可得 $X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，$X$ 的可能取值为 0，1，2，3，

则 $P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$，$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$.

(2)将“在第 4 轮结束时，学生代表甲答对 3 道题并刚好胜出”记为事件 A，“在第 4 轮结束时，学生代表甲答对 3 道题，学生代表乙答对 0 道题”记为事件 A_1，“在第 4 轮结束时，学生代表甲答对 3 道题，学生代表乙答对 1 道题”记为事件 A_2，则 A_1，A_2 互斥，且 $A=A_1\cup A_2$.

又 $P(A_1)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{54}$，

$P(A_2)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^3+C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times C_4^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{54}$，

所以 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{6}{54}=\frac{1}{9}$. 因此在第 4 轮结束时，学生代表甲答对 3 道题并刚好胜出的概率为 $\frac{1}{9}$.

18. 解：(1)由 $N=5$，$n=3$ 知，当 $M=5$ 时，缴获的 3 辆坦克的编号中，最大编号为 5，另外 2 辆坦克的编号有 C_4^2 种可能，故 $P(M=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$.

由 $Y<5$，得 $2\overline{X}-1<5$，解得 $\overline{X}<3$，故总编号和小于 9，则除最大编号 5 外，另外 2 个编号只能是 1，2，

故 $P(Y<M\text{ 且 }M=5)=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，

因此 $P(Y<M\mid M=5)=\frac{P(Y<M\text{ 且 }M=5)}{P(M=5)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{6}$.

(2)由于 $N=8$，则 M 的可能取值为 4，5，6，7，8，且 $P(M=4)=\frac{C_3^3}{C_8^4}=\frac{1}{70}$，

$P(M=5)=\frac{C_4^3}{C_8^4}=\frac{4}{70}=\frac{2}{35}$，

$P(M=6)=\frac{C_5^3}{C_8^4}=\frac{10}{70}=\frac{1}{7}$，

$P(M=7)=\frac{C_6^3}{C_8^4}=\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$，

$P(M=8)=\frac{C_7^3}{C_8^4}=\frac{35}{70}=\frac{1}{2}$，

故 M 的分布列为

M	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{70}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$

故 $E(M)=4\times\frac{1}{70}+5\times\frac{2}{35}+6\times\frac{1}{7}+7\times\frac{2}{7}+8\times\frac{1}{2}=\frac{36}{5}$.

(3)直观上可判断 $E(M)<N$.

证明如下：$E(M)=nP(M=n)+(n+1)P(M=n+1)+\cdots+NP(M=N)<N[P(M=n)+P(M=n+1)+\cdots+P(M=N)]=N$.

19. 解：(1)设该选手答对的题目个数为 X，该选手在第一轮的得分为 Y，则 $Y=10X$. 易知 X 的所有可能取值为 0，1，2，

则 $P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，

$P(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$\therefore E(X)=\frac{1}{10}\times0+\frac{3}{5}\times1+\frac{3}{10}\times2=\frac{6}{5}$，$\therefore E(Y)=10E(X)=12$.

(2)①由题意可知，第一次是甲回答，第二次甲不回答，$\therefore P_2=0$，则 $P_3=\frac{1}{3}$，

$P_4=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

②证明：由第 n 次回答的是甲的概率为 P_n 得，当 $n\geqslant 2$ 时，第 $n-1$ 次回答的是甲的概率为 P_{n-1}，第 $n-1$ 次回答的不是甲的概率为 $1-P_{n-1}$，则 $P_n=P_{n-1}\cdot 0+(1-P_{n-1})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$，

即 $P_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{4}\right)$，

又 $P_1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\therefore\left\{P_n-\frac{1}{4}\right\}$ 是以 $\frac{3}{4}$ 为首项，$-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，

则 $P_n=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$，

$\therefore P_8=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^7+\frac{1}{4}<\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^6+\frac{1}{4}=P_7$，

$\therefore$ 第 7 次回答的是甲的可能性比第 8 次回答的是甲的可能性大.

重点强化练（十八）

1. 解：(1)设 $P(X=0)=a$，$P(X=40)=b$，依题意得 $a+b+0.3=1$①，

$E(X)=0\times a+20\times 0.3+40b=30$②，

由①②解得 $a=0.1$，$b=0.6$，

故 X 的分布列为

X	0	20	40
P	0.1	0.3	0.6

则 $D(X)=(0-30)^2\times 0.1+(20-30)^2\times 0.3+(40-30)^2\times 0.6=180$.

(2)由题得 Y 的分布列为

Y	10	20	30
P	0.3	0.4	0.3

则 $E(Y)=10\times 0.3+20\times 0.4+30\times 0.3=20$，$D(Y)=(10-20)^2\times 0.3+(20-20)^2\times 0.4+(30-20)^2\times 0.3=60$.

由 $E(X)>E(Y)$ 可知，投放平台广告的期望收益较大，由 $D(X)>D(Y)$ 可知，投放平台广告的风险较高.

综上所述，如果公司期望高收益，那么选择投放平台广告；如果公司期望收益稳定，那么选择投放传统广告.

2. 解：(1)由频率分布直方图可知，估计这 200 人得分的平均数为 $(0.01\times 45+0.02\times 55+0.025\times 65+0.025\times 75+0.015\times 85+0.005\times 95)\times 10=68$.

(2)①摸到 3 个红球，返消费金额的 20%，实际付款额为 $1000(1-20\%)=800$(元)；摸到 2 个红球，1 个黑球，返消费金额的 10%，实际付款额为 $1000(1-10\%)=900$(元).

所以 X 的可能取值为 800，900，1000，

因为 $P(X=800)=\frac{C_3^3C_5^0}{C_8^3}=\frac{1}{56}$，

$P(X=900)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，

所以 $P(X=1000)=1-\frac{1}{56}-\frac{15}{56}=\frac{5}{7}$，

故 X 的分布列为

X	800	900	1000
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{7}$

所以 $E(X)=800\times\frac{1}{56}+900\times\frac{15}{56}+1000\times\frac{5}{7}\approx 969.6$(元).

②若选择方案二，记实际付款额为 Y(单位：元)，依题意，Y 的可能取值为 800，900，950，

因为 $P(Y=800)=\frac{1}{6}$，$P(Y=900)=\frac{1}{3}$，

$P(Y=950)=\frac{1}{2}$，所以 Y 的分布列为

Y	800	900	950
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

所以 $E(Y)=800\times\frac{1}{6}+900\times\frac{1}{3}+950\times\frac{1}{2}\approx 908.3$(元).

因为 $E(X)>E(Y)$，所以选择方案二付款更划算.

3. 解：(1)样本中各地的人均得分分别为 $a_1=30$，$a_2=80$，$a_3=150$，$a_4=240$，$a_5=150$，$a_6=120$，$a_7=90$，所以样本中 7 个地方人均得分的平均值为 $\frac{30+80+150+240+150+120+90}{7}\approx 123$，所以 $Z\sim N(123,10^2)$.

因为 $P(113<Z<133)=P(123-10<Z<123+10)=P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(103<Z<143)=P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，所以 $P(113<Z<143)\approx\frac{1}{2}\times(0.9545-0.6827)+0.6827=0.8186$.

(2)①由题意得，X 的可能取值为 50，100，150，200，

则 $P(X=50)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$，

$P(X=100)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{13}{32}$，

$P(X=150)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$，

$P(X=200)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$，

所以 X 的分布列为

X	50	100	150	200
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

故 $E(X)=50\times\frac{3}{8}+100\times\frac{13}{32}+150\times\frac{3}{16}+200\times\frac{1}{32}=\frac{375}{4}$.

②由①知 $E(X)=\frac{375}{4}<100$，

所以该市民应选择方案二.

4. 解：(1)①记“甲获得第四名”为事件 M，又 $p=0.6$，则 $P(M)=(1-p)^2=0.16$.

②记甲在“双败淘汰制”下参与对阵比赛的场数为随机变量 X，

则 X 的所有可能取值为 2，3，4，

则 $P(X=2)=(1-0.6)^2=0.16$，

$P(X=3)=0.6^2+(1-0.6)\times 0.6\times(1-0.6)+0.6\times(1-0.6)\times(1-0.6)=0.552$，

$P(X=4)=(1-0.6)\times 0.6\times 0.6+0.6\times(1-0.6)\times 0.6=0.288$，

则 X 的分布列为

X	2	3	4
P	0.16	0.552	0.288

所以数学期望 $E(X)=2\times 0.16+3\times 0.552+4\times 0.288=3.128$.

(2)在“单败淘汰制”下，甲获得冠军需要比赛两场，且两场都胜，则甲获得冠军的概率为 p^2.

在“双败淘汰制”下，设事件 V 为“甲获得冠军”.

设事件 A 为“甲比赛三场且连胜三场”，则 $P(A)=p^3$；设事件 B 为“甲比赛四场且四场的结果为胜负(胜区败)胜(赢败区胜者)胜(决赛区胜)”，

则 $P(B)=p(1-p)p^2$；

设事件 C 为“甲比赛四场且四场的结果为负胜(败区胜)胜(赢胜区败者)胜(决赛区胜)”，则 $P(C)=(1-p)p^3$.

所以 $P(V)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+(C)=p^3+p(1-p)p^2+(1-p)p^3=(3-2p)p^3$.

由 $(3-2p)p^3-p^2=p^2(3p-2p^2-1)=p^2(2p-1)(1-p)$，且 $0<p<1$，

可知当 $p\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$(3-2p)p^3>p^2$，“双败淘汰制”对甲夺冠更有利；

当 $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$(3-2p)p^3<p^2$，“单败淘汰制”对甲夺冠更有利；

当 $p=\frac{1}{2}$ 时，两种赛制甲夺冠的概率一样.

重点强化练（十九）

1. 解：(1)依题意，4 颗番石榴的位置从第 1 个到第 4 个排序，有 $A_4^4=24$(种)情况，

要摘到那颗最大的番石榴，有以下两种情况：

①最大的番石榴是第 3 个，其他的随意在哪个位置，有 $A_3^3=6$(种)情况；

②最大的番石榴是最后 1 个，第二大的番石榴是第 1 个或第 2 个，其他的随意在哪个位置，有 $2A_2^2=4$(种)情况.

所以所求概率 $P=\frac{6+4}{24}=\frac{5}{12}$.

(2)记事件 A 表示最大的番石榴被摘到，事件 B_i 表示最大的番石榴排在第 i 个，

则 $P(B_i)=\frac{1}{n}$，

由全概率公式知 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)$.

当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时，最大的番石榴在前 k 个中，不会被摘到，此时 $P(A|B_i)=0$；

当 $k+1\leqslant i\leqslant n$ 时，若最大的番石榴被摘到，则前 $i-1$ 个番石榴中最大的一个在前 k 个中，此时 $P(A|B_i)=\frac{k}{i-1}$.

因此 $P(A)=\frac{1}{n}\left(\frac{k}{k}+\frac{k}{k+1}+\cdots+\frac{k}{n-1}\right)=\frac{k}{n}\ln\frac{n}{k}$，

令 $g(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{n}{x}(x>0)$，

求导得 $g'(x)=\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x}-\frac{1}{n}$，

由 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{n}{e}$，

当 $x\in\left(0,\frac{n}{e}\right)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{n}{e},n\right)$ 时，$g'(x)<0$，

即函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{n}{e}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{n}{e},n\right)$ 上单调递减，

则 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，于是当 $k=\frac{n}{\mathrm{e}}$ 时，$P(A)=\frac{k}{n}\ln\frac{n}{k}$ 取得最大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以 P 的最大值为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，此时 t 的值为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

2. 解：(1)因为 $l_0(x)\in L_{f(x),x\in\mathbf{R}}$，

所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$-x^2+x\leqslant kx+1$，且 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$-x_0^2+x_0=kx_0+1$，

令 $\varphi(x)=-x^2+(1-k)x-1$，

则 $\varphi(x)\leqslant 0$，且 $\varphi(x_0)=0$，

所以 $(k-1)^2-4=0$，

所以 $k-1=2$ 或 $k-1=-2$，

解得 $k=3$ 或 $k=-1$.

(2)(i)证明：先证必要性.

若直线 $y=l(x)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的一条切线，设切点坐标为 $(x_0,\mathrm{e}^{x_0}+1)$，

因为 $g'(x)=\mathrm{e}^x$，所以切线方程为 $y-(\mathrm{e}^{x_0}+1)=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$，

即 $l(x)=\mathrm{e}^{x_0}x+(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}+1$(*).

一方面，$g(x_0)=l(x_0)$，

所以 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$g(x_0)=l(x_0)$；

另一方面，令 $G(x)=g(x)-l(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x_0}x-(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}$，则 $G(x_0)=0$，

因为 $G'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x_0}$，

所以当 $x<x_0$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，

当 $x>x_0$ 时，$G'(x)>0$，$G(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $G(x)\geqslant G(x_0)=0$，所以 $g(x)\geqslant l(x)$.

即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$g(x)\geqslant l(x)$.

所以 $l(x)\in T_{g(x),x\in\mathbf{R}}$，即直线 $y=l(x)$ 是函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的“最佳下界线”.

再证充分性.

若直线 $y=l(x)$ 是函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的“最佳下界线”，不妨设 $l(x)=kx+b$，

由“最佳下界线”的定义知，$\forall x\in\mathbf{R}$，$g(x)\geqslant l(x)$，且 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$g(x_0)=l(x_0)$，令 $H(x)=g(x)-l(x)=\mathrm{e}^x+1-kx-b$，

则 $H(x)\geqslant 0$ 且 $H(x_0)=0$，

所以 $H(x)_{\min}=0$.

易知 $H'(x)=\mathrm{e}^x-k$.

①若 $k\leqslant 0$，则 $H'(x)>0$，所以 $H(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $\exists x_1<x_0$，使得 $H(x_1)<H(x_0)=0$，故 $k\leqslant 0$ 不符合题意.

②若 $k>0$，则令 $H'(x)=0$，得 $x=\ln k$，

当 $x\in(-\infty,\ln k)$ 时，$H'(x)<0$，$H(x)$ 在 $(-\infty,\ln k)$ 上单调递减，

当 $x\in(\ln k,+\infty)$ 时，$H'(x)>0$，$H(x)$ 在 $(\ln k,+\infty)$ 上单调递增，

所以当且仅当 $x=\ln k$ 时，$H(x)$ 取得最小值 $H(\ln k)$.

又 $H(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值，$H(x)_{\min}=0$，所以 $\begin{cases}x_0=\ln k,\\H(\ln k)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}k=\mathrm{e}^{x_0},\\\mathrm{e}^{x_0}+1-kx_0-b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\mathrm{e}^{x_0},\\b=(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}+1,\end{cases}$

所以 $l(x)=\mathrm{e}^{x_0}x+(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}+1$，

由(*)式知直线 $y=l(x)$ 是曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_0,\mathrm{e}^{x_0}+1)$ 处的切线.

综上所述，直线 $y=l(x)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的一条切线的充要条件是直线 $y=l(x)$ 是函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的“最佳下界线”.

(ii)集合 $L_{k(x),x\in(1,+\infty)}\cap T_{g(x),x\in\mathbf{R}}$ 中元素的个数为 2.

3. 解：(1)集合 $M=\{(x,y,z)\mid z=0\}$ 表示 xOy 平面上所有的点，$P=\{(x,y,z)\mid|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1\}$ 表示以 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ 八个点为顶点的正方体及其内部所有的点，而 $P\cap M$ 可以看成正方体截平面 xOy 所得截面内所有的点，

该截面是边长为 2 的正方形，

因此 $S_1=4$.

对于 $Q=\{(x,y,z)\mid|x|+|y|+|z|\leqslant 2\}$，当 $x,y,z>0$ 时，

$x+y+z=2$ 表示经过点 $(2,0,0)$，$(0,2,0)$，$(0,0,2)$ 的平面在第一象限内的部分，

由对称性可知 Q 表示以 $(\pm2,0,0)$，$(0,\pm2,0)$，$(0,0,\pm2)$ 这六个点为顶点的正八面体及其内部所有的点.

而 $Q\cap M$ 可以看成正八面体截平面 xOy 所得截面内所有的点，该截面是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形，因此 $S_2=8$.

(2)考虑到集合 Q 的子集 $Q'=\{(x,y,z)\mid x+y+z\leqslant 2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$ 中所有点构成的几何体即为三个坐标平面与平面 $x+y+z=2$ 围成的四面体，

四面体的四个顶点分别为 $(0,0,0)$，$(2,0,0)$，$(0,2,0)$，$(0,0,2)$，

此四面体的体积为 $V_{Q'}=\frac{1}{3}\times2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)=\frac{4}{3}$，

由对称性知 $V_1=8V_{Q'}=\frac{32}{3}$.

考虑到集合 P 的子集 $P'=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$ 中所有点构成的几何体为棱长为 1 的正方体，

显然 $P'\cap Q'$ 为两个几何体的公共部分，

记 $Q_1(1,1,0)$，$Q_2(1,0,1)$，$Q_3(0,1,1)$，$Q_4(1,1,1)$.

易验证 Q_1，Q_2，Q_3 在平面 $x+y+z=2$ 上，同时也在 Q' 的底面上，

则 $P'\cap Q'$ 为正方体截去三棱锥 Q_1-$Q_1Q_2Q_3$ 所剩下的部分.

P' 的体积为 $V_{P'}=1\times1\times1=1$，三棱锥 Q_4-$Q_1Q_2Q_3$ 的体积为 $V_{Q_4\text{-}Q_1Q_2Q_3}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times(1\times1)=\frac{1}{6}$，

故 $P'\cap Q'$ 的体积为 $V_{P'\cap Q'}=V_{P'}-V_{Q_4\text{-}Q_1Q_2Q_3}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，

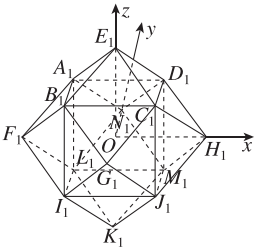
由对称性知，$V_2=8V_{P'\cap Q'}=\frac{20}{3}$.

(3)①如图所示，即为集合 T 所构成的几何体，其中正方体 $A_1B_1C_1D_1$-$L_1I_1J_1M_1$ 即为集合 P 所构成的几何体，对于四棱锥 E_1-$A_1B_1C_1D_1$，

点 E_1 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离为 1，

$V_{E_1\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{3}\times1\times2\times2=\frac{4}{3}$，

故 $V_3=V_P+6V_{E_1\text{-}A_1B_1C_1D_1}=8+6\times\frac{4}{3}=16$.



②由题意知，平面 $E_1C_1D_1$ 的方程为 $x+z-2=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$，

平面 $E_1A_1D_1$ 的方程为 $y+z-2=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$，

故 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{2}$.

由图知，相邻两个面所成二面角为钝角，故 W 的相邻两个面所成二面角的大小为 $\frac{2\pi}{3}$.

由图可知，W 共有 12 个面，24 条棱.

4. 解：(1)(i,j) 的所有可能取值为 $(1,6)$，$(1,2)$，$(5,6)$.

(2)证明：当 $m=3$ 时，$a_1,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{14}$ 可分成三组：a_1,a_4,a_7,a_{10}；a_3,a_6,a_9,a_{12}；a_5,a_8,a_{11},a_{14}. 每组均构成等差数列，

∴当 $m=3$ 时，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{14}$ 是 $(2,13)$-可分数列.

当 $m>3$ 时，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 去掉 a_2,a_{13} 以后，分成 m 组，

只需将前面的 12 项还按 $m=3$ 时的分法分成 3 组，即 a_1,a_4,a_7,a_{10}；a_3,a_6,a_9,a_{12}；a_5,a_8,a_{11},a_{14}.

后面的 $(4m-12)$ 项每 4 个相邻的项分成一组，即 $a_{15},a_{16},a_{17},a_{18}$；$a_{19},a_{20},a_{21},a_{22}$；…；$a_{4m-1},a_{4m},a_{4m+1},a_{4m+2}$.

这 $(m-3)$ 组每一组都能构成等差数列.

∴当 $m>3$ 时，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,13)$-可分数列.

综上，当 $m\geqslant 3$ 时，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,13)$-可分数列.

(3)证明：方法一：易知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)-可分数列等价于 $1,2,\cdots,4m+2$ 是 (i,j)-可分数列. 当 $m=1$ 时，数列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 是 (i,j)-可分数列的概率 $P_1=\frac{3}{C_6^2}=\frac{1}{5}>\frac{1}{8}$.

当 $m=2$ 时，数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$ 是 (i,j)-可分数列的概率 $P_2=\frac{7}{C_{10}^2}=\frac{7}{45}>\frac{1}{8}$.

以此类推，易知 $1,2,\cdots,4m+2$ 是 $(4k+1,4r+2)$-可分数列 $(0\leqslant k\leqslant r\leqslant m)$，

此时共有 $(m+1)+m+\cdots+2+1=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$(种)；且易证该数列也是 $(4k+2,4r+5)$-可分数列 $(0\leqslant k<r\leqslant m-1)$，此时共有 $(m-1)+(m-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}m(m-1)$(种).

综上，至少有 $\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)=m^2+m+1$(种)，

∴$P_m\geqslant\frac{m^2+m+1}{C_{4m+2}^2}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}=\frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\frac{1}{8}$，得证.

方法二：易知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)-可分数列等价于 $1,2,\cdots,4m+2$ 是 (i,j)-可分数列.

设从 $1,2,\cdots,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j $(i<j)$，使数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)-可分数列的取法数为 F_m，则 $F_1=3$.

当 $m=n+1$ 时，可取 a_{4n+6} 与 $a_1,a_5,a_9,\cdots,a_{4n+1},a_{4n+5}$ 中的一个，共 $(n+2)$ 种；可取 a_{4n+5} 与 $a_2,a_6,a_{10},\cdots,a_{4n-2}$ 中的一个，共 n 种.

故 $F_{n+1}-F_n\geqslant n+2+n=2n+2$，

故当 $m\geqslant 2$ 时，$F_m=(F_m-F_{m-1})+\cdots+(F_2-F_1)+F_1\geqslant 2m+\cdots+4+3=m^2+m+1$，又 $F_1=3$，满足上式，

所以 $F_m\geqslant m^2+m+1$，

则 $P_m\geqslant\frac{m^2+m+1}{C_{4m+2}^2}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}=\frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\frac{m^2+m+1}{8m^2+8m+8}=\frac{1}{8}$，得证.

1684.3.16